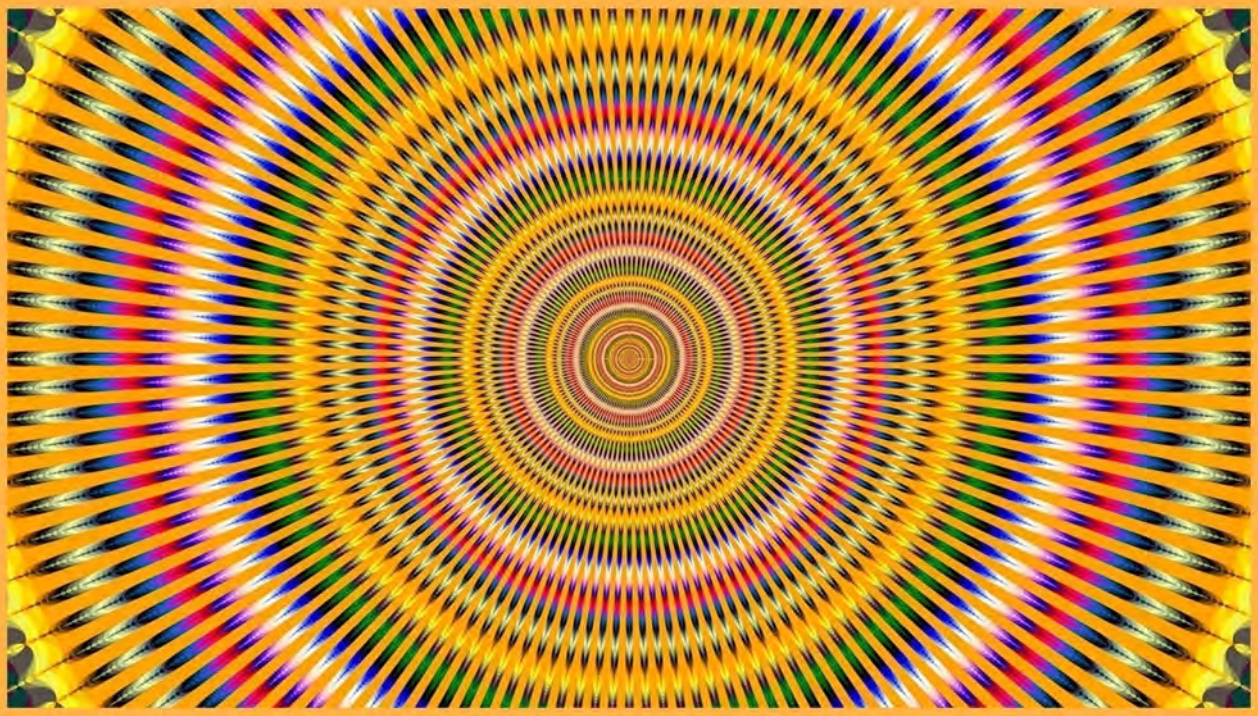
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

Студенческий журнал по математике и её приложениям

Том 4, № 2



2025

https://semj.bsuedu.ru/

Студенческий журнал по математике и её приложениям

2025

Основан в 2022 г.

Журнал принимает к публикации студенческие работы на различные темы, которые отражают их взгляд на определенные проблемы математики и её приложений.

Издание может содержать как новые научные результаты, так и уже известные через призму восприятия их авторами.

Будет полезен бакалаврам и магистрантам, обучающимся по математическим и смежным специальностям, в качестве возможности развития исследовательских и публикационных способностей при изучении различных разделов современной математики и её приложений.

До 2025 г. журнал издавался под названием «Студенческий математический журнал».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ«БелГУ»;
Заместители главного редактора:
Л. А. Ковалева, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;
В. А. Полунин, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математическое моделирование.

Журнал наполняется материалом в течении полугода по мере поступления статей.
Выходит 2 раза в год.

© НИУ «БелГУ», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Токарев Д. А.

Решение краевой задачи Гильберта
(рук. к. ф.-м. н., доц. О. В. Чернова) ***193***

Крюкова А. Д.

Применение методов нечеткой логики для повышения точности оценки кредитоспособности заемщиков
(рук. к. ф.-м. н., доц. О. В. Чернова) ***203***

Агафонов Д. А.

Метод стрельбы. Численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений
(рук. к. ф.-м. н., доц. О. В. Чернова) ***210***

Селезнев Е. А.

Решение дифференциального уравнения 3-го порядка в окрестности регулярной особой точки
(рук. к. ф.-м. н., доц. О. В. Чернова) ***216***

Ларионова О. В.

Аналитические функции в радиальных трубчатых областях над конусами
(рук. д. ф.-м. н., проф. В. Б. Васильев) ***226***

Бекетов В. Ю.

Метод приближений и теорема Пикара
(рук. к. ф.-м. н., доц. О. В. Чернова) ***231***

Науменко Н. Н.

Преобразование Фурье, свойства и применение
(рук. к. ф.-м. н., доц. Л. А. Ковалева) ***238***

Рудофилов И. М.

Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование
(рук. к. ф.-м. н., доц. Л. А. Ковалева) ***246***

Короплясов К. Р.

Немного о пространстве L_2
(рук. к. ф.-м. н., доц. Л. А. Ковалева) ***250***

Новиков И. А.

Сравнение интеграла Римана и Лебега. Примеры
(рук. к. ф.-м. н., доц. Л. А. Ковалева) ***256***

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 193–202.

Решение краевой задачи Гильберта

Токарев Д. А.
1469493@bsuedu.ru

Аннотация. В этой работе будет поставлена краевая задача Гильберта для односвязной области. Целью работы является емко дать все сопутствующие определения необходимые для постановки этой задачи, а также показать взаимосвязь между ней и задачей Римана. Основное внимание уделено конкретным примерам, которые подробно разобраны и решены.

Ключевые слова: аналитическая функция, задача Гильберта, оператор Шварца, формулы Гильберта

Для цитирования: Токарев Д. А. 2025. Решение краевой задачи Гильберта. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 193–202.

---

1. Введение. Краевая задача Гильберта является одной из основных наряду с задачей Римана краевых задач аналитических функций. Исторически, начало постановки задачи Гильберта можно проследить в работе Римана «Основы общей теории функций» 1851 года, как отмечает Гахов [1], поэтому иногда ее называют задачей Римана – Гильберта. Однако полное решение краевой задачи, которую мы рассмотрим ниже, дал именно Гильберт в 1905 году. Для постановки этой задачи рассматриваются специальные интегралы с ядром Гильберта, которые также будут описаны в статье.

Краевая задача Гильберта имеет фундаментальное значение в теории аналитических функций и находит многочисленные приложения в различных областях математической физики, теории упругости, гидродинамики и других прикладных дисциплинах [2, 5]. Изучение этой задачи остается актуальным и в настоящее время, о чем свидетельствуют недавно опубликованные работы [7]. Кроме того, разработаны эффективные численные методы решения данной задачи [3].

В настоящей статье автор ставит целью емко и сжато описать основные теоретические аспекты, показывающие возникновение краевой задачи Гильберта, а также ее взаимосвязь с задачей Римана. Особое внимание уделено конкретным примерам, относящимся как к интегралам с ядром Гильберта, так и к одноименной краевой задаче. Статья может быть полезна студентам и исследователям, интересующимся теорией краевых задач аналитических функций.

2. Общие сведения. В этом пункте дадим основные сведения из теории функций комплексных переменных при помощи книг [1, 6].

Определение 1.1. *Индексом функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении.*

Теперь при помощи [1] дадим определение порядку аналитической функции

Определение 1.2. *В некоторой точке z_0 порядком аналитической функции $\Phi(z)$ будем называть показатель низшей степени в разложении $\Phi(z)$ в ряд по степеням $(z - z_0)$.*

Индекс функции обладает следующими важными свойствами:

1. Индекс произведения двух функций равен сумме индексов этих функций:
$$\mathrm{ind}_L[G_1(t)G_2(t)] = \mathrm{ind}_L[G_1(t)] + \mathrm{ind}_L[G_2(t)].$$
2. Индекс отношения двух функций равен разности индексов этих функций:
$$\mathrm{ind}_L\left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)}\right] = \mathrm{ind}_L[G_1(t)] - \mathrm{ind}_L[G_2(t)].$$
3. Индекс постоянной функции (отличной от нуля) равен нулю.
4. Индекс функции t^n (где n – целое число) по окружности $|t| = 1$ равен n.
5. Индекс комплексно-сопряженной функции $\overline{G(t)}$ равен $-\mathrm{ind}_L[G(t)]$.

При помощи этой же книги дадим определение интеграла типа Коши

Определение 1.3. *Пусть L замкнутый гладкий контур или незамкнутый, целиком расположенный в конечной части плоскости, τ – комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ – непрерывная функция точек контура, тогда интеграл*
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{1}$$
называется интегралом типа Коши.

© Токарев Д. А., 2025

Функцию $\varphi(\tau)$ из (1) принято называть плотностью, а $\dfrac{1}{\tau - z}$ ядром. Очевидно, что интеграл из нашего определения представляет собой функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек самого контура L [6]. Скажем еще пару слов про главное значение интеграла.

Определение 1.4. *Пусть функция $\varphi(\tau)$, которая удовлетворяет условию Гельдера задана на гладком контуре L, а τ, t – комплексные координаты точек контура, тогда особый интеграл $\int\limits_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ для функции $\varphi(\tau)$ существует в смысле главного значения по Коши и во всех точках гладкости его можно представить в двух видах*

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \left[\ln \frac{b - t}{a - t} + \pi i \right], \tag{2}$$

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b - t}{t - a}.$$

Все выводы этих формул, а также вспомогательные определения и обозначения можно посмотреть например у Гахова [1] или Мусхелишвили [6]. Отметим также, что мы не будем использовать как и в [1] специальные обозначения для того чтобы показать, что интеграл понимается в смысле главного значения по тем же умозаключениям, что и Гахов.

3. Формулы Гильберта. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в единичном круге. Обозначим через s и σ длины дуг окружности, отсчитываемых от точки пересечения ее с положительным направлением оси абсцисс и пусть $u(s)$ непрерывная функция, которая является предельным значением действительной части функции $f(z)$ на контуре круга тогда справедлива формула приведенная ниже в виде определения [1].

Определение 1.5. *Формула*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + iv_0, \tag{3}$$

которая дает возможность выразить аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$ через значение ее действительной части на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого iv называется формулой Шварца.

Если в (3) взять $z = 0$, тогда пользуюсь теоремой о среднем [1], получим

$$v_0 = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(\sigma) d\sigma.$$

В (3) выражение $\dfrac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}$ называется ядром Шварца. Покажем его взаимосвязь с ядром Коши из (1). Для этого обозначим через $\tau = e^{i\sigma}$ комплексную координату точки окружности, тогда

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \left(-1 + \frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z} \right) d\sigma = \frac{2}{i} \frac{d\tau}{\tau - z} - d\sigma,$$

окончательно имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma, \tag{4}$$

формула (4) и показывает взаимосвязь ядра Коши и ядра Шварца. Выведем теперь сами формулы Гильберта, для этого перейдем в (3) и (4) к пределу, когда z стремится к точке единичной окружности $t = e^{is}$, и воспользуемся формулой Сохоцкого из [6] следующего вида

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

тогда получим

$$u(s) + iv(s) = \frac{1}{2} 2u(s) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma + iv_0,$$

объедим два интеграла и сделаем все возможные сокращения, получим

$$v(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}d\sigma + v_0, \tag{6}$$

произведем некоторые преобразования в (6) у ядра, а именно:

$$\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}} = \frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}\cdot\frac{e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}}{e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}+e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}-e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}} = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2},$$

подставляя это в (6) получим

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + v_0, \tag{7}$$

то есть получили формулу для выражения мнимой части аналитической функции через действительную, для того чтобы выразить $u(s)$ через $v(s)$, заметим, что для функции

$$if(z) = v - iu,$$

действительной частью является v, а мнимой $-u$, тогда применим формулу (7), получим

$$u(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + u_0 \qquad (u_0 = u(0,0)). \tag{8}$$

Определение 1.6. *Симметричные формулы* (7) *и* (8) *называются формулами обращения Гильберта, а ядром Гильберта называется выражение* $\operatorname{ctg}\dfrac{\sigma-s}{2}$.

Заметим, что при $\sigma = s$ ядро обращается в бесконечность первого порядка, так что интегралы, входящие в формулы Гильберта, являются особыми и их нужно понимать в смысле главного значения [2, 8].

Приведем примеры вычисления особых интегралов с ядрами Гильберта.

Пример 1. Вычислить

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta,$$

сравним с формулой (7) видим, что в нашем случае $u(\sigma) = \cos(n\theta)$, то есть из сказанного выше следует, что в ответе мы должны получить мнимую часть функции аналитичной в единичном круге у которой значение ее действительной части на окружности равна $\cos(n\theta)$, вспоминая тригонометрическое представление комплексного числа получим, что

$$z^n = |z|\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

так как мы рассматриваем единичную окружность, то на ней $|z| = 1$, то есть по (7) получаем ответ

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta = -\sin(n\theta),$$

заметим, что $v_0 = v(0) = \sin(0) = 0$, также отметим, что при $n = 0$ мы получим ответ 0, его можно получить непосредственным вычислением данного интеграла, но уже без косинуса в смысле главного значения [1].

Пример 2. Вычислить

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta,$$

рассмотрим функцию $\operatorname{Ln}\left(1-e^{i\theta}\right)$, тогда по определению логарифма для комплексной функции [1]

$$-\operatorname{Ln}(1-z) = -\operatorname{Ln}\left(1-e^{i\theta}\right) = -\ln\left|1-e^{i\theta}\right| - i\arg(1-e^{i\theta}),$$

рассмотрим

$$\left|1-e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})\right| = \left|-e^{i\theta/2}2i\sin(\theta/2)\right| = 2\left|\sin(\theta/2)\right|,$$

таким образом, стоящие под интегралом выражение, является действительной частью функции $-\operatorname{Ln}(1-z)$, в ответе мы должны получить ее мнимую часть плюс v_0, тогда имеем

$$-\arg(1-e^{i\theta})+v_0=\frac{\pi-\theta}{2},$$

так как $v_0\equiv 0$, тогда переходя от θ ка φ, получим окончательный ответ $\dfrac{\pi-\varphi}{2}$.

4. Задача Римана. Более подробно и все выкладки про задачу Римана можно посмотреть например в [1, 6], мы же остановимся на случае односвязной области.

Определение 1.7. *Пусть дан простой гладкий контур L делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю области D^+ и внешнюю D^-, и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, которые удовлетворяют условию Гельдера причем $G(t)\neq 0$, тогда задачей Римана называется поиск двух функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, которые аналитические каждая в соответствующей области D^+ и D^-, причем $\Phi^-(z)$ и в $z=\infty$, а также они удовлетворяют на контуре L линейному соотношению*

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{9}$$

при $g(t)\equiv 0$, задача называется однородной, иначе неоднородной.

Функцию $g(t)$ называют свободным членом, а $G(t)$ коэффициентом задачи Римана. Индекс коэффициента, также называется и индексом задачи. Решаются задача при помощи формулы (5) и канонической функции, но мы не будем в этой статье выводить решение для нее, а лишь укажем при каких условиях задача Римана разрешима.

Утверждение 1.1. *Если индекс $\varkappa$ краевой задачи неотрицательный, то однородная задача* (9) *разрешима и имеет $\varkappa+1$ линейно неазвисимых решений, при отрицательном индексе задача неразрешима.*

Утверждение 1.2. *Если индекс $\varkappa$ краевой задачи неотрицательный, то неоднородная задача* (9) *разрешима при любом свободном члене, при отрицательном индексе задача вообще говоря неразрешима, в случае $\varkappa<-1$, чтобы задача была разрешима необходимо, чтобы свободный член удовлетворял условиям вида*

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0 \qquad (k=1,2,\ldots,\varkappa-1),$$

при $\varkappa=-1$ задача разрешима и имеет единственное решение.

Под $X^+(\tau)$ мы имеем ввиду предельное значение канонической функции для исходной задачи, в [1, 6] можно посмотреть строгого определение этой функции для задачи Римана, а также доказательство этих утверждений. Отметим, лишь что под неразрешимостью мы понимаем, что задача имеет только тривиальное решения.

5. Задача Гильберта. Итак, перейдем к основному теоретическому пункту нашей работы, а именно поставим задачу Гильберта, для этого напомним, что L – это простой замкнутый контур, и пусть даны действительные функции дуги s контура $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, которые удовлетворяют условию Гельдера.

Определение 1.6. *Пусть требуется найди аналитическую функцию*

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

в области D^+ и непрерывную на контуре, предельные значения действительной и мнимой части которой удовлетворяют на контуре линейному соотношению

$$a(s)u(s)+b(s)v(s)=c(s), \tag{10}$$

такая задача называется краевой задачей Гильберта.

В определение и в дальнейшем мы будем придерживаться обозначениями для функций, полученной заменой координат функциями дуги s, как и Гахов в своей монографии [1], то есть например $u\,[x(s),y(s)]=u(s)$. Очевидно, как и в задаче Римана, если правая часть (10) всюду равна нулю, то задача называется однородной, иначе неоднородной. Для построения решения этой задачи, обсудим оператор Шварца для односвязной области, так как он необходим для построения решения [1, 6].

Определение 1.8. *Оператором Шварца* называется оператор, восстанавливающий аналитическую функцию $F=u+iv$ по граничным значениям её действительной части.

Обозначим этот оператор через S. Пусть на гладком контуре L задана действительная функция $u(s)$, удовлетворяющая условию Гёльдера. Тогда оператор S ставит в соответствие функции $u(s)$ аналитическую функцию $F(z)$, предельные значения действительной части которой на L совпадают с $u(s)$, а мнимая часть обращается в нуль в некоторой фиксированной точке z_0. Символически это записывается как:

$$F(z)=u(x,y)+iv(x,y)=S[u].$$

Если в качестве контура L выбрана единичная окружность, то оператор S задаётся интегральной формулой Шварца (3). Отметим, что в данном случае прослеживается связь между задачей Гильберта и задачей Римана, поскольку для контура в виде действительной оси оператор Шварца совпадает с удвоенным интегралом Коши [1, 6]. Для произвольного контура выражение для оператора Шварца определяется через функцию Грина (подробнее см. [1]). В настоящей работе рассматривается случай единичной окружности.

Используя введённое определение, сформулируем вспомогательную задачу, результаты решения которой будут применяться при выводе решения краевой задачи Гильберта (в [1] она обозначена как задача A). Пусть L — единичная окружность, а D^+ — её внутренняя область. Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D^+, за исключением точки z_0, где она может иметь полюс порядка не выше n, действительная часть которой на контуре L совпадает с заданной функцией $u(s)$.

Вначале рассмотрим решение однородной задачи ($u(s) \equiv 0$). Искомую функцию в этом случае обозначим через $Q(z)$. Выпишем её разложение в окрестности начала координат:

$$Q(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k,$$

по условию

$$\Re \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k = 0,$$

тогда, пусть $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, имеем

$$\sum_{k=-n}^{\infty} (\alpha_k \cos ks - \beta_k \sin ks) = 0.$$

Так как разложение в ряд Фурье единственно, то

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{-k} = -\alpha_{-k}, \quad \beta_{-k} = \beta_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$
$$\alpha_k = \beta_k = 0, \quad k > n,$$

то есть окончательно

$$c_0 = i\beta_0, \quad c_{-k} = -\overline{c}_k \quad (k = 1, 2, ..., n), \quad c_k = 0 \quad (k > n).$$

Теперь можем записать ответ для нашей искомой функции $Q(z)$:

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k z^k - \overline{c}_k z^{-k}). \tag{11}$$

Отметим, что решить эту задачу можно и для произвольной области при помощи комформного отображения, подробнее про это можно посмотреть в [1]. Мы же перейдем теперь к неоднородной задаче, по определению оператора S, Su – это аналитическая в области D^+ функция, действительная часть которой на контуре равна $u(s)$, тогда рассмотрим разность $F(z) - Su$, которая очевидно будет функцией удовлетворяющей условиям однородной задачи, то есть

$$F(z) - Su = Q(z),$$

отсюда выражая $F(z)$ и получим решение неоднородной задачи

$$F(z) = Su + Q(z), \tag{12}$$

где оператор Шварца определяется по формуле (3), $Q(z)$ по формуле (11).

Теперь при помощи [1] введем понятие регуляризующего множителя

Определение 1.9. *Функция $R(t)$, которая является функцией точек контура, а также удовлетворяет улсловию Гельдера и умножив на которую функцию $G(t)$, получим краевое значение функции $\Phi^+(z)$, аналитической в D^+ называется регуляризующим множителем.*

То есть выполняется условие вида

$$G(t)R(t) = \Phi^+(z), \tag{13}$$

отметим, что задача в такой постановке не является определенной, так как если она допускает какое-нибудь решение, то она очевидно, допускает и бесчисленное множество решений, получается из данного умножения его на краевое значение любой функции аналитической в D^+, поэтому на множитель обычно накладывают дополнительные условия. Если взять однородную задачу Римана, то таким

множителем выступает функция $\Phi^-(z)$, решение задачи Римана устанавливает существование такого множителя для $\varkappa \geq 0$.

Выделим еще два вида, а именно первый это с постоянным аргументом, а второй с постоянным множителем.

Пусть $R(t)$, то есть регуляризующий множитель действительная функция, обозначим его как $p(s)$, тогда имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = \Phi^+(t).$$

Возьмем индекс от обеих частей, тогда получим

$$\varkappa = \mathrm{Ind}[a(s) + ib(s)] = \mathrm{Ind}\Phi^+(t),$$

так как индекс $p(s)$ равен нулю, это следует из свойств индекса описанных в пункте 1, так же с помощью этих свойств можно сделать следующие вывод:

- Функция $\Phi^+(z)$ не имеет нулей в области D^+, если $\varkappa = 0$.
- Функция $\Phi^+(z)$ имеет $\varkappa$ нулей в области D^+, если $\varkappa > 0$.
- Функция $\Phi^+(z)$ имеет не менее $-\varkappa$ полюсов в области D^+, если $\varkappa < 0$, то есть не является аналитической.

Дадим несколько иное определение понятию регуляризующего множителя, допустим возможность наличия полюса у искомой функции в области D^+, будем считать что эта область содержит начало координат.

Определение 1.10. *Регуляризующий множитель функции $a(s) + ib(s)$, заданной на контуре L, будем называть такую действительную положительную функцию точек контура $p(s)$, что произведение $p(s)[a(s) + ib(s)]$ есть краевое значение функции $\eta^+(z)$, аналитической и имеющей нулевой порядок всюду в области D^+, за исключением разве что начала координат, где ее порядок равен индексу $\varkappa$ функции $a(s)+ib(s)$.*

Итак, теперь учитывая это определение разберем наши три случая, пусть $\varkappa = 0$, тогда так как функция $\eta^+(z)$ не имеет нулей в области, то можно представить нее в виде показательной функции

$$\eta^+(z) = e^{i\gamma(z)}, \quad \gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y).$$

Тогда по определению 1.10 имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = e^{i\gamma(t)} = e^{i\omega(s)}e^{-\omega_1(s)},$$

приравняем модули и аргументы обеих частей равенства выше, имеем

$$p(s)\sqrt{a^(s) + b^(s)} = e^{-\omega_1(s)}, \quad \omega(s) = \mathrm{arctg}\,\frac{b(s)}{a(s)}. \tag{14}$$

Проще всего выразить результаты при помощи оператора Шварца, потому что (14) определяет краевое значение гармонической функции $\omega(x, y)$, сама функция $\omega(x, y)$ определяется решением задачи Дирихле, затем из уравнений Коши-Римана определяется сопряженная гармоническая функция $\omega_1(x, y)$, через краевое значения которой выражается искомый регуляризирующий множитель $p(s)$.

Тогда по (14) получим

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = S\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}, \tag{15}$$

для определенности будем считать, что

$$\Im\gamma(z_0) = \omega_1(z_0) = 0.$$

Тогда регуляризующий множитель определяется формулой

$$p(s) = \frac{e^{-\omega(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}.$$

Остается рассмотреть вопрос единственности, пусть существует два различных множителя $p(s)$, и $p_1(s)$, тогда будем иметь равенства

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = \eta^+(s), \quad p_1(s)[a(s) + ib(s)] = \eta_1^+(s),$$

тогда разделим почленно

$$\frac{p_1(s)}{p(s)} = \psi(s),$$

где $\psi(s) = \dfrac{\eta_1^+(s)}{\eta^+(s)}$, так как мнимая часть $\psi(z)$ на контуре равна нулю, то в силу единственности решения задачи Дирихле $\Im\psi(z) = 0$ всюду в D^+, то есть $\psi(z) = const$.

Отсюда можно сделать вывод, что регуляризующий множитель определяется с точностью до постоянного множителя, где этот множитель определят условие на мнимую часть для $\gamma(z_0)$.

Теперь разберем случай при $\varkappa \neq 0$, по определению имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)} = t^{\varkappa} e^{-\omega_1(s)} e^{i\omega(s)}.$$

Рассуждая аналогично получим

$$p(s) = \frac{|t|^{\varkappa} e^{-\omega(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}},$$
$$\omega(s) = \arg\{t^{-\varkappa}[a(s) + ib(s)]\} = \operatorname{arctg} \tfrac{b}{a} - \varkappa \arg t, \tag{16}$$

из последнего имеем

$$\gamma(z) = S\left[\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \varkappa \arg t\right].$$

Множитель из (16) единственный это вытекает из предшествующего.

Теперь разберем регуляризующий множитель с постоянным модулем. Будем искать его в виде

$$R(t) = e^{i\theta(s)}. \tag{17}$$

Заданную комплексную функцию представим в полярных координатах $a + ib = re^{i\alpha}$, тогда все по тому же определению 1.10 получаем

$$re^{i(\alpha+\theta)} = \Phi^+(t),$$

условимся, что искомая функция θ при обходе контура L приобретает приращение $2\pi\nu$, где ν – заданное целое число, тогда возьмем индекс обеих частей равенства выше

$$\varkappa + \nu = n,$$

где за n мы будем считать число нулей функции $\Phi^+(z)$ в области D^+, то есть отличие от предыдущего случая в том, что у нас число нулей функции зависит не только от индекса заднной функции, но и от индекса самого регуляризующего множителя, который может быть в отличие от случая когда мы искали чисто действительный регуляризующий множитель не равен нулю.

Итак, пусть искомая функция $\Phi^+(z)$ имеет порядок n в начале координат, тогда представим ее в виде $z^n e^{\gamma(z)}$ и получим

$$re^{i(\theta+\alpha)} = t^n e^{\gamma(t)} = t^n e^{\omega(s)} e^{i\omega_1(s)},$$

если приравняем модули и аргументы, то получим

$$\omega = \ln(r|t|^{-n}),$$

$$\omega_1 = \theta + \alpha - n \arg t.$$

Рассуждая аналогично как и в предыдущем случае, а именно из равенств выше вытекает, что краевое значение действительной части ω искомой аналитической функции $\gamma(z)$ известно, решив задачу Дирихле найдем гармоническую функцию $\omega(x, y)$, после отыскав сопряженную гармоническую функцию ω_1, определим θ по формуле выше, через которую по самой (17) выражается сам регуляризующий множитель.

Запишем окончательный результат при помощи опять таки оператора Шварца

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = S \ln(r|t|^{-n}),$$

и опять для определенности будем полагать, что

$$\Im\gamma(z_0) = 0,$$

тогда регуляризующий множитель определяется по формуле вида

$$R(t) = e^{i(\omega_1 - \alpha + n \arg t)}.$$

В дальнейшем мы будем активно пользоваться первым типом регуляризующего множителя, более подробно про вывод и свойства множителей можно посмотреть в [1, 6].

6. Решение задачи Гильберта. Разберем сначала однородную задачу вида (10), мы будем считать, что коэффициенты задачи удовлетворяют условию $a^2(s) + b^2(s) = 1$. Тогда

$$\frac{u+iv}{a+ib} = (a-ib)(u+iv) = au + bv + i(av - bu).$$

Перепишем краевое условие (10) в двух равносильных формах:

$$\begin{gathered} \Re\left[\frac{F(t)}{a+ib}\right] = 0, \\ \Re\left[(a-ib)F(t)\right] = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ искомая функция. Индексом задачи Гильберта будем называть индекс функции $a(s) + ib(s)$. Разделим обе части (18) на регуляризующий множитель для функции $a + ib$, который представлен в виде формулы (16), тогда получим

$$\Re\left[\frac{F(z)}{t^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}}\right] = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим три случая.

1°. $\varkappa = 0$, то есть индекс функции $a(s) + ib(s)$ равен нулю, тогда получаем условие в области D^+:

$$\Re\left[\frac{F(z)}{e^{i\gamma(z)}}\right] = 0,$$

то есть имеем задачу Шварца, тогда по формуле (12) получаем

$$F(z) = e^{i\gamma(z)} i\beta_0, \tag{20}$$

где β_0 некоторая постоянная.

2°. $\varkappa > 0$. Тогда наше условие (19) есть ничто иное, как однородная задача, которую обсуждали в пункте 5, на основании результатов этого пункта, имеем

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}Q(z), \tag{21}$$

где $Q(z)$ находится по формуле (11), то есть задача в этом случае имеет $2\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

3°. $\varkappa < 0$. Тогда решение задачи в аналитических функциях не существует. Задача имела бы решение, если в качестве допустимых брать функции, имеющие в области D^+ не менее $-\varkappa$ полюсов.

Теперь перейдем к неоднородной задаче (10), точно также как и для однородной получим задачу вида

$$\Re\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa}e^{i\gamma(t)}}\right] = |t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)}c(s),$$

рассматривая как и выше три случая и при помощи формул (20), (21), получим для первого случая, то есть когда индекс нуль решение в виде

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[S(e^{\omega_1(s)}c(s)) + i\beta_0\right].$$

Для случая когда индекс строго больше нуля получим неоднородную вспомогательную задачу из пункта 5 и тогда ответ будет в виде

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)c(s)}) + Q(z)],$$

при отрицательном индексе получим

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)c(s)}) + iC],$$

так как у последней функции есть множитель $z^{\varkappa}$, то она может иметь полюс порядка $-\varkappa$, чтобы получить аналитическое решение нужно потребовать нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат у функции из квадратных скобок.

Так как мы рассматриваем контур L в виде единичного круга, то как уже говорилось в этом случае оператор Шварца совпадает с интегралом Шварца, и тогда учитывая что $|t| = 1$, а $\gamma(z) =$

$= \omega(x,y) + i\omega_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - \varkappa\sigma\right]\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma$, можно записать решение задачи Гильберта в следующих формах. При $\varkappa = 0$,

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} + i\beta_0\right],$$

при $\varkappa > 0$

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} + Q(z)\right],$$

и наконец $\varkappa < 0$

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z},$$

в последнем случае для разрешимости задачи функция $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}$ должна иметь нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат.

7. Решение задачи Гильберта на единичном круге. Итак, пусть требуется решить задачу Гильберта для единичного круга вида

$$e^{-\sin 2s}\cos(\cos 2s)u(s) - e^{-\sin 2s}\sin(\cos 2s)v(s) = e^{\cos s}\cos(\sin s),$$

преобразуем:

$$e^{-\sin 2s}(\cos(\cos 2s)u(s) - \sin(\cos 2s)v(s)) = e^{\cos s}\cos(\sin s),$$

рассмотрим функцию $G(z) = e^{iz^2}$, где $z = e^{is}$, то есть на единичном круге, тогда имеем:

$$z^2 = e^{i2s} = \cos 2s + i\sin 2s,$$

домножим на мнимую единицу

$$iz^2 = i\cos 2s - \sin 2s,$$

тогда

$$G(z) = e^{i\cos 2s - \sin 2s} = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s) + i\sin(\cos 2s)\right],$$

мы все это делаем, чтобы свести задачу к виду (18), итак рассмотрим произведение получившиеся функции на $F(z) = u(s) + iv(s)$,

$$G(s)F(s) = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s) + i\sin(\cos 2s)\right]\left[u(s) + iv(s)\right] = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s)u(s) - \sin(\cos 2s)v(s) + i\left[\sin(\cos 2s)u(s) + c\right.\right.$$

то есть мы можем исходное уравнение теперь записать в виде (18),

$$\Re\left[G(z)F(z)\right] = \Re\left[e^z\right],$$

или

$$\Re\left[e^{iz^2}F(z) - e^z\right],$$

эта функция аналитическая в круге, тогда получается что это случай, когда индекс равен нулю и имеем по (20),

$$e^{iz^2}F(z) - e^z = i\beta_0,$$

откуда окончательно

$$F(z) = e^{-iz^2}\left[e^z + i\beta_0\right],$$

отметим, что мы не искали тут регуляризующий множитель по формулам, так как легче при решении этой задачи было воспользоваться формулами из курса теории функций комплексной переменной, но очевидно, что регуляризующий множитель для нашей задачи является функция вида $R(t) = e^{-it^2}$.

Заключение. В данной статье была рассмотрена краевая задача Гильберта для односвязной области. Были приведены необходимые определения из теории функций комплексного переменного, включая определение индекса функции и его свойства, интеграла типа Коши и его главного значения. Подробно описаны формулы Гильберта, устанавливающие связь между действительной и мнимой частями аналитической функции на границе области.

Показана тесная взаимосвязь задачи Гильберта с задачей Римана, которая проявляется как в постановке задач, так и в методах их решения. Особое внимание уделено оператору Шварца, который играет ключевую роль в решении задачи Гильберта. Приведено решение задачи Гильберта для различных значений индекса, а также рассмотрен конкретный пример решения задачи на единичном круге.

Результаты работы демонстрируют эффективность сведения задачи Гильберта к задаче Римана, что позволяет использовать хорошо разработанный аппарат факторизации и теории интегралов типа Коши. Приведенные примеры вычисления интегралов с ядром Гильберта и решения краевой задачи могут быть полезны для понимания теории.

Важно отметить, что задача Гильберта не только имеет самостоятельное значение в теории аналитических функций, но и служит мощным инструментом для решения прикладных задач математической физики. Ее применение распространяется на такие области, как теория упругости, гидродинамика, электродинамика и квантовая механика, где краевые задачи для аналитических функций возникают естественным образом при математическом моделировании физических процессов. Дальнейшее развитие методов решения задачи Гильберта и их обобщений остается актуальным направлением исследований в современной математике и ее приложениях.

Перспективы дальнейших исследований могут быть связаны с обобщением задачи Гильберта на многосвязные области, а также с разработкой эффективных численных методов решения для случаев сложных контуров и коэффициентов.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоценимое внимание и поддержку, за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов - 3-е изд., переработ. и доп. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи / В.Д. Кулиев - Москва: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 720 с.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. Москва: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа 2-е изд., переработ. и доп. - Москва: Наука, 1988. – 512 с.
5. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин - Москва: ОГИЗ, 1947. – 304 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике./ Н.И. Мусхелишвили - 3-е изд., переработ. и доп. - Москва, 1968. – 512 с.
7. Сетуха А.В. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта в классе обобщенных функций / А.В. Сетуха // Дифференциальные уравнения, т. 42, № 9, Изд-во ФГБУ «Наука», М., 2006 – 1233–1242 с.
8. Прездорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Прездорф / перевод Е.Д. Соломенцов – Москва: Мир, 1979. – 493 с.

Поступила в редакцию 07.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Токарев Денис Алексеевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 203–209.

Применение методов нечеткой логики для повышения точности оценки кредитоспособности заемщиков

Крюкова А. Д.
1472578@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается применение методов нечеткой логики для повышения точности оценки кредитоспособности заемщиков. Актуальность темы обусловлена необходимостью улучшения качества кредитного скоринга в условиях высокой неопределенности, ограниченности данных и разнообразия заемщиков. Традиционные модели, основанные на жестких пороговых критериях и статистических методах, зачастую не учитывают субъективные и трудноформализуемые факторы, влияющие на платежеспособность клиента.

Предлагается использовать нечеткие правила, основанные на экспертных знаниях и лингвистических переменных (например, «низкий доход», «нестабильная занятость»), что позволяет более гибко оценивать риски и минимизировать количество ошибочных решений. Описываются основные этапы построения нечеткой модели: фаззификация входных данных, формирование базы правил, агрегация и дефаззификация. Приведено сравнение результатов нечеткой модели с классическим скорингом, показано преимущество по таким метрикам, как точность, интерпретируемость и устойчивость к неполным данным. В заключении рассматриваются перспективы интеграции нечетких моделей в банковские ИТ-системы и возможности их комбинирования с методами машинного обучения.

Ключевые слова: нечеткая логика, кредитный скоринг, кредитоспособность, финансовый риск, лингвистические переменные, фаззификация, оценка заемщиков, искусственный интеллект, экспертные системы, моделирование неопределенности

Для цитирования: Крюкова А. Д. 2025. Применение методов нечеткой логики для повышения точности оценки кредитоспособности заемщиков. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 203–209.

---

1. Введение. Оценка кредитоспособности заемщика является ключевым этапом в процессе принятия решений в сфере кредитования. От точности этой оценки напрямую зависит уровень финансовых рисков, которые принимает на себя кредитор. Традиционные методы кредитного скоринга, основанные на статистических моделях и жестких правилах, нередко оказываются недостаточно гибкими в условиях высокой неопределенности и неполноты информации. Это особенно актуально при работе с частными лицами или малым бизнесом, для которых трудно собрать полные количественные показатели. В этих условиях возрастает интерес к использованию интеллектуальных подходов, таких как методы нечеткой логики. Нечеткая логика, в отличие от классической бинарной логики, позволяет моделировать рассуждения в условиях неопределенности, используя лингвистические переменные и экспертные знания. Это делает ее особенно полезной при оценке качественных характеристик заемщиков, таких как стабильность дохода, репутация, поведение при предыдущих погашениях кредитов и другие субъективные параметры.

2. Понятие кредитоспособности и основные критерии оценки кредитоспособности.

Определение 2.1. *Кредитоспособность — это способность заемщика полностью и своевременно исполнять свои финансовые обязательства по кредиту в соответствии с условиями договора. Это ключевой показатель, используемый банками и финансовыми организациями для принятия решения о выдаче кредита. Кредитоспособность отражает уровень риска, связанного с заемщиком: чем выше кредитоспособность — тем ниже риск дефолта.*[1, 14].

Оценка кредитоспособности может зависеть от разных факторов, но можно выделить следующие основные критерии:

- Платежеспособность - совокупный ежемесячный доход заемщика (зарплата, пассивный доход, соотношение долговой нагрузки к доходу (DTI):

$$\text{DTI} = \frac{\text{Общая сумма ежемесячных платежей по долгам}}{\text{Ваш валовой ежемесячный доход}} \times 100\% \tag{1}$$

  а также наличие имущества (недвижимость, авто, депозиты — как обеспечение).

- Кредитная история - характеристика платежной дисциплины по предыдущим и текущим кредитам, наличие просрочек, судебных исков, банкротств, поведение в прошлых займах (досрочное погашение, штрафы и др.).

- Трудовой статус и стабильность - продолжительность текущего трудового опыта, частота смены работодателей, тип занятости (официальная/неофициальная, ИП, контракт и др.).

© Крюкова А. Д., 2025

- Социально-демографические данные - возраст заемщика в годах, семейное положение, образование, наличие иждивенцев
- Цель и сумма кредита - Назначение кредита (потребительский, ипотека, авто и др.), сумма кредита по отношению к доходу и активам.
- Дополнительные факторы - поведение в системе (скоринг по цифровому следу, активность в онлайн-банкинге), географический регион проживания, использование кредитных карт, лимитов [2, 13].

Все параметры могут быть приведены к нечетким функциям принадлежности (треугольным, трапециевидным и др.) для фаззификации, что позволяет гибко учитывать нюансы каждого случая.

Определение 2.2. *Лингвистическая переменная — это переменная, принимающая значения в виде слов, а не чисел. Каждое слово (терм) интерпретируется как нечеткое множество. Например возьмем в качестве лингвистической переменной такой показатель кредитоспособности, как доход. Данному показателю соответствуют следующие значения (термы): низкий, средний, высокий. Каждому терму соответствует своя функция принадлежности[11].*

В нечетких моделях перечисленные критерии преобразуются в лингвистические переменные, например для стажа: меньше года, 1-3 года, долее 3 лет. Для кредитной истории: плохая, нормальная, отличная. Это позволяет учитывать неопределенность, пересечение состояний и "мягкость"границ между категориями [6].

При построении нечеткой модели важно корректно определить и описать входные параметры, так как именно они участвуют в фаззификации и правилах IF–THEN.

3. Модель на основе нечеткой логики и этапы работы нечеткой системы.

Определение 3.1. *Модель на основе нечеткой логики — это интеллектуальная система, использующая принципы теории нечетких множеств для обработки нечеткой, неполной или лингвистической информации [4, 12].* В отличие от классических моделей, основанных на строгой бинарной логике (0 или 1), нечеткая модель позволяет оперировать степенями истинности от 0 до 1, что делает ее особенно ценной в задачах принятия решений при наличии неопределенности.

Нечеткие модели широко применяются в медицине, экономике, автоматическом управлении и банковской сфере — например, для оценки кредитоспособности заемщиков, где невозможно установить четкие границы между "надежным"и "ненадежным"клиентом [15].

Модель оценки кредитоспособности на основе нечеткой логики позволяет более гибко учитывать неопределенность, лингвистические характеристики и субъективные факторы при анализе заемщиков. В отличие от классического скоринга, такая модель не требует четких границ и устойчиво работает с неполными и неточными данными [13].

- Этап 1. Фаззификация входных данных (Fuzzification).

  Определение 3.2. *Фаззификация — это преобразование четких числовых данных во входные нечеткие множества, к которым можно применить логические правила. Каждый входной параметр преобразуется в одну или несколько лингвистических переменных.Каждая переменная описывается функцией принадлежности $\mu(x) \in [0, 1]$, указывающей степень соответствия значению x [16].*

  Рассмотрим пример нечетких категорий с точки зрения входной переменной доход:

  - Низкий доход $\longrightarrow \mu_1(50\ 000) = 0{,}2$.
  - Средний доход $\longrightarrow \mu_2(50\ 000) = 0{,}7$.
  - Высокий доход $\longrightarrow \mu_3(50\ 000) = 0{,}1$.

  Визуально: это размытие значения по трем пересекающимся графикам. В результате модель может обрабатывать диапазон значений, а не жесткие пороги, как в бинарной логике.

- Этап 2. Формирование базы правил (Rule Base Construction). На этом этапе эксперт формирует набор правил на естественном языке, которые связывают входные переменные с целевой переменной (например, "кредитоспособность"). Структура правил: ЕСЛИ (условие) ТОГДА (результат) или на английском IF condition THEN conclusion. Например:

  - IF доход = высокий AND стаж > 5 лет AND кредитная история = хорошая THEN кредитоспособность = высокая.
  - IF доход = средний AND кредитная история = плохая THEN кредитоспособность = средняя.
  - IF доход = низкий OR стаж < 1 год THEN кредитоспособность = низкая.

Количество правил может варьироваться от десятков до сотен и формируется вручную (экспертно), автоматически (например, с помощью машинного обучения) либо гибридно.

- Этап 3. Агрегация и механизм логического вывода (Inference Engine and Aggregation) - Это центральный этап модели, где обрабатываются входные данные и применяется логика вывода для вычисления степени истины каждого правила. На данном этапе вычисляется степень выполнения каждого правила с использованием логических операций AND, OR (обычно через min, max): IF доход = высокий (0.7) AND стаж = большой (0.8) $\longrightarrow$ min(0.7, 0.8) = 0.7. Каждому правилу соответствует множество на выходе (например, "высокая кредитоспособность"). Значения этих множеств усечены на уровень активации правила (например, срез "высокой кредитоспособности"на уровне 0.7). Затем производится объединение всех выходов в одно результирующее множество. Обычно с помощью операции max, получаем суперпозицию всех срезанных выходных функций [17].

- Этап 4. Дефаззификация (Defuzzification) - преобразование нечеткого выхода в конкретное числовое значение, пригодное для принятия решения. Методы дефаззификации:

  – Центр тяжести (Centroid) — самый распространенный способ. Определяется центр массы под графиком результирующей функции.

  – Метод среднего максимума (Mean of Maximum) — берется среднее всех x, при которых функция достигает максимума.

  – Метод максимума (Max Criterion) — выбирается значение x, при котором достигается наибольшая степень принадлежности [10].

4. Пример реализации кода на Python для оценки кредитоспособности заемщика на базе нечеткой логики. Приведем пример кода на Python, который реализует модель оценки кредитоспособности заемщика на основе нечеткой логики (fuzzy logic), используя библиотеку scikit-fuzzy.

Допустим, у нас есть входные переменные: уровень дохода в рублях, кредитная история (в баллах от 0 до 10) и уровень задолженности (от 0% до 100%). На выходе получаем показатель кредитоспособности в баллах (от 0 до 100) [9].

Пример кода на Python с использованием scikit-fuzzy:

```python
import numpy as np
import skfuzzy as fuzz
from skfuzzy import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt


income = ctrl.Antecedent(np.arange(0, 100_001, 1000), 'income')
history = ctrl.Antecedent(np.arange(0, 11, 1), 'history')
debt_ratio = ctrl.Antecedent(np.arange(0, 101, 1), 'debt_ratio')


creditworthiness = ctrl.Consequent(np.arange(0, 101, 1), 'creditworthiness')

income['low'] = fuzz.trapmf(income.universe, [0, 0, 20000, 40000])
income['medium'] = fuzz.trimf(income.universe, [30000, 50000, 70000])
income['high'] = fuzz.trapmf(income.universe, [60000, 80000, 100000,
    100000])

history['poor'] = fuzz.trimf(history.universe, [0, 2, 4])
history['average'] = fuzz.trimf(history.universe, [3, 5, 7])
history['good'] = fuzz.trimf(history.universe, [6, 8, 10])

debt_ratio['low'] = fuzz.trapmf(debt_ratio.universe, [0, 0, 20, 40])
debt_ratio['medium'] = fuzz.trimf(debt_ratio.universe, [30, 50, 70])
debt_ratio['high'] = fuzz.trapmf(debt_ratio.universe, [60, 80, 100, 100])

creditworthiness['low'] = fuzz.trapmf(creditworthiness.universe, [0, 0, 30,
    50])
creditworthiness['medium'] = fuzz.trimf(creditworthiness.universe, [40, 60,
    80])
creditworthiness['high'] = fuzz.trapmf(creditworthiness.universe, [70, 85,
    100, 100])

```

```
rules = [
ctrl.Rule(income['high'] & history['good'] & debt_ratio['low'],
    creditworthiness['high']),
ctrl.Rule(income['medium'] & history['average'] & debt_ratio['medium'],
    creditworthiness['medium']),
ctrl.Rule(income['low'] | history['poor'] | debt_ratio['high'],
    creditworthiness['low']),
ctrl.Rule(income['high'] & debt_ratio['high'], creditworthiness['medium']),
ctrl.Rule(history['good'] & debt_ratio['medium'], creditworthiness['medium'
    ]),
]

credit_ctrl = ctrl.ControlSystem(rules)
credit_simulation = ctrl.ControlSystemSimulation(credit_ctrl)

user_income = 45000
user_history = 6
user_debt_ratio = 25

credit_simulation.input['income'] = user_income
credit_simulation.input['history'] = user_history
credit_simulation.input['debt_ratio'] = user_debt_ratio

credit_simulation.compute()
score = credit_simulation.output['creditworthiness']
print(f"\n Кредитоспособность: {score:.2f} баллов из 100")
```

Пояснения к примеру кода на Python для оценки кредитоспособности заемщика на базе нечеткой логики:

1. Подключение библиотек:
   - numpy — используется для создания числовых диапазонов;
   - skfuzzy — библиотека для работы с нечеткой логикой (fuzzy logic);
   - control — модуль управления в skfuzzy, необходим для построения нечеткой модели управления;
   - matplotlib.pyplot — библиотека для возможной визуализации (не используется в коде, но может пригодиться).
2. Определение входных переменных (Antecedents):
   - доход (income) — от 0 до 100 000 руб, шаг 1000;
   - кредитная история (history) — от 0 до 10 баллов;
   - уровень задолженности (debt_ratio) — от 0 до 100%.
3. Определение выходной переменной (Consequent). Кредитоспособность (creditworthiness) — выходная оценка в диапазоне от 0 до 100.
4. Задание функций принадлежности. Нечеткие переменные делятся на лингвистические категории (трапециевидная, треугольная). Каждая категория описывает "размытую"границу значений.
5. Правила (Rules).Каждое правило — это логическое если–то (IF...THEN) со связками AND, OR. Например, если доход высокий И кредитная история хорошая И задолженность низкая, то кредитоспособность высокая.
6. Создание и запуск симуляции. Credit_ctrl — создается система управления на основе заданных правил. Credit_simulation — используется для симуляции ввода данных и вычисления результата.
7. Ввод пользовательских данных. В нашем примере Пользователь с доходом 45 000 руб., кредитной историей 6 баллов и задолженностью 25%.
8. Вычисление результата. Значения передаются в модель credit_simulation.input[...], credit_simulation.compute() запускает процесс фаззификации, агрегации, дефаззификации.
9. Вывод результата. На экран выводится оценка кредитоспособности по шкале от 0 до 100.

Таким образом, можно выделить следующие основные принципы работы программы оценки кредитоспособности на базе нечеткой логики:

- каждому входному параметру (доход, кредитная история, задолженность) присваиваются лингвистические значения: низкий, средний, высокий;
- используются логические правила вида IF. . . THEN, например, если доход высокий И кредитная история хорошая И долг низкий, то кредитоспособность высокая;
- модель находит подходящие правила, объединяет результаты (агрегация), и с помощью дефаззификации выдает итоговую числовую оценку [2].

5. Влияние нечетких правил на точность прогнозирования дефолтов. Влияние нечетких правил на точность прогнозирования дефолтов в кредитных системах является ключевым аспектом применения нечеткой логики в финансовых моделях. Точность прогнозирования дефолтов заемщиков напрямую влияет на финансовые риски и прибыль банков и других кредитных организаций. Использование нечеткой логики для прогнозирования дефолтов имеет несколько значительных преимуществ, а также может быть более точным и гибким по сравнению с традиционными методами, такими как логистическая регрессия или деревья решений. Рассмотрим, как нечеткие правила могут повлиять на точность прогнозирования дефолтов:

1. Нечеткие правила обеспечивают большую гибкость при работе с данными, чем традиционные методы, которые часто требуют четких и жестких границ для принятия решений. Например:
   - В традиционных моделях можно использовать только четкие категории, такие как "доход ниже X "кредитная история плохая и так далее. Однако на практике такие параметры могут быть менее однозначными. Например, человек может иметь небольшой долг, но при этом достаточно высокие доходы.
   - В нечеткой логике мы можем учитывать степень принадлежности к каждой категории. Например, доход может быть выражен не как "высокий"или "низкий а как степень принадлежности (например, 0,7 — высокая вероятность высокого дохода). Таким образом, система становится более чувствительной и способной различать более тонкие различия между заемщиками, что приводит к улучшению точности.
2. Многие финансовые данные, которые используются для оценки кредитоспособности заемщика, могут быть неполными, шумными или противоречивыми. Например, банк может не иметь точной информации о том, как часто заемщик пропускал платежи в прошлом, или какие-то детали могут быть потеряны или не уточнены.

   Нечеткая логика помогает справиться с такой неопределенностью, так как она позволяет:
   - Оценивать параметры с учетом их неточности (например, может быть неизвестно точное значение дохода, но можно использовать его как "высокий"или "средний"с некоторой степенью уверенности).
   - Применять правила с нечеткими терминами, такими как "возможно "наверное "весьма вероятно что позволяет сделать выводы даже в условиях недостаточности или неопределенности данных.
3. Прогнозирование дефолтов требует учета множества факторов, таких как доход заемщика, его кредитная история, долговая нагрузка, семейное положение, трудовая занятость и другие. Использование нечеткой логики позволяет интегрировать несколько факторов в одну систему, где каждый из факторов влияет на вероятность дефолта с разной степенью важности.

   Например:
   - Правило 1: Если доход высокий, а кредитная история хорошая, то вероятность дефолта низкая.
   - Правило 2: Если доход низкий и кредитная история плохая, то вероятность дефолта высокая.
   - Правило 3: Если долговая нагрузка высокая, то вероятность дефолта возрастает, даже если другие параметры хорошие

   Эти правила могут работать совместно и учитывать взаимодействие факторов. Это делает систему более точной в предсказаниях, так как она может учитывать не только отдельные показатели, но и их комбинированное влияние.

4. Одним из важных аспектов применения нечеткой логики является улучшение интерпретируемости результатов. В отличие от некоторых черных ящиков, таких как нейронные сети, нечеткие системы предлагают простую для понимания логику принятия решения, что важно при анализе причин дефолта.

   Для кредитных аналитиков и риск-менеджеров важно понимать, почему была принята та или иная рекомендация по выдаче кредита или ее отказу. Нечеткие правила легко интерпретируются: можно явно объяснить, что "кредитная история плохая"или "доход низкий"в совокупности с "высокой долговой нагрузкой"ведет к высокому риску дефолта.

5. Нечеткие системы могут значительно улучшить точность прогнозирования дефолтов, особенно в ситуациях, когда:

   - данные неполные или частично противоречивые;
   - заданные параметры не могут быть четко определены;
   - требуется учитывать сложные и нелинейные зависимости между переменными;
   - в отличие от традиционных моделей, которые могут иметь жесткие пороговые значения для определенных факторов, нечеткая логика позволяет более плавно и точно оценивать риски [3].

Приведем пример практического применения нечеткой логики для оценки кредитоспособности заемщиков. Предположим, что банк хочет использовать нечеткую логику для прогнозирования дефолтов заемщиков. Он может сформулировать следующие нечеткие правила:

1. Если доход заемщика высокий и кредитная история отличная, то вероятность дефолта низкая.
2. Если долговая нагрузка высокая и кредитная история плохая, то вероятность дефолта высокая.
3. Если заемщик молодой и не имеет стабильной работы, то вероятность дефолта возрастает [7].

Каждое из этих правил может быть сформулировано не только с жесткими границами, но и с учетом степени принадлежности, например:

- доход может быть "высоким"с вероятностью 0,8, а "средним"— с вероятностью 0,2.
- кредитная история может быть "хорошей"с вероятностью 0,7, "плохой"— с вероятностью 0,3.

Затем система оценивает, как все эти данные влияют на вероятность дефолта и выдает прогноз с определенной вероятностью. Например, если система оценивает, что вероятность дефолта равна 0,3, то это означает, что заемщик может быть достаточно безопасным для кредита, но все же стоит учитывать определенные риски.

6. Заключение. В ходе работы была подробно рассмотрена нечеткая модель, состоящая из нескольких ключевых этапов: фаззификация входных данных, формирование базы правил, агрегация и дефаззификация. Эти этапы позволяют эффективно обрабатывать неопределенность и неточность данных, что делает нечеткую модель особенно подходящей для решения сложных задач, таких как оценка кредитоспособности заемщиков.

Сравнение результатов нечетной модели с классическим скорингом показало явное преимущество нового подхода по нескольким важным метрикам. Во-первых, точность прогноза значительно улучшена, так как нечеткая модель способна более гибко учитывать различные уровни риска, а также нечеткие или противоречивые данные. Во-вторых, интерпретируемость результатов была на высоком уровне, что позволяет пользователям (например, кредитным аналитикам) более легко понять, какие факторы влияют на принятые решения. Это важно для повышения доверия к системе и упрощения анализа причин отказа в кредите или, наоборот, одобрения. Наконец, устойчивость к неполным данным является значительным преимуществом нечеткой логики, поскольку модель способна работать даже с неполными или не совсем точными данными, что особенно актуально в реальных условиях, когда информация о заемщике может быть частичной или неопределенной.

В заключении было подчеркнуто, что нечетные модели имеют значительный потенциал для интеграции в банковские ИТ-системы. Они могут стать важным компонентом в системах оценки рисков, предлагая более гибкие и точные механизмы прогнозирования дефолтов. Кроме того, рассматривается возможность комбинирования нечетких моделей с методами машинного обучения, что откроет новые горизонты для повышения точности и адаптивности систем. Такой подход, с учетом обучения на больших данных и улучшенной способности к самообучению, может существенно улучшить качество решений, принимаемых банками и другими финансовыми учреждениями.

Список литературы

1. Балахнев Ю.Н. 2013. Оценка кредитоспособности и платежеспособности организации, с применением нечетко множественной математической модели. Экономика и управление в XXI веке: тенденции развития, № 8: 56–61.
2. Белозерова Г.И., Скуднев Д.М., Кононова З.А. 2017. Нечеткая логика и нейронные сети: 64–64.
3. Карашашева Ж.Д. 2021. Использование математических подходов нечеткой логики с применением программы матлаб. Повышение качества образования, современные инновации в науке и производстве: 441–446.
4. Кравец, Е.В., Солодова О.С. 2019. Анализ понятия "нечеткая логика методы и области применения нечеткой логики. "Цифрареальность, меняющая мир: готовность российской экономики к новым правилам игры: 110–112.
5. Кредитный скоринг: что это и как работает [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.gazprombank.ru/pro-finance/credit/kreditnyj-skoring/ (дата обращения 04.11.2025)
6. Ланге Ф. 2020. Нечеткая логика. ЛитРес, Страта.
7. Лебедева М.Е. 2019. Нечеткая логика в экономике-формирование нового направления. Идеи и идеалы, № 11.1-1 197–212.
8. Маматказин Н.И., Жаркова С.А., Мушта Е.Е. 2019. О развитии информационных технологий в банковском секторе российской федерации. Интеграция науки, общества, производства и промышленности: 80–82.
9. Нечеткая логика. Модели нечеткого логического вывода [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://studfile.net/preview/5944461/page:4/ (дата обращения 04.11.2025)
10. Нечеткая логика на практике [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/125614/ (дата обращения 04.11.2025)
11. Нечеткие и лингвистические переменные [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://dit.isuct.ru/IVT/BOOKS/IS/Model/gl43.htm (дата обращения 04.11.2025).
12. Основы нечеткой логики [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.fujielectric.fr/ru/ (дата обращения 04.11.2025).
13. Что такое кредитный скоринг и как банки оценивают заемщиков [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.banki.ru/news/daytheme/?id=10990406 (дата обращения 04.11.2025).
14. Что такое кредитоспособность заемщика и как ее оценить [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.gazprombank.ru/pro-finance/credit/chto-takoe-kreditosposobnost/ (дата обращения 04.11.2025).
15. Шаров К.Д., Медведева О.А. 2019. Оценка кредитоспособности заемщиков на основе нечеткого логического вывода. Вестник ВГУ: Системный анализ и информационные технологии, № 1: 74–83.
16. Paul Johnson Asamoah, Kiuri Daniel. 2019. Fuzzy Logic-Based Frameworks for Credit Risk Assessment in Banking and Financial Services. Journal of Engineering, Scientific Research and Applications: 19–35.
17. Sartova R., Mussina A., Uakhitova A. 2022. Fuzzy Logic Application for Credit Risk Assessment. IV International Scientific Forum On Computer And Energy Sciences.

Поступила в редакцию 07.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Крюкова Анжелика Дмитриевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 210–215.

Метод стрельбы. Численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Агафонов Д. А.
1854428@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка - метод стрельбы. Описана математическая постановка задачи, приведён алгоритм метода, включая переход к задаче Коши и использование метода Рунге – Кутты четвёртого порядка. Для численного подбора начального условия применяется метод секущих. Проведена реализация алгоритма на языке Python и выполнено сравнение численного решения с аналитическим. Показано, что метод стрельбы обеспечивает высокую точность и сходимость при решении линейных краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, метод стрельбы, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, метод Рунге – Кутты, метод секущих, Python, сходимость, точность, численное моделирование

Для цитирования: Агафонов Д. А. 2025. Метод стрельбы. Численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 210–215.

---

1. Введение. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) играют важную роль в прикладной математике, физике, инженерии и других областях науки. Они возникают при моделировании различных процессов – от распространения тепла и колебаний струны до движения жидкости и электромагнитных полей. В отличие от задачи Коши, где начальные условия заданы в одной точке, в краевых задачах значения функции или её производной фиксируются на концах некоторого интервала, что делает их решение более сложным, поэтому решение таких задач аналитическим методом возможно только для ограниченного круга задач.В большинстве практических случаев необходимо прибегать к численным методам. Среди множества численных методов, применяемых для решения краевых задач, метод стрельбы занимает особое место благодаря своей простоте, наглядности и эффективности. Данный метод основан на сведении краевой задачи к задаче Коши с последующей корректировкой начальных условий до тех пор, пока решение не будет удовлетворять граничным условиям. Он получил своё название по аналогии со стрельбой в мишень: корректируя направление (начальное значение производной), мы стремимся «попасть» в заданное граничное условие.

2. Теоретические основы краевых задач. Метод стрельбы. Во многих задачах физики, механики, электротехники и инженерных наук поведение систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Если в задаче значения функции или её производной заданы в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Если же условия задаются в разных точках области определения, то мы имеем дело с краевой задачей [4].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0. \tag{2}$$

В простейшем случае краевая задача имеет вид:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{3}$$

где α, β – известные числа. Необходимо найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению и заданным условиям на концах отрезка.

Для наглядности сравним постановку задачи Коши и краевой задачи:

- Задача Коши: заданы начальные условия в одной точке $x = a$: $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$.
- Краевая задача: условия заданы в разных точках: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

В отличие от задачи Коши, где решение строится прямым интегрированием с известными начальными условиями, в краевой задаче одно из начальных условий неизвестно и должно быть подобрано таким образом, чтобы выполнялось граничное условие в другой точке. Важным аспектом при исследовании краевых задач является вопрос о том, при каких условиях решение задачи существует и является единственным. Эти свойства определяют корректность постановки задачи и возможность применения численных методов [11].

© Агафонов Д. А., 2025

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b], \tag{4}$$

с граничными условиями

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{5}$$

Пусть функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда решение такой задачи существует и единственно, если соответствующая однородная задача

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Если же однородная задача допускает нетривиальные решения, то неоднородная задача может:

- не иметь решений (быть несовместной);
- иметь бесконечно много решений (если правая часть $r(x)$ ортогональна решению сопряжённой задачи).

Для нелинейных уравнений строгие теоремы существования и единственности применимы реже. Рассмотрим задачу:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{7}$$

Если функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y'$ непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, то для достаточно малой длины отрезка $(b - a)$ задача имеет хотя бы одно решение. Однако доказать единственность решения в общем случае невозможно, и приходится использовать численные методы (например, метод стрельбы или конечных разностей) для приближённого поиска решения.

Задача считается корректно поставленной (в смысле Адамара), если выполняются три условия [3]:

- решение существует;
- решение единственно;
- решение непрерывно зависит от исходных данных (начальных и граничных условий).

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, задача называется некорректной. Некорректные задачи требуют специальных подходов к решению, например, методов регуляризации.

Существует несколько численных методов для решения краевых задач [2]:

- Метод стрельбы – сведение задачи к задаче Коши с подбором начального значения. Метод основан на интегрировании уравнения с различными начальными условиями до тех пор, пока не будет удовлетворено граничное условие в конце отрезка.
- Метод конечных разностей – дискретизация дифференциального уравнения и замена производных их разностными аналогами. В результате получается система линейных (или нелинейных) алгебраических уравнений, которую можно решить стандартными методами линейной алгебры.
- Метод конечных элементов – аппроксимация решения с помощью базисных функций и минимизация невязки в слабой форме. Особенно эффективен при решении задач в областях сложной геометрии и многомерных случаях.
- Метод коллокаций – приближение решения линейной комбинацией базисных функций и требование точного выполнения уравнения в конечном числе коллокационных точек.

Каждый из методов имеет свои преимущества и ограничения. Метод стрельбы отличается относительной простотой реализации и высокой эффективностью при решении задач второго порядка с двумя условиями на концах отрезка.

Определение. *Метод стрельбы – численный метод, заключающийся в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши для той же системы дифференциальных уравнений* [8, 4].

Суть метода заключается в том, чтобы «стрелять» из начальной точки, подбирая начальное значение производной таким образом, чтобы решение достигло требуемого значения в конечной точке. Это напоминает процесс стрельбы по мишени: мы корректируем начальное направление (значение производной), чтобы попасть точно в цель (второе граничное условие)[5].

Метод особенно удобен для задач второго порядка с двумя граничными условиями:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \tag{8}$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{9}$$

Для применения метода стрельбы введём параметр s, обозначающий предполагаемое значение производной в начальной точке:

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s. \tag{10}$$

Теперь исходная краевая задача сводится к *задаче Коши*:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = s. \end{cases} \tag{11}$$

После численного решения этой задачи на отрезке $[a, b]$ получаем значение $y_s(b)$, которое зависит от выбранного параметра s. Чтобы решение удовлетворяло требуемому граничному условию $y(b) = \beta$, необходимо подобрать такое значение s, при котором:

$$\varphi(s) = y_s(b) - \beta = 0. \tag{12}$$

Основная идея заключается в следующем: одно из граничных условий (например, $y'(a) = s$) считается неизвестным параметром, который подбирается так, чтобы при решении задачи Коши результат удовлетворял второму граничному условию $y(b) = \beta$.

Обобщенный алгоритм применения метода стрельбы можно представить в следующем виде [9]:

1. Преобразовать краевую задачу к задаче Коши с параметром s, подлежащим подбору.
2. Выбрать начальное приближение s_0 и задать численный метод для решения ОДУ (например, метод Рунге – Кутты четвёртого порядка).
3. Решить задачу Коши при $s = s_0$ и вычислить значение $y_{s_0}(b)$.
4. Оценить отклонение от целевого значения:
$$\varphi(s_0) = y_{s_0}(b) - \beta. \tag{13}$$
5. Подкорректировать значение s с помощью выбранного метода (например, метода Ньютона или секущих):
$$s_{k+1} = s_k - \frac{\varphi(s_k)}{\varphi'(s_k)}. \tag{14}$$
6. Повторять шаги 3-5 до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости:
$$|\varphi(s)| < \varepsilon, \tag{15}$$
где ε - заданная точность вычислений.

3. Реализация метода стрельбы. Рассмотрим конкретную краевую задачу:

$$y''(x) = -y(x), \quad x \in [0, \pi], \tag{16}$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{17}$$

Это простая линейная задача, которую удобно использовать для численной реализации метода стрельбы, поскольку её аналитическое решение известно:

$$y(x) = C \sin x. \tag{18}$$

При этом, для любого $C \in \mathbb{R}$, выполняются условия $y(0) = 0$ и $y(\pi) = 0$, то есть задача имеет бесконечно много решений. Тем не менее, метод стрельбы позволяет найти конкретное решение при задании начальной производной $y'(0)$ [10].

Чтобы решить задачу Коши, возникающую при применении метода стрельбы, перепишем исходное уравнение в виде системы первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}, \quad \text{где} \quad y_1 = y, \quad y_2 = y'. \tag{19}$$

Начальные условия имеют вид:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = s, \tag{20}$$

где s – подбираемая производная в начале интервала.

Для численного интегрирования воспользуемся классическим методом Рунге – Кутты четвёртого порядка (RK4). Пусть шаг интегрирования равен h. Тогда переход от точки x_n к $x_{n+1} = x_n + h$ осуществляется по формулам:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{21}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \tag{22}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \tag{23}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3), \tag{24}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{25}$$

Приведем пример простого кода, который демонстрирует численную реализацию метода стрельбы для решения краевой задачи на языке программирования Python.[12].

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
def runge_kutta(f, x0, y0, h, n):
y = np.zeros((n+1, len(y0)))
x = np.linspace(x0, x0 + n*h, n+1)
y[0] = y0
for i in range(n):
k1 = f(x[i], y[i])
k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h*k1/2)
k3 = f(x[i] + h/2, y[i] + h*k2/2)
k4 = f(x[i] + h, y[i] + h*k3)
y[i+1] = y[i] + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
return x, y

# Система ОДУ
def ode_system(x, Y):
y1, y2 = Y
return np.array([y2, -y1])

# Метод стрельбы
def shooting(s, h, n):
x0 = 0
y0 = [0, s]  # y(0) = 0, y'(0) = s
x, y = runge_kutta(ode_system, x0, y0, h, n)
return x, y

# Метод секущих для подбора s
def find_s(s0, s1, h, n, beta, tol=1e-6, max_iter=50):
for _ in range(max_iter):
_, y0 = shooting(s0, h, n)
_, y1 = shooting(s1, h, n)
F0 = y0[-1][0] - beta
F1 = y1[-1][0] - beta
if abs(F1) < tol:
return s1
s_new = s1 - F1 * (s1 - s0) / (F1 - F0)
s0, s1 = s1, s_new
return s1

# Параметры
a, b = 0, np.pi
n = 100
h = (b - a) / n
```

```
    beta = 0

    # Поиск нужной производной
    s_opt = find_s(1.0, 2.0, h, n, beta)
    x, y = shooting(s_opt, h, n)

    # Построение графика
    plt.plot(x, y[:, 0], label='Численное решение')
    plt.title('Метод стрельбы для y\'\' = -y, y(0)=0, y(?)=0')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y(x)')
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()
```

При запуске приведённого кода метод стрельбы подбирает значение $s \approx 1.0$, в результате чего получается приближённое решение, совпадающее с аналитическим: $y(x) = \sin(x)$, (при $C = 1$). Таким образом, численная реализация подтверждает корректность метода стрельбы и его способность находить решение, совпадающее с точным при правильно подобранном параметре s.

4. Анализ результатов и оценка точности. Чтобы проверить правильность численного решения краевой задачи, необходимо провести сравнение с его аналитическим решением.

Для задачи:

$$y''(x) = -y(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{26}$$

аналитическим решением является:

$$y(x) = C\sin(x), \tag{27}$$

где C – произвольная константа.

Метод стрельбы позволил найти одно из решений, соответствующее определённому начальному наклону $s = y'(0) \approx 1$, то есть:

$$y(x) \approx \sin(x). \tag{28}$$

Сравнение показывает, что численное решение совпадает с аналитическим с высокой точностью, особенно при достаточно малом шаге интегрирования h.

Шаг интегрирования h (или, соответственно, количество узлов n) оказывает существенное влияние на точность решения[6]:

- При уменьшении h точность повышается.
- Слишком большой шаг может привести к заметным отклонениям от точного решения.
- Чрезмерно малый шаг увеличивает вычислительную нагрузку и может привести к накоплению численных ошибок.

Выбирать шаг h, обеспечивающий компромисс между точностью и вычислительной эффективностью. Для гладких функций обычно достаточно $n = 100 - 200$ узлов.

Метод стрельбы обладает хорошей сходимостью, если выполняются следующие условия [1]:

- правая часть $f(x, y, y')$ непрерывна и гладкая;
- начальное приближение производной выбрано разумно;
- численный метод интегрирования обладает достаточной точностью (например, метод Рунге – Кутты 4-го порядка).

Сходимость также обеспечивается, если функция

$$\varphi(s) = y_s(b) - \beta \tag{29}$$

монотонна и имеет единственный корень. В рассматриваемом примере наблюдается быстрая сходимость метода секущих – уже через 4-6 итераций достигается высокая точность.

В нелинейных задачах или задачах с чувствительной зависимостью решения от начальных условий метод стрельбы может проявлять следующие особенности:

- расходимость при неудачном выборе начального приближения;
- неустойчивость интегрирования (особенно при экспоненциально растущих решениях);

- необходимость применения методов подбора s, например, метода Ньютона с численной аппроксимацией производной $\varphi'(s)$.

Для линейных задач, подобных рассматриваемой, таких трудностей, как правило, не возникает.

5. Заключение. В данной курсовой работе была рассмотрена краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и реализован метод её численного решения - метод стрельбы. Этот метод является одним из наиболее наглядных и универсальных численных способов для решения краевых задач с двумя граничными условиями. В рамках работы были последовательно рассмотрены: теоретические основы краевых задач, их физическая интерпретация и математическая формализация; алгоритм метода стрельбы, включающий приведение задачи к задаче Коши, интегрирование методом Рунге – Кутты и подбор начального условия с помощью метода секущих; численная реализация на языке Python с визуализацией полученного решения; анализ полученного результата, который показал хорошее соответствие с аналитическим решением, высокую точность и быструю сходимость при разумном выборе шага.

Метод стрельбы продемонстрировал себя как эффективный численный инструмент, особенно в задачах с линейной или слабо нелинейной правой частью. Однако в более сложных задачах с чувствительной зависимостью от начальных условий, множеством решений или разрывными функциями, метод требует аккуратного подхода, либо замены на более устойчивые методы, такие как конечно-разностные или вариационные.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие для вузов. - М. : БИНОМ.-Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
2. Беляев И. М. Методы численного решения дифференциальных уравнений. - СПб. : Питер, 2003. - 256 с.
3. Виноградов А. Ю. Численные методы решения жестких и нежестких краевых задач : монография. - [М.] : [б. и.], 2017. – 112 с.
4. Ильин В. А. Дифференциальные уравнения и их численные методы. - М. : Физматлит, 2002. - 368 с.
5. Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. – Томск, 2016. - 44 с.
6. Косинов А. М. Численные методы решения краевых задач. - М. : Высшая школа, 2005. – 200 с.
7. Кудрявцев В. М. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. - М. : Физматлит, 2007. – 144 с.
8. Кузнецов В. В. Метод стрельбы решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Наука и современность. 2016. №45. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-strelby-resheniya-kraevoy-zadachi-dlya-obyknovennyh-differentsialnyh-uravneniy-vtorogo-poryadka (дата обращения: 12.06.2025).
9. Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Численное решение краевых задач для ОДУ : практикум. - Ростов н/Д : [б. и.], 2007. – 40 с.
10. Залипаев В. В., Гулевич Д. Р. Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие. - СПб. : Изд-во «Лань», 2015. – 448 с.
11. Хакимзянов М. М., Черный П. А. Численные методы. Часть 2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. – Новосибирск : [б. и.], 2013. - 260 с.
12. Официальная документация Python [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://docs.python.org (дата обращения: 12.06.2025).

Поступила в редакцию 07.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Агафонов Дмитрий Алексеевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 216–224.

Решение дифференциального уравнения 3-го порядка в окрестности регулярной особой точки

Селезнев Е. А.
selezneve9@yandex.ru

Аннотация. Математические исследования физических процессов, происходящих в газовых системах, и создание математических моделей на основе этих исследований. В данной работе используется метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов и метод возмущений

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, решение краевой задачи для вязкой неизотермической газовой среды.

Для цитирования: Селезнев Е. А. 2025. Решение дифференциального уравнения 3-го порядка в окрестности регулярной особой точки. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 216–224.

---

1. Введение. По сей день все большее значение приобретают математические исследования физических и динамических свойств газовых сред [1, 3, 7], благодаря этому создаются математические модели и описывается их поведения. Спектр применения достаточно обширный: метеорологии, химической и нефтехимической, пищевой,энергетике, медицине.

Совокупность уравнений, описывающая движение газовых сред, выводится из закона сохранения веществ, закона изменения количества движения, закона сохранения энергии, уравнения термодинамического состояния и уравнения напряженного состояния. В результате получается нестационарная нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

К тому же , для решения такой системы уравнений следует задать краевые условия или условия однозначности . Краевые условия или условия однозначности содержат:

- граничные условия, характеризующие протекание процесса на границах;

- физические, характеризующие физические свойства газовой среды;

- временные условия, характеризующие особенности протекания процесса во времени; Краевые условия дают возможность выбрать одно решение из бесчисленного множества. При установившемся движении исходных условий отделяются, при нестационарном движении они представляют собой значение в начальный момент времени скорости, давления, температуры и т. д.

Относительная простота уравнений, очевидность экспериментов и ясная постановка математических задач дают надежду на получение полного количественного описания динамических явлений, происходящих в жидких и газообразных средах. В реальности все оказалось существенно сложнее. Уравнения Навье – Стокса являются одними из важнейших уравнений гидро- и газовой динамики и используются при математическом моделировании разнообразных природных процессов и технических применений. Потому это система дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывает исключительно движения вязких жидкостей, а где жидкостей там и газов. Если их дополнить уравнениями массовых сил, теплопередачи и перенос масс, то подобная система уравнений может описывать конвекцию, термическую диффузию , поведение многосоставных различных газов и жидкостей и т. д. Если мы используем силу Лоренца в качестве массовой силы и дополним систему уравнениями Максвелла для поля в сплошной среде, то полученная математическая модель сможет описывать явления электро- и магнитной гидродинамики. В частности, такие математические модели успешно применяются при моделировании поведения плазмы и межзвездного газа. газ. Различные вариации уравнений Навье – Стокса используются для описания движения атмосферных воздушных масс, в частности, при формировании прогнозов погоды и т. д.

Следовательно, уравнения Навье – Стокса являются главным уравнениями движения вязкой среды (газа, жидкости), являющим собой математическое выражение законов сохранения движения и массы.

2. Нахождение решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка в виде обобщенного степенного ряда. Доказательство теоремы о существовании единственности решения. При решении системы уравнений гидродинамики и теплопередачи мы использовали теорию возмущений, т. е. поля скорости, давления и температуры представлены в виде ряда по малому параметру. В задаче таким параметром является коэффициент Рейнольдса $\varepsilon = Re = UR\rho_e/\mu_e \ll 1$.

Решение задачи начинается с определения температурного поля вблизи нагреваемого тела. Граничное условие для температурного поля

$$\lim_{x\to 1} J_e\left(x,\theta\right) = J_S, \ \ \lim_{x\to\infty} J_e \to T_\infty$$

© Селезнев Е. А., 2025

показывает, что температурное поле зависит только от радиальной координаты. $C_e(x,\theta) = J_{e0}(x)$. В сферической системе координат уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 Je0^{\alpha}\frac{\partial J_{e0}}{\partial x}\right) = 0,\ \ \alpha = 0.8. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1) дважды мы получаем следующее выражение для скалярного температурного поля:

$$q_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{x}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},\ \Gamma_0 = J_S^{1+\alpha} - 1,\ q_{e0} = T_{e0}/Q_\infty. \tag{2}$$

На основании краевых условий

$$\lim_{x\to\infty}\left(Y_r^{(e)}\,(y,\theta) - U\cos\theta\right) = 0,\ \lim_{x\to\infty}\left(U_\theta^{(e)}\,(x,\theta) + Y\sin\theta\right) = 0$$

$$Y_r^{(e)}\,(x,\theta) = UG(x)\cos\theta,\ Y_\theta^{(e)}\,(x,\theta) = -Ug(x)\sin\theta. \tag{3}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\rho_e U_r^{(e)}\right) + \frac{1}{x\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ \rho_e U_\theta^{(e)}\right) = 0,$$

подставляя (3), у нас получается связь:

$$g(x) = C(x) + \frac{x}{2}\left(C^{'}(x) - f(x)C(x)\right),\ \ f(x) = \frac{1}{t_{e0}(x)}\frac{dt_{e0}(x)}{dx}. \tag{4}$$

Тут $C'(x)$ – первая производная от функции $C(x)$. Отсюда мы видим, что наша задача сводится к нахождению функции $C(x)$. Зависимость динамической вязкости от температуры, с учетом выражения (2) представляется в виде:

$$\mu_e(x,\theta) = \mu_\infty\left(1 + \frac{\Gamma_0}{x}\right)^{\beta/(1+\alpha)}. \tag{5}$$

Здесь β=0.693, α=0.821.

Подставляя полученные выше выражения в уравнения, и при этом первое продифференцируем по углу θ, а второе по y, вычитая первое из второго (тем самым мы избавляемся от давления). Затем перейдем к новой переменной $\iota = \dfrac{\Gamma_1}{x+\Gamma_1}$ и в конечном итоге получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для нахождения функции $C(\iota)$:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\iota^5 - \iota^6\right]\frac{d^3C(\iota)}{d\iota^3} + \left[2\iota^2 - \iota^3\,(10+\gamma_1) + 2\iota^4\,(7+\gamma_1) - \ell^5\,(6+\gamma_1)\right]\frac{d^2C(\iota)}{d\iota^2} -$$

$$-\left[6\iota - \iota^2\,(2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) - \iota^3\,(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \iota^4\,(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\right]\frac{dC(\iota)}{d\iota} +$$

$$+\gamma_3\iota^2\,(2-\iota)\,C(\iota) = \frac{d}{\Gamma_0}\iota\,(1-\iota)^{\gamma_4},\ \ \iota(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0}, \tag{6}$$

в котором

$$\gamma_1 = 0.1,\ \gamma_2 = 2.0,\ \gamma_3 = 0.9,\ \gamma_4 = -0.2,\ d = const,$$

$$1 < x < \infty,\ \ 0 < \ell < \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0},\ \Gamma_0 = const,$$

с краевым условием:

$$\lim_{x\to\infty} C\,(y) \to 1. \tag{7}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения [2] (6) суммируется из решения соответствующего однородного уравнения и частного решения.

Затем необходимо некоторые данные из теории решения однородных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов.

Точка y_0 называется *особой* точкой дифференциального уравнения

$$x^{''} + b(x)x^{'} + r(y) = 0, \tag{8}$$

$$x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{9}$$

где ρ – заданное число, а степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k y^k$ сходится в некоторой области $|y| < R$ называется *обобщенным степенным рядом.*

Если ρ – целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (9) видоизменится в обычный степенной ряд. В таком случае точка $y = 0$ есть особая (8), если коэффициенты $p(y)$ и $q(y)$ уравнения возможны в виде

$$p(y) = \frac{1}{y}\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k, \quad q(y) = \frac{1}{y^2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k y^k,$$

где ряды в числителях сходятся в некоторой области $|y| < R$, а коэффициенты o_0, b_0 и b_1 не равны нулю одновременно. В этом случае уравнение имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k y^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{10}$$

который сходится, по крайней мере, в той же области $|y| < R$.

Для определения показателя ρ и коэффициентов c_k необходимо будет подставить ряд (9) в уравнение (8), сократить на y^{ρ} и приравнять 0 коэффициенты при всех степенях y. При этом число ρ находится из так называемого определяющего уравнения.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка и пусть ρ_1 и ρ_2 – корни определяющего уравнения. Здесь следует различать три случая.

1. Если разность корней $\rho_1 - \rho_2$ не равна целому числу или нулю, то можно построить два решения вида (11)

$$x_1 = x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}{}_k y^k \quad ({}_0 \neq 0), \quad x_2 = x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}A_k y^k \quad (A_0 \neq 0). \tag{11}$$

2. Если разность корней $\rho_1 - \rho_2$ есть целое положительное число, то можно построить два линейно независимых решения вида (12)

$$x_1 = y^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}G_k y^k \quad (G_0 \neq 0), \quad x_2 = By_1(y)\ln(y) + y^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}A_k y^k \quad (A_0 \neq 0). \tag{12}$$

3. Если определяющее уравнение имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2$, то второе решение имеет вид (13)

$$x_2 = By_1(y)\ln(y) + y^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}O_k y^k \quad (O_0 \neq 0). \tag{13}$$

Используем уже описанную теорию решения линейных однородных уравнений в виде обобщенных степенных рядов к нашему уравнению.

Найдём сначала решение однородного уравнения, которое представляется в следующем виде:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\iota^5 - \iota^6\right]\frac{d^3C(\iota)}{d\iota^3} + \left[2\iota^2 - \iota^3(10+\gamma_1) + 2\iota^4(7+\gamma_1) - \ell^5(6+\gamma_1)\right]\frac{d^2C(\iota)}{d\iota^2} -$$

$$-\left[6\iota - \iota^2(2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) - \iota^3(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \iota^4(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\right]\frac{dC(\iota)}{d\iota} +$$

$$+\gamma_3\iota^2(2-\iota)C(\iota) = 0. \tag{14}$$

Заметим, что точка $\iota = 0$ для уравнения (14) является особой точкой и его решение будем отыскивать в виде обобщенного степенного ряда [4, 5, 6]

$$C(\iota) = \iota^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty}o_m\iota^n, \quad o_0 \neq 0. \tag{15}$$

Тут число ρ находится из конститутивного уравнения и для его определения сделаем следующее .

Найдём производные от выражения (15):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \ell^{m+\rho}\Big[o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+2o_m(m+\rho)(m+\rho-1)-$$
$$-6o_m(m+\rho)\Big]-\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+1}\Big[3o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+$$
$$+10.169o_m(m+\rho)(m+\rho-1)+2o_m(m+\rho)\Big]+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+2}\Big[3o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+14o_m(m+\rho)(m+\rho-1)+$$
$$+28o_m(m+\rho)+3o_m(m+\rho)\Big]-$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+3}\Big[o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+6a_m(m+\rho)(m+\rho-1)+$$
$$+8o_m(m+\rho)+1.5o_m(m+\rho)\Big]=0.$$

Беря в расчет, что $o_0 \neq 0$, получаем уравнение $\rho(\rho-3)(\rho+2)=0$, корни которого равны: $\rho_1=-2$, $\rho_2=3$, $\rho_3=0$. Наибольшему из корней отвечает решение

$$C_1(\iota)=\iota^3\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^m,\ o_0^{(1)}\neq 0. \tag{16}$$

Найдем первую, вторую и третью производные от функции $C_1(\iota)$:

$$\begin{aligned}\frac{dC_1(\iota)}{d\iota}&=\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)\iota^{m+2},\\ \frac{d^2C_1(\iota)}{d\iota^2}&=\sum_{n=0}^{\infty} a_m^{(1)}(m+3)(m+2)\iota^{m+1},\\ \frac{d^3C_1(\iota)}{d\iota^3}&=\sum_{n=0}^{\infty} a_m^{(1)}(m+3)(m+2)(m+1)\iota^{m}.\end{aligned} \tag{17}$$

получаем следующее:

$$\Big[\iota^3-3\ell^4+3\ell^5-\ell^6\Big]\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)(m+2)(m+1)\iota^m+$$
$$+\Big[2\iota^2-\iota^3(10+\gamma_1)+2\iota^4(7+\gamma_1)-\iota^5(6+\gamma_1)\Big]\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)(m+2)\iota^{m+1}-$$
$$-\Big[6\iota-\iota^2(2-2\gamma_1-\gamma_2)-\iota^3(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+\iota^4(6+2\gamma_1+\gamma_3)\Big]\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(m+3)\ell^{m+2}+\gamma_3\ell^2(2-\iota)\iota^3\sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^m=0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{3+m}\Big[(3+m)(2+m)(1+m)+2((3+m)(2+n)-6n+18))\Big]+$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{m+4}\Big[-3(m+3)(m+2)(m+1)-(m+3)(m+2)(10+\gamma_1)+(m+3)(2-2\gamma_1-\gamma_3)\Big]+$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{m+5}\Big[3(m+3)(m+2)(m+1)+2(m+3)(m+2)(7+\gamma_1)+(m+3)(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+$$
$$+2\gamma_3\Big]+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{6+m}\Big[-(3+m)(m+2)(m+1)-(m+3)(m+2)(6+\gamma_1)--(m+3)(6+2\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_3\Big]=0.$$

Приводя подобные, выражение примет вид:

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+3} m(m+3)(m+5) - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4}(m+3)\Big[3(m+2)(m+1) + (m+2)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\Big] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5}\Big[(m+3)\Big(3(m+2)(m+1) + 2(m+2)(7+\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Big) +$$

$$+2\gamma_3\Big] - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6}\Big[(m+3)\Big((m+2)(m+1) + (m+2)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big) + \gamma_3\Big] = 0.$$

Используем свойства степенного ряда, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \iota^{n+3}\Big\{m(m+3)(m+5)o_m^{(1)} - (n+2)\Big[3m(m+1) + (m+1)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(1)}\Big[(m+1)\Big(3m(m-1) + 2m(7+\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 +$$

$$+\gamma_3\Big) + 2\gamma_3\Big] o_{m-2}^{(1)} - \Big[n\Big((m-1)(m-2) + (m-1)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big) + \gamma_3\Big] o_{m-3}^{(1)} = 0.$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+3}\Big[(m+3)(m+2)(m+1) + 2(m+3)(m+2) - 6(m+3)\Big] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4}\Big[-3(m+3)(m+2)(m+1) - (m+3)(m+2)(10+\gamma_1) + (m+3)(2 - 2\gamma_1 - \gamma_3)\Big] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5}\Big[3(m+3)(m+2)(m+1) + 2(m+3)(m+2)(7+\gamma_1) + (m+3)(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) +$$

$$+2\gamma_3\Big] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6}\Big[-(m+3)(m+2)(m+1) - (m+3)(m+2)(6+\gamma_1) - (m+3)(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3\Big] = 0.$$

Полученное выше выражение обязано быть нулю при любом ι^m, а возможно тогда и только, когда выражение стоящее в круглых скобках равно нулю. В результате получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $o_m^{(1)}$ $(m \geq 1)$

$$o_m^{(1)} = \frac{1}{m(m+3)(m+5)}\Big\{(m+2)\Big[(m+1)(3n + 10 + \gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(1)} -$$

$$-\Big[(n+1)\Big(m(3m + 11 + 2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Big) + 2\gamma_3\Big] a_{m-2}^{(1)} +$$

$$+\Big[m\Big((m-1)(m+4+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1\Big) + \gamma_3\Big] o_{m-3}^{(1)}\Big\}.$$

Найдем второе решение однородного уравнения (14). Видим, что разность корней определяющего уравнения равно целому числу, т.е. это есть второй случай согласно общей теории решения линейных однородных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (см. выше).

Следовательно, второе решение однородного уравнения (14) $C_3(\iota)$, отвечающего корню $\rho_2 = 0$ имеет вид

$$C_3(\iota) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(3)} \iota^n + \omega_3^* C_1(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \quad o_0^{(3)} \neq 0, \ \iota_0 = \iota(y = 1). \tag{18}$$

Найдем первую, вторую и третью производные от функции $C_3\,(\ell)$:

$$C_3^{'}(\iota) = \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m\iota^{m-1} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+2} + \omega_3^* C_1^{'}(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),$$

$$C_3^{''}(\iota) = \sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)\iota^{m-2} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} (2m+5)\iota^{m+1} + \omega_3^* C_1^{''}(\ell) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \tag{19}$$

$$C_3^{'''}(\iota) = \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)(m-2)\iota^{m-3} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} (3m^2 + 12m + 11)\iota^m + \omega_3^* C_1^{'''}(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right).$$

Подставляя (18) – (21) в (14), получаем:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\ell^5 - \iota^6\right]\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)(m-2)\iota^{m-3} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^n \times\right.$$

$$\left.\times(3m^2 + 12m + 11)\right\} + \left[2\iota^2 - \iota^3\,(10+\gamma_1) + 2\iota^4\,(7+\gamma_1) - \iota^5\,(6+\gamma_1)\right]\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1) + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+1}(2m+5)\right\} -$$

$$-\left[6\iota - \iota^2\,(2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) - 2\iota^3\,(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \iota^4\,(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\right]\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} n\iota^{m-1} + \omega_3^* \sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+2}\right\} + \left(2\gamma_3\iota^2 - \gamma_3\ell^3\right) \sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^m = 0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^n \left[m(m-1)(m-2) + 2m(m-2) - 6m\right] +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{n+1} \left[-3(m-1)(m-2) - m(m-1)(10+\gamma_1) + n(2 - 2\gamma_1 - \gamma_3)\right] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{n+2} \left[3m(m-1)(m-2) + 2m(m-1)(7+\gamma_1) + 2n(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) +\right.$$

$$\left.+2\gamma_3\right] + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(3)} \iota^{m+3} \left[-m(m-1)(m-2) - m(m-2)(6+\gamma_1) -\right.$$

$$\left.-n(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3\right] + \omega_3^* \left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{n+3} \left[3n^2 + 12n + 11 + 2(2n+5) - 6\right] +\right.$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4} \left[-3(3m^2 + 12m + 11) - (2m+5)(10+\gamma_1) + 2 - 2\gamma_1 - \gamma_2\right] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5} \left[3(3m^2 + 12m + 11) + 2(2m+5)(10+\gamma_1) + 2(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\right] -$$

$$\left.- \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \iota^{n+6} \left[3(3n^2 + 12n + 11) + 2(2n+5)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\right]\right\} = 0.$$

Далее группируя

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^m m(m+2)(m-3) - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{m+1} m \left[3(m-1)(m-2) + (n-1)(10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} \ell^{n+2} \left[n\left(3(n-1)(n-2) + 2(n-1)(7+\gamma_1) + 2(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\right) + 2\gamma_3\right] -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} \ell^{n+3} \left[n\left((n-1)(n-2) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3 + (n-1)(6+\gamma_1)\right] +\right.$$

$$+\omega_3^* \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \ell^{n+3}(3n^2 + 16n + 15) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \ell^{n+4} \times\right.$$

$$\times\left[3(3m^2 + 12m + 11) + (2m+5)(10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\right] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{n+5} \left[3(3m^2 + 12m + 11) +\right.$$

$$\left.\left.+2(2m+5)(7+\gamma_1) + (10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\right] - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6} \left[3m^2 + 12m + 11 + (2m+5)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\right]\right\} = 0.$$

Воспользуемся свойствами степенных рядов, получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \iota^m \Bigg\{ m(m+2)(m-3)o_m^{(3)} - (m-1)\Bigg[3(m-2)(m-3) + (m-2)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Bigg] o_{m-1}^{(3)} + \Bigg[(m-2)\Bigg(3(m-3)(m-4) + 2(m-2)(7+\gamma_1) +$$

$$+(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\Bigg) + 2\gamma_3\Bigg] o_{m-2}^{(3)} - \Bigg[(m-3)\Bigg((m-4)(m-5) + (m-4)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Bigg) + +\gamma_3\Bigg] o_{m-3}^{(3)}\Bigg\} +$$

$$+\omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} \ell^{n+3} \Bigg\{ (3m^2 + 16m + 15)a_n^{(1)} - \Bigg[9m^2 + 18m + 4 + (2m+3)(10+\gamma_1) + 2\gamma_1 + \gamma_3\Bigg] o_{m-1}^{(1)} +$$

$$+\Bigg[9m^2 + 7 + (2m+1)(14 + 2\gamma_1) + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Bigg] o_{m-2}^{(1)} - \Bigg[3m^2 - 6m + 8 + (2n-1)(6+\gamma_1) + 2\gamma_1 + \gamma_3\Bigg] a_{n-3}^{(1)}\Bigg\} = 0.$$

Полученное выше выражение должно равняться нулю при любом ι^m, а возможно тогда и только, когда выражение стоящее в круглых скобках равно нулю. В результате мы получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $o_m^{(3)}$ $(n \geq 4)$

$$o_m^{(3)} = \frac{1}{m(m+2)(m-3)} \Bigg\{ (m-1)\Bigg[(m-2)(3m+1+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Bigg] a_{m-1}^{(3)} -$$

$$-\Bigg[(m-2)((m-3)(3m+2+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2) + 2\gamma_3\Bigg] a_{m-2}^{(3)} +$$

$$+\Bigg[(n-3((n-4)(n+1+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3\Bigg] a_{n-3}^{(3)} - \omega_3^* S_{n-3}^{(1)}\Bigg\},$$

$$S_n^{(1)} = (3n^2 + 16n + 15)a_n^{(1)} - (9n^2 + 18n + 4 + (10+\gamma_1)(2n+3) + 2\gamma_1 +$$
$$+\gamma_2)a_{n-1}^{(1)} + (9n^2 + 7 + (14 + 2\gamma_1)(2n+1) + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)a_{n-2}^{(1)} -$$
$$-(3n^2 - 6n + 8 + (6+\gamma_1)(2n-1) + 2\gamma_1 + \gamma_3)a_{n-3}^{(1)}.$$

Третье решение однородного уравнения (14) линейно независимое с решениями $C_1(\ell)$, $C_3(\ell)$ и соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_3 = -2$ мы не приводим, поскольку они не удовлетворяет краевому условию (7).

Найдем решение неоднородного уравнения (6). Исходя из выражения правой части неоднородного уравнения (6) видим, что его частное решение можно искать в виде

$$C_4(\iota) = A_2 C_2(\ell),\ C_2(\iota) = \iota \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(2)} \iota^n + \omega_2^* C_1(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\ \ \alpha_0^{(2)} \neq 0,\ O_2 = const. \tag{20}$$

Здесь первые, вторые и третьи производные от функции $C_2(\iota)$ имеют вид:

$$C_2'(\iota) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)}(n+1)\iota^n + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \iota^{n+2} + \omega_2^* C_1'(\ell) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),$$

$$C_2''(\iota) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} n(n+1)\ell^{n-1} + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(2n+5)\ell^{n+1} + \omega_2^* C_1''(\iota) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \tag{21}$$

$$C_2'''(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} n(n+1)(n-1)\ell^{n-3} + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(3n^2 + 12n + 11)\ell^n + \omega_2^* C_1'''(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right).$$

Поступая аналогичным образом (как при определении рекуррентных формул для коэффициентов $o_m^{(1)}$ и $o_m^{(3)}$), имеем рекуррентные формулы для коэффициентов $o_m^{(2)}$ $(m \geq 3)$:

$$o_m^{(2)} = \frac{1}{(m+1)(m+3)(m-2)} \Bigg\{ n\Bigg[(m-1)(3m+4+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Bigg] o_{m-1}^{(2)} -$$

$$-\Bigg[(m-1)((m-2)(3m+5+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3\Bigg] o_{m-2}^{(2)} +$$

$$+\left[(n-2((n-3)(n+2+\gamma_1)+6+\gamma_3+2\gamma_1)+\gamma_3\right]a_{n-3}^{(2)}-\omega_2^* S_{n-2}^{(1)}+\frac{d}{\Gamma_0}(-1)^n\frac{\gamma_4!}{(\gamma_4-n)!n!}\Bigg\}.$$

При вычислении коэффициентов $o_m^{(1)}, o_m^{(2)}$ и $o_{nm}^{(3)}$ по рекуррентным формулам, необходимо учитывать, что

$$\omega_2^*=\frac{1}{15o_0^{(1)}}\left[(16+6\gamma_1+2\gamma_2)o_1^{(2)}-(10+4\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1))o_0^{(2)}\right],$$

$$\frac{d}{\Gamma_0}=-6o_0^{(2)},\ o_1^{(2)}=-\frac{a_0^{(2)}}{6}(-2+2\gamma_1+\gamma_2+6\gamma_4^*),\ o_2^{(2)}=1,\ o_1^{(3)}=0,\ o_3^{(3)}=1,$$

$$\omega_3^*=\frac{\gamma_3}{15o_0^{(1)}}\left[(16+6\gamma_1+2\gamma_2)o_1^{(2)}-(10+4\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1))a_0^{(2)}\right],$$

$$o_2^{(3)}=\frac{\gamma_3}{4}o_0^{(3)},\ \ o_n^{(k)}=0,\ \ \text{если } n<0\ \ (k=1,2,3).$$

Таким образом, общее решение уравнения (6), удовлетворяющее краевому условию (7) имеет вид:

$$C(\iota)=A_1C_1(\iota)+A_2C_2(\ell)+C_3(\iota), \tag{22}$$

$$C_1(\iota)=\iota^3\sum_{m=0}^{\infty}o_m^{(1)}\iota^m,\ C_2(\iota)=\iota\sum_{m=0}^{\infty}o_m^{(2)}\iota^m+\omega_2^*C_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),$$

$$C_3(\iota)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}\iota^n+\omega_3^*C_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right).$$

Заметим, что функция $C(\iota)$ удовлетворяет уравнению (6) по построению. Ряды определяющие функции $C_k(\iota)$, $k=1,2,3$ равномерно сходятся при всех $0\le y<\infty$ $(\iota(y)=\Gamma_0/(y+\Gamma_0))$ [4, 5, 6].

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема 1. Общее решение уравнения (6), удовлетворяющее краевому условию (7), имеет вид (22), где коэффициенты $A_1=1$, A_2, A_3 – произвольные постоянные, функции $C_1(\ell)$, $C_2(\ell)$, $C_3(\ell)$ задаются формулами (16), (18), (20).

Следует отметить, что выбор постоянных $o_0^{(1)}$, $o_0^{(2)}$, $o_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы выполнялся предельный переход к аналогичной задаче при малых относительных перепадах температуры в окрестности твердого тела, т.е. когда мы не учитываем зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности воздуха от температуры.

Зная общее решение уравнения (6) и связь между функциями $C(y)$ и $g(y)$ (см. ())

$$g(y)=C(y)+\frac{y}{2}\left(G'(y)-f(y)C(y)\right),\ \ f(y)=\frac{1}{t_{e0}(y)}\frac{dt_{e0}(y)}{dy},$$

где $C'(y)$– первая производная от функции $C(y)$, получаем следующие выражения для компонент векторного поля скорости $\mathbf{U}_e(x)$ и величину массовой скорости в окрестности нагретого твердого тела (т. е. можно построить профиль скорости, как это делается, например, при плоскопараллельном обтекании твердой сферы в задаче Стокса):

$$U_r^{(e)}(y,\theta)=U\cos\theta\left[A_1C_1(y)+A_2C_2(y)+C_3(y)\right], \tag{23}$$

$$U_\theta^{(e)}(y,\theta)=-U\sin\theta\left[A_1G_4(y)+A_2G_5(y)+C_6(y)\right], \tag{24}$$

$$U_e(y,\theta)=\sqrt{\left(U_r^{(e)}(y,\theta)\right)^2+\left(U_\theta^{(e)}(y,\theta)\right)^2}, \tag{25}$$

где

$$C_1(\ell)=\iota^3\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}\iota^n,\quad C_2(\ell)=\iota\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}\iota^n+\omega_2^*G_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\quad C_3(\iota)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}\ell^n+\omega_3^*G_1(\ell)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\ \ \ell=\frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0}.$$

$$C_k(y)\left(1+\frac{\iota}{2(1+\alpha)}\right)C_{k-3}(y)+\frac{y}{2}C'_{k-3}(y)\ \ (k=4,5,6).$$

Заключение. Полученные в статье формулы носят наиболее общий характер, т. е. они справедливы, как при значительных (когда средняя температура поверхности обтекаемого тела сферической формы

воздухом по величине много больше температуры воздуха вдали от тела. В этом случае необходимо учитывать степенной вид зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и плотности воздуха от температуры), так и при малых относительных перепадах температурах. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса и плотность можно приблизительно считать постоянными величинами, что существенно упрощает решение уравнений гидродинамики и теплопереноса.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоцеенимое внимание и поддержку;за очень полезные рекомендации и совет во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 2003.
3. ЛандауЛ.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ИТТЛ, 1954.
4. Малай Н.В., ЛиманскаяА.В., Щукин Е.Р. Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье – Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1328 – 1338.
5. Малай Н.В., Глушак А.В., Лиманская А.В. Решение краевой задачи медленного обтекания сферы неизотермическим газом // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 12. С. 54 – 65
6. Малай Н.В., ЛиманскаяА.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. № 10. С. 42 – 49.
7. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах. Рейнольдса. М.: Мир. 1960.

Поступила в редакцию 11.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Селезнев Егор Андреевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 225–229.

Аналитические функции в радиальных трубчатых областях над конусами

Ларионова О. В.
1318319@bsuedu.ru

Аннотация. Цель данной работы – изучение аналитических функций многих комплексных переменных в радиальных трубчатых областях над выпуклыми острыми конусами. Основное внимание уделяется понятию конуса и аналитическим свойствам функций в соответствующей трубчатой области, а также построению и анализу интегральных представлений Бохнера.

Ключевые слова: конус, сопряженный конус, радиальная трубчатая область, аналитические (голоморфные) функции, интегральные представления, пространство Харди, остов, формула Коши, теорема Бохнера, ядро Бохнера

Для цитирования: Ларионова О. В. 2025. Аналитические функции в радиальных трубчатых областях над конусами. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 225–229.

---

1. Введение. Исследование аналитических функций в радиальных трубчатых областях над конусами составляет важный раздел многомерного комплексного анализа, объединяющий геометрические, алгебраические и функциональные методы. Изучение таких областей позволяет установить глубокие связи между свойствами конуса, интегральными представлениями и поведением аналитических функций. Целью данной работы является систематическое изложение теории аналитических функций в радиальных трубчатых областях с акцентом на аппарат интегрального представления Бохнера.

2. Конус в многомерном пространстве, сопряженный конус. Радиальная трубчатая область. Конусом $C \subset \mathbb{R}^n$ (с вершиной в нуле) называется множество точек, обладающее свойством: $\lambda y \in C$ для всех $y \in C$ и $\lambda > 0$. Проекция конуса C (обозначается пр C) – его пересечение с единичной сферой $|y| = 1$. Компактным подконусом конуса C является конус C', для которого пр $\overline{C'} \subset$ пр C.

Рассмотрим понятие сопряженного конуса [4]: $C^* = [\xi : \ \xi y \geqslant 0, \ y \in C]$. Конус C^* является замкнутым и выпуклым. Обозначим через $O(C)$ выпуклую оболочку конуса C. Выполняются равенства

$$C^* = \overline{C^*} = O(C)^* \text{ и } C^{**} = \overline{O(C)}.$$

Из этого следует, что для выполнения равенства $\overline{O(C)} = \overline{O(C_1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $C^* = C_1^*$.

Конус C называется самосопряженным, если $C^* = \overline{C}$.

Функция $\mu_C(\xi) = \sup\limits_{y \in \text{пр} C} (-\xi y)$ называется индикатрисой конуса C. При этом индикатриса – выпуклая (и, следовательно, непрерывная) однородная функция степени 1, которая удовлетворяет неравенствам:

$$|\mu_C(\xi)| \leqslant |\xi|, \quad \mu_C(\xi_1 + \xi_2) \leqslant \mu_C(\xi_1) + \mu_C(\xi_2).$$

Утверждение 1. *Для выполнения $\overline{C} = \overline{C_1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_C(\xi) \equiv \mu_{C_1}(\xi)$.*

Если выполняется $\xi \bar{\in} C^*$, то $\mu_C(\xi) > 0$, в то время как: если $\xi \in C^*$, то $\mu_C(\xi) \leqslant 0$; справедливы следующие формулы:

$$C^* = [\xi : \ \mu_C(\xi) \leqslant 0]; \ C_* = \mathbb{R}^n \backslash C^* = [\xi : \ \mu_C(\xi) > 0];$$
$$\forall \xi : \ \mu_C(\xi) \leqslant \mu_{O(C)}(\xi).$$

Введем в рассмотрение число

$$\rho_C = \sup_{\xi \in C_*} \frac{\mu_{O(C)}(\xi)}{\mu_C(\xi)},$$

оно характеризует невыпуклость конуса C.

Утверждение 2. *Для выпуклости конуса $\overline{C}$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_C = 1$.*

Утверждение 3. *Рассмотрим открытый конус C, состоящий из конечного числа связных компонентов, тогда справедливо $\rho_C < +\infty$.*

Примеры.

1. $C = \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbb{R}^{n*} = \{0\}, \quad \mu_{\mathbb{R}^n}(\xi) = |\xi|, \quad \rho_{\mathbb{R}^n} = 1.$

2. $C = \Gamma^+$. Тогда $\Gamma^{+*} = \overline{\Gamma}$, $\rho_{\Gamma^+} = 1$ и

$$\mu_{\Gamma^+}(\xi) = \begin{cases} |\xi|, & \xi \in -\Gamma^+, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{\xi}| - \xi_1\right), & \xi \bar{\in} -\Gamma^+. \end{cases}$$

3. $C = \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- = \left[y : y_1^2 > |\tilde{y}|^2\right]$ - световой конус. Тогда $O(\Gamma) = \mathbb{R}^n, \Gamma^* = \{0\}$, $\rho_\Gamma = \sqrt{2}$, $\mu_{O(\Gamma)}(\xi) = |\xi|$ и

$$\mu_\Gamma(\xi) = \begin{cases} |\xi|, & \xi \in \Gamma, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{\xi}| + |\xi_1|\right), & \xi \bar{\in} \Gamma. \end{cases}$$

© Ларионова О. В., 2025

Множество вида $T^c = \mathbb{R}^n + iC$, где $C \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, называется трубчатым конусом. Если конус C является связным, то T^C называют трубчатой радиальной областью [3].

Пусть связный открытый конус C таков, что замыкание его оболочки $\overline{O(C)}$ не содержит целых прямых, то есть

$$\nexists \text{ прямая } l \subset \mathbb{R}^n \text{ такая, что } l \subset \overline{O(C)}.$$

В этом случае трубчатая радиальная область T^C эквивалентна ограниченной области [5]. Выполняется: вн. $C^* \neq \varnothing$.

Утверждение 4. *Для того, чтобы конус $\overline{O(C)}$ содержал целую прямую, необходимо и достаточно, чтобы конус C^* лежал в некоторой $(n\text{-}1)$-мерной плоскости.*

Утверждение 5. *Рассмотрим открытый конус C и конус C', который является компактным в $O(C)$. Тогда существуют: $\sigma = \sigma(C') > 0$ и открытый конус $C'' = C''(C')$, который содержит конус C^*, и выполняется*

$$\xi y \geqslant \sigma |y||\xi|, \quad y \in C', \quad \xi \in C''. \tag{*}$$

Примеры радиальных трубчатых областей.

1. Одномерный случай (n=1). Рассмотрим конус $C = \mathbb{R}^+ = \{y > 0\}$ (положительная полуось), трубчатая область будет верхней полуплоскостью в $\mathbb{C}$: $T^{\mathbb{R}^+} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$. Нижняя полуплоскость – это трубчатая область над конусом $C = \mathbb{R}^- = \{y < 0\}$.

2. Случай n=2. Конус $C = \mathbb{R}^2_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \ y_1 > 0, \ y_2 > 0\}$ (первый квадрант). Трубчатой областью будет являться произведение двух верхних полуплоскостей: $T^{\mathbb{R}^2_+} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Im} z_1 > 0, \ \mathrm{Im} z_2 > 0\}$.

3. Трубчатая область над круговым конусом ($n \geqslant 2$). Световой конус будущего (открытый выпуклый острый конус): $C = \Gamma^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y_n > \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2}\}$. Трубчатая область:

$$T^{\Gamma^+} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid y \in \Gamma^+\}.$$

4. Трубчатая область над вырожденным конусом ($n = 3$). Конус $C = \{(y_1, y_2, y_3) : \ y_1 > 0\}$ (полупространство, не острый конус). Трубчатая область: $T^C = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Im} z_1 > 0\}$. Здесь мнимые части z_2, z_3 могут быть любыми вещественными числами. Область вырождена в направлениях $\mathrm{Im} z_2, \mathrm{Im} z_3$.

5. Вся комплексная плоскость. Конус $C = \mathbb{R}^n$ (несобственный конус, совпадает со всем пространством). Трубчатая область: $T^{\mathbb{R}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im} z \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{C}^n$. Это вырожденный случай – область совпадает со всем $\mathbb{C}^n$.

3. Аналитические функции. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Из теории функций комплексного переменного известно, что функция f называется аналитической в Ω, если она дифференцируема в каждой точке этой области [6].

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}, g : \Omega \to \mathbb{C}$ – аналитические функции. Тогда $(f+g)(z), f \cdot g(z), \ \frac{f}{g}(z)$ – аналитические функции и выполняются свойства:

1) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2) $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$;
4) $C' = 0$;
5) $(C \cdot f)'(z) = Cf'(z)$;
6) $z' = 1$.

Определение. *Функцией, голоморфной (аналитической) в трубчатой области T^C, является комплекснозначная функция $F(z)$, дифференцируемая по каждому комплексному переменному z_k в области T^C.*

Термин «голоморфная функция» (от греч. holos – целый, и morph? – форма) подчеркивает глобальное свойство: функция дифференцируема во всей области (а не только в точке). Чаще используется в многомерном комплексном анализе и алгебраической геометрии. Понятие «аналитическая функция» подчеркивает локальное свойство: функция в окрестности каждой точки представляется сходящимся степенным рядом (рядом Тейлора). Этот термин старше и используется также для вещественных функций.

Определение. *Пространство Харди $H^p(T^C)$ – класс функций F, голоморфных в T^C, для которых выполняется неравенство:*

$$\sup_{y \in C} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^p dx < \infty.$$

Теорема (о голоморфности интеграла). *Пусть μ – комплексная мера (или обобщённая функция умеренного роста) с носителем в C^*. Тогда функция*

$$F(z) = \int\limits_{C^*} e^{i\langle z, \xi\rangle} d\mu(\xi)$$

является голоморфной в T^C.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в трубчатой радиальной области T^C, и положим, что для всех y из конуса C', компактного в C, $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|f(x+iy)\| \leqslant M_{\varepsilon,f}\,(C')\,e^{\varepsilon|y|} \tag{1}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Функция

$$g_y(\xi) = (2\pi)^{-n} e^{\xi y} \int f(x+iy) e^{-i\xi x} dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{z=x+iy} f(z) e^{-i\xi z} dz_1 \dots dz_n \tag{2}$$

не зависит от $y \in C$. Обозначим функцию $g_y(\xi)$ через $g(\xi)$. Функция $g(\xi)$ измерима и, в силу (2), обладает свойствами

$$\begin{array}{ll} g(\xi)e^{-\xi y} \in L_2 & \text{при всех } y \in C; \\ f(z) = \int g(\xi) e^{iz\xi} d\xi & \text{при всех } z \in T^C. \end{array}$$

$g(\xi) = 0$ почти всюду в конусе C_*. Если конус $O(C)$ содержит целую прямую, то $g(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, любая функция $f(z)$, которая является голоморфной в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяет условию (1), имеет граничное значение

$$f(x+i0) = \lim_{y\to 0,\, y\in C} f(x+iy),$$

которое не зависит от последовательности $y \to 0,\ y \in C$. Сходимость здесь понимается в смысле L_2. При этом, если конус $O(C)$ содержит целую прямую, то $f(z) \equiv 0$. В работе [7] содержится информация о классе функций, который удовлетворяет более строгому ограничению, чем (1): $\|f(x+iy)\| \leqslant M_f$, при этом конус C является выпуклым, а $\overline{C}$ не содержит ни одной целой прямой.

4. Интегральные представления. Интегральные представления составляют фундаментальный аппарат теории голоморфных функций. Они позволяют восстановить значения аналитической функции во всей области G по её граничным значениям на ∂G либо на некотором подмножестве границы, имеющем меньшую размерность (остове области). Классическим и наиболее простым примером такого представления служит формула Коши.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в области $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, при этом G_j является областью в плоскости z_j с кусочно-гладкой границей ∂G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, и непрерывную в $\overline{G}$. Для функции $f(z)$ справедлива формула Коши:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial G_1 \times \partial G_2 \times \ldots \times \partial G_n} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^I} = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G, \\ 0, & \text{если } z \bar{\in} \overline{G}, \end{cases}$$

где положительное направление на ∂G_j – то направление, при котором область G_j остается слева. Формула Коши выражает значения $f(z)$ в $2n$-мерной области $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ через ее значения на n-мерном ориентированном многообразии $\partial G_1 \times \partial G_2 \times \ldots \times \partial G_n$ – остове области G. Остов составляет часть границы ∂G области G. Ядро в формуле Коши не зависит от конкретного вида областей G_j.

Ряд интегральных представлений, являющихся обобщениями формулы Коши, был разработан для анализа голоморфных функций в областях со сложной геометрией. В рамках данной работы основное внимание уделяется представлению Бохнера, применимому к радиальным трубчатым областям. Данные области являются неограниченными, поэтому это представление справедливо не для всех голоморфных функций, а только для тех из них, которые достаточно быстро убывают на бесконечности.

5. Ядро и формула Бохнера. Введем ядро $K(z)$ для трубчатой радиальной области T^C по формуле:

$$K(z) = \int\limits_{C^*} e^{iz\xi} d\xi. \tag{3}$$

$K(z)$ называется ядром Бохнера для трубчатой радиальной области T^C.

$K(z)$ – функция голоморфная в $T^{O(c)}$, для любых y из компактного в $O(C)$ конуса C' $K(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|K(x+iy)\|^2 \leqslant M\,(C')\,|y|^{-n}. \tag{4}$$

Пусть A – некоторое множество. Обозначим $e_A(x)$ как характеристическую функцию множества A, при этом: $e_A(x) = 1,\ x \in A;\ e_A(x) = 0,\ x \bar{\in} A$.

Функция $K(x+iy)$ при любом фиксированном $y \in O(C)$ является преобразованием Фурье функции $e^{-y\xi}e_{C^*}(\xi)$, где $e_{C^*}(\xi)$ – характеристическая функция конуса C^*. Поэтому справедливо равенство Парсеваля

$$\int |K(x+iy)|^2 dx = (2\pi)^n \int\limits_{C^*} e^{-2\xi y} d\xi.$$

Из этого равенства и из неравенства $(*)$ для всех $y \in C'$ вытекает оценка (4),

$$\|K(x+iy)\|^2 = (2\pi)^n \sigma_n \int\limits_0^\infty e^{-2\sigma r|y|} r^{n-1} dr \leqslant M(C')\,|y|^{-n}.$$

Примеры.

1. Пусть $C = \Gamma^0 = \left[y:\ y_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\right]$. Тогда $\Gamma^{0^*} = \Gamma^0$ и

$$K(z) = \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty e^{i\sum\limits_j z_j\xi_j} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \frac{i^n}{z_1 z_2 \ldots z_n}.$$

2. Пусть $C = \Gamma^+$. Тогда $\Gamma^{+*} = \overline{\Gamma}^+$ и

$$K(z) = \int\limits_{\overline{\Gamma}^+} e^{iz\xi} d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(-z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2\right)^{n/2}}.$$

При $n = 1$ эти ядра превращаются в ядро Коши.

3. Следующий пример был рассмотрен в работе [2]:

$$C^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ x_n > \sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|,\ a_j > 0,\ j = 1, \ldots, n-1\right\}.$$

$$\int\limits_{C^*} e^{i(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1}) + iz_n\xi_n} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j|\xi_j|} e^{iz_n\xi_n} \Big) e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' =$$

$$[z_n = x_n + iy_n,\ y_n > 0]$$

$$= \frac{1}{iz_n} \prod_{j=1}^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j\xi_j} e^{ia_j|\xi_j|z_n} = \frac{i^{n-1} a_1 \ldots a_{n-1} z_n^{n-2} 2^{n-1}}{(x_1^2 - a_1^2 z_n^2) \ldots (x_{n-1}^2 - a_{n-1}^2 z_{n-1}^2)},$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j\xi_j} e^{ia_j|\xi_j|z_n} d\xi_j = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\xi_j(x_j + a_j z_n)} d\xi_j + \int\limits_0^{+\infty} e^{i\xi_j(x_j - a_j z_n)} d\xi_j = \frac{1}{i(x_j + a_j z_n)} - \frac{1}{i(x_j - a_j z_n)} = \frac{2a_j z_n i}{x_j^2 - a_j^2 z_n^2}.$$

Следовательно, ядро Бохнера:

$$K(z) = (2i)^{n-1} z_n^{n-2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{z_j^2 - a_j^2 z_n^2}.$$

Теорема Бохнера. *Любая голоморфная в трубчатой области $T_B = B + i\mathbb{R}^n$ функция $f(z)$ голоморфна в ее выпуклой оболочке $O(T_B) = O(B) + i\mathbb{R}^n$, то есть $O(T_B)$ есть голоморфное расширение T_B* [1].

Любую функцию $f(z)$, которая голоморфна в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяет оценке (1), можно представить в виде интеграла

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int K(z - x')\, f(x' + i0)\, dx', \tag{5}$$

где $K(z)$ – ядро области T^C, $f(x+i0)$ – граничное значение функции $f(z)$ при $y \to 0,\ y \in C$.

Доказательство. □ Так как $g(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n \backslash C^*$, то формулу

$$f(z) = \int g(\xi) e^{iz\xi} d\xi \text{ при всех } z \in T^C$$

можно переписать в виде

$$f(z) = \int g(\xi) e_{C^*}(\xi) e^{-\xi y + ix\xi} d\xi. \tag{6}$$

Применим к интегралу (6) теорему о свертке и учтем формулу (3) и формулу:

$$f(x + i0) = \int\limits_{C^*} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \ \in L_2$$

получим формулу (5). ■

Из этого следует, что любая функция $f(z)$, голоморфная в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяющая оценке (1), голоморфна в выпуклой оболочке $O\left(T^C\right) = T^{O(C)}$. При этом для всех y из компактного в $O(C)$ конуса C' функция $f(z)$ удовлетворяет оценке вида

$$\|f(x + iy)\| \leqslant N\left(C'\right) |y|^{-\frac{n}{2}} \|f(x + i0)\|, \tag{7}$$

где число $N\left(C'\right)$ не зависит от $f(z)$. При этом если конус $\overline{O(C)}$ содержит целую прямую, то $f(z) \equiv 0$.

Голоморфность $f(z)$ вытекает из представления (6), из свойств ядра $K(z)$ и из теоремы Бохнера. Оценка (7) вытекает из представления (5), из оценки (4) и из неравенства Буняковского Шварца,

$$\|f(x + iy)\| \leqslant (2\pi)^{-n} \|K\left(x + iy - x'\right)\| \|f\left(x' + i0\right)\| = (2\pi)^{-n} \|K(x + iy)\| \|f(x + i0)\| \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{-n} \sqrt{M\left(C'\right)} |y|^{-\frac{n}{2}} \|f(x + i0)\|.$$

Интегрирование в формуле (5) происходит по «острию» $\mathbb{R}^n$ «клина» T^C – остову области T^C. Ориентации остова $\mathbb{R}^n$ и конуса T^C должны быть согласованы.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе были рассмотрены основные понятия и определения, связанные с конусами, радиальными трубчатыми областями и аналитическими функциями. Ключевым результатом является демонстрация интегрального представления, формулы Бохнера, которая позволяет восстановить функцию по ее граничным значениям. Проведённый анализ позволяет утверждать, что аппарат интегральных представлений служит основным инструментом для изучения аналитических функций в радиальных трубчатых областях над конусами.

Список литературы

1. Бохнер С., Мартин У. Т. 1951. Функции многих комплексных переменных. ИИЛ, 301 с.
2. Васильев В. Б. 1998. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях. Тр. Моск. мат. о-ва, С. 73–105.
3. Владимиров В. С. 1964. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 414 с.
4. Владимиров В. С. 1979. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 320 с.
5. Гриндикин С. Г. 1962. Аналитические функции в трубчатых областях. ДАН СССР, С. 1205-1208.
6. Натанзон С. М. 2018. Комплексный анализ, римановы поверхности и интегрируемые системы. МЦНМО, 139 с.
7. Bochner S. 1944. Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Annals of Math., С. 686-707.

Поступила в редакцию 08.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ларионова Ольга Викторовна – аспирант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

vasilyev_v@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 230–236.

Метод приближений и теорема Пикара

Бекетов В. Ю.
1829310@bsuedu.ru

Аннотация. Данная статья преследует цель обобщения имеющихся результатов в области исследования равномерной сходимости функциональных рядов, функциональных последовательностей, а также в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основным результатом является метод приближений для интегрирования или численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого, разрешенных относительно производной.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, ряд, приближение Пикара, условие Липшица, функциональная последовательность

Для цитирования: Бекетов В. Ю. 2025. Метод приближений и теорема Пикара. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 230–236.

Введение. Обычно, курс обыкновенных дифференциальных уравнение (ОДУ или ДУ) начинается с ДУ, разрешенных относительно производной, а также с рассмотрения задача Коши, которая накладывает начальные условия на значение функции в некоторой точке. Для любой задачи рассматривают, когда она выполнена, то есть существование решения, а также могут рассматривать единственность данного решения. Геометрическая интерпретация существования и единственности решение задачи Коши данного ДУ означает, что через некоторую заданную точку, в некоторой малой окрестности, проходит только одна кривая, являющаяся решением этого ДУ.

Теоретическая часть.

Лемма. [см. [1, с. 6-7]] *Пусть f – непрерывная на прямоугольнике функция двух переменных. Функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши*

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда является решением интегрального уравнения

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{3}$$

где решением интегрального уравнения называется непрерывная функция $y = y(x)$, обращающая уравнение в тождество.

Доказательство. «$\Rightarrow$» : Пусть $y = y(x)$ – решение задачи (1)–(2). Проинтегрируем уравнение (1) на $[x_0; x]$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt \overset{(2)}{\Longrightarrow} y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt$$

Так как функция y – решение ДУ, то она дифференцируемая, а значит и непрерывная.

«$\Leftarrow$» : Пусть $y = y(x)$ – решение интегрального уравнения (3), значит y – непрерывная функция. Так как y и f непрерывные, то и $f(t, y(t))$ тоже непрерывная. Тогда, по теореме Барроу, производная от интеграла в правой части (3) по верхнему пределу равна $f(x, y(x))$, то есть непрерывная.
Дифференцируем уравнение (3) по x:

$$y' = f(x, y(x)),$$

значит y' непрерывная и удовлетворяет (1), а из (3) получаем выполнение (2), так как интеграл равен нулю при $x = x_0$. ■

Теперь, вместо доказательства существования и единственности решения задачи (1)–(2), можно рассматривать существование и единственность решения уравнения (3).

© Бекетов В. Ю., 2025

Определение. [см. [4, с. 58]] *Функция $f(x,y)$ называется липшицевой по y, если она удовлетворяет условию Липшица*[1] *относительно y, т. е.*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|, \tag{4}$$

где L – константа Липшица, для которой выполнено неравенство (4) *при всех возможных y_1 и y_2. При этом* (4) *не зависит от x.*

Будем обозначать множество липшицевых функции по переменной x_i на множестве D как $Lip_{x_i}(D)$. Например, липшицевость функции $f(x,y)$ по переменой y на множестве Π обозначают как $f \in Lip_y(\Pi)$.

Теорема. [см. [4, с. 57-64]] *Пусть $f(x,y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi)$, где $\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$. Тогда решение задачи* (1)–(2), *или* (3), *существует и единственно на $[x_0 - h; x_0 + h]$, где $h = \min\left(a, b/M, L^{-1}\right)$, $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, L – константа Липшица.*

Доказательство. Строим, так называемые, последовательные приближения Пикара:

$$y_0(x) \equiv y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt,$$

$$\ldots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt.$$

Докажем, что $\forall n : |y_n - y_0| \leqslant b$, то есть $y_n \in [y_0 - b; y_0 + b]$.

Если $n = 1$, то

$$|y_1 - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt \right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|\, |dt| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b.$$

Пусть данное утверждение верно для $n - 1$, тогда

$$|y_n - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\, |dt| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

тогда $\forall n : (x, y_n) \in \Pi$. Индуктивное предположение важное, так как только при $(x, y_{n-1}) \in \Pi$ имеем, что супремум $f(x, y_{n-1})$ равен M.

Нам нужно доказать равномерную сходимость функциональной последовательности y_n. Построим ряд с частичной суммой равной этой последовательности:

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) = S_n(x) = y_n(x), \tag{5}$$

тогда, доказав равномерную сходимость ряда на $[x_0 - h; x_0 + h]$, получим равномерную сходимость y_n. Оценим модуль общего члена по индукции:

$$|y_1 - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t) - f(t, y_0(t)))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0(t)|\, |dt| \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} M|t - x_0|\, dt = LM \frac{|x - x_0|^2}{2} \leqslant \frac{LMh^2}{2},$$

[1] Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц – немецкий математик.

$$|y_3 - y_2| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t) - f(t, y_1(t)))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)|\, |dt| \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} LM \frac{|t - x_0|^2}{2}\, dt = L^2 M \frac{|x - x_0|^3}{3!} \leqslant \frac{L^2 M h^3}{3!}.$$

Пусть верно, что $|y_n - y_{n-1}| \leqslant \dfrac{L^{n-1} M |x - x_0|^n}{n!}$, покажем аналогичную оценку для $|y_{n+1} - y_n|$:

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t) - f(t, y_{n-1}(t)))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|\, |dt| \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} \frac{L^{n-1} M |t - x_0|^n}{n!}\, dt = L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{L^n M h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Мы поняли, что частичная сумма ряда (5) почленно мажорируется элементами некоторого числового ряда. Доказав сходимость этого числогого ряда, по критерию Вейерштрасса[1] получим абсолютную и равномерную сходимость (5).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M h^n}{n!}, \quad a_n = \frac{L^{n-1} M h^n}{n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n+1} = 0 < 1 \overset{\text{пр. Даламебра}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M h^n}{n!} < \infty,$$

значит частичная сумма (5) абсолютно и равномерно сходится на $[x_0 - h; x_0 + h]$, а так как все её слагаемые непрерывные, то $S_n \rightrightarrows \overline{y}$, где $\overline{y}$ непрерывная функция. По построению, $S_n = y_n$, тогда $y_n \rightrightarrows \overline{y}$. Кроме того, из замкнутости П следует, что $(x, \overline{y}) \in$ П.

Так как

$$y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt,$$

то, совершив предельный переход в левой и правой части этого равенства при $n \to \infty$ ($|x - x_0| \leqslant h$), мы хотим получить

$$\overline{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, t\overline{y}(x))\, dt.$$

Докажем возможность такого передельного перехода, т. е. что

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \to \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\, dt. \tag{6}$$

Равномерная сходимость $y_n \rightrightarrows \overline{y}$ на $|x - x_0| \leqslant h$ по определению означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N,\ \forall x : |x - x_0| \leqslant h\ :\ |y_n - \overline{y}| < \varepsilon.$$

[1]см. [5], с. 427

[2]По признаку Даламбера [см. [2], с. 93]

Тогда имеем, что

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\,dt\right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, \overline{y}(t))|\,|dt| \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} \int\limits_{x_0}^{x} L|y_{n-1} - \overline{y}||ds| < L\varepsilon|x - x_0| \leqslant L\varepsilon h.$$

Отсюда получаем возможность предельного перехода (6), а значит $\overline{y}$ – решение интегрального уравнения (3), т. е. решение задачи Коши (1)–(2).

Теперь покажем *единственность* решения. Пусть существует две функции $\overline{y}$ и $\tilde{y}$, удовлетворяющие уравнению (3). Тогда

$$\overline{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\,dt, \quad \tilde{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\,dt.$$

$$|\overline{y} - \tilde{y}| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \overline{y}(t)) - f(t, \tilde{y}(t))|\,|dt| \overset{(4)}{\leqslant} L\int\limits_{x_0}^{x} |\overline{y}(t) - \tilde{y}(t)||dt| \leqslant L \cdot \left(\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)|\right) h. \tag{7}$$

При этом понятно, что $\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \geqslant 0$, так как выражение под супремумом неотрицательно всегда.

Если в (7) взять супремум от крайней левой и правой частей, то получим

$$\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant Lh \cdot \left(\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)|\right) \Rightarrow (1 - Lh) \cdot \left(\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)|\right) \leqslant 0,$$

т. е. при $1-Lh \geqslant 0$ получим $\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant 0$. Имеем, что супремум больше или равен нулю, а также меньше или равен нулю, при $h \leqslant L^{-1}$. Это означает, что $\overline{y} = \tilde{y}$ при $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\left(a, b/M, L^{-1}\right)$. ■

Данное доказательство теоремы показывает несколько важных замечаний:

1. Теорема носит исключительно локальный характер, т. е. мы можем утверждать существование и единственность решения задачи (1)–(2), или (3), только на определенном интервале;
2. Для существования решения, вообще, достаточно условие, что $h = \min(a, b/M)$. Константа Липшица, как ограничение для h, участвовала только в доказательстве единственности;
3. Во время доказательства был выстроен метод решения дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, с помощью последовательных приближений Пикара. Эти приближения, в предельном переходе, являются решением данного ДУ.

Практическая часть.

Задача 1. [3, с. 18] Проинтегрируйте уравнение $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y - 1| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = 1 \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 1$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)| = a + b + 1$, тогда $h = \min(a, b/(a + b + 1), 1)$. Построим приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 1,$$

$$y_1 = 1 + \int\limits_0^x (t + 1)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = 1 + \int\limits_0^x \left(t + 1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

$$y_3 = 1 + \int\limits_0^x \left(t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2 \cdot 3}\right) dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$y_4 = 1 + \int\limits_0^x \left(t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4}\right) dt =$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Докажем по индукции общий вид формулы. База индукции: $n = 4$. Пусть для номера n верна формула

$$y_n = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{x^n}{3\cdot\ldots\cdot n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

покажем её верность для номера $n + 1$:

$$y_{n+1} = 1 + \int\limits_0^x (t + y_n(t))\, dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{3\cdot\ldots\cdot(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Помним, что на $|x - x_0| \leqslant h$ имеем $y_n \rightrightarrows \overline{y}$, то есть

$$y_n = 1 + x + 2\cdot\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 + x + 2\cdot\left(-1 - x + \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= -1 - x + 2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow y_n \rightrightarrows \overline{y} = -1 - x + 2e^x$$

Подстановкой легко убедиться, что $\overline{y}$ – решение задачи Коши для данного ДУ.

Задача 2. [3, с. 18] Проинтегрируйте уравнение $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y - 2| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2y_1 - 2x^2 - 3 - 2y_2 + 2x^2 + 3| = 2\cdot|y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2$. $M = \sup\limits_{\Pi}|f(x, y)| = 2\cdot(2 + b) - 3 = 2b + 1$, тогда $h = \min(a, b/(2b + 1), 1/2)$.

Построим приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 2,$$
$$y_1 = 2 + \int\limits_0^x (2\cdot 2 - 2t^2 - 3)\, dt = 2 + x - \frac{2x^3}{3},$$
$$y_2 = 2 + \int\limits_0^x \left(2\cdot\left(2 + t - \frac{2t^3}{3}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^4}{3\cdot 4},$$
$$y_3 = 2 + \int\limits_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{2t^3}{3} - \frac{4t^4}{3\cdot 4}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{4x^4}{3\cdot 4} - \frac{8x^5}{3\cdot 4\cdot 5},$$
$$y_4 = 2 + \int\limits_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{4t^4}{3\cdot 4} - \frac{8t^5}{3\cdot 4\cdot 5}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{8x^5}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{16x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.$$

Докажем по индукции общий вид формулы. База индукции: $n = 4$. Пусть для номера n верна формула

$$y_n = 2 + x + x^2 - \frac{2^{n-1}x^{n+1}}{3\cdot\ldots\cdot(n+1)} - \frac{2^n x^{n+2}}{3\cdot\ldots\cdot(n+2)},$$

покажем её верность для номера $n + 1$:

$$y_{n+1} = 2 + \int\limits_0^x (2y_n(t) - 2t^2 - 3)\, dt =$$
$$= 2 + \int\limits_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{2^{n-1}t^{n+1}}{3\cdot\ldots\cdot(n+1)} - \frac{2^n t^{n+2}}{3\cdot\ldots\cdot(n+2)}\right) - 2t^2 - 3\right) dt =$$
$$= 2 + x + x^2 - \frac{2^n x^{n+2}}{3\cdot\ldots\cdot(n+2)} - \frac{2^{n+1}x^{n+3}}{3\cdot\ldots\cdot(n+3)}.$$

Помним, что на $|x - x_0| \leqslant h$ имеем $y_n \rightrightarrows \overline{y}$, то есть

$$y_n = 2 + x + x^2 - \frac{2^{n-1}x^{n+1}}{3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} - \frac{2^n x^{n+2}}{3 \cdot \ldots \cdot (n+2)} \rightrightarrows \overline{y} = 2 + x + x^2$$

Подстановкой легко убедиться, что $\overline{y}$ – решение задачи Коши для данного ДУ.

Задача 3. [3, с. 18] Найти три последовательных приближения уравнения $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1^2 - x - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant (b + b) \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2b$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)| = a + b$, тогда $h = \min(a, b/(a+b), 1/2b)$. Построим первые три приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 0, \quad y_1 = \int\limits_0^x (t + 0^2)\, dt = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \int\limits_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 5},$$

$$y_3 = \int\limits_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{4 \cdot 5}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^8}{4 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{x^{11}}{16 \cdot 25 \cdot 11}.$$

На рисунке 1 показано отличие первых трёх последовательных приближений от кривой, удовлетворяющей задаче Коши из условия.

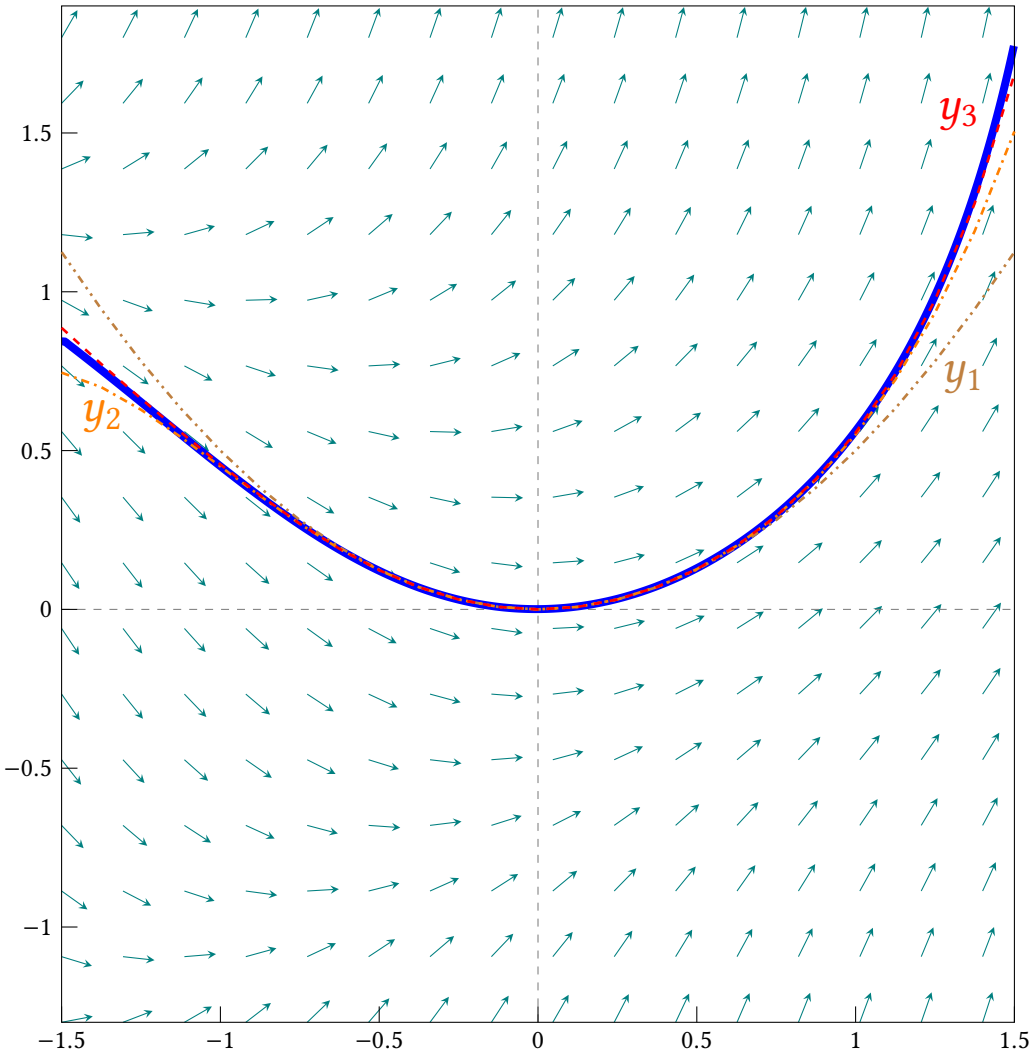


Рис. 1. поле направлений, интегральная кривая и приближения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$.

Задача 4. [3, с. 18] Найти три последовательных приближения уравнения $y' = x^2 - y^2$, $y(-1) = 0$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать дифференциальное уравнение $\Pi = \{|x+1| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x^2 - y_1^2 - x + y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant (b+b) \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2b$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)| = a + b - 1$, тогда $h = \min(a, b/(a+b-1), 1/2b)$. Построим первые три приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 0, \quad y_1 = \int\limits_{-1}^{x} (t^2 - 0^2)\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3},$$

$$y_2 = \int\limits_{-1}^{x} \left(t^2 - \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}\right)^2\right) dt = -\frac{x}{9} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{9\cdot 2} - \frac{x^7}{9\cdot 7} + \frac{11}{42},$$

$$y_3 = \int\limits_{-1}^{x} \left(t^2 - \left(-\frac{t}{9} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{9\cdot 2} - \frac{t^7}{9\cdot 7} + \frac{11}{42}\right)^2\right) dt =$$

$$= -\frac{121x}{1764} + \frac{11x^2}{378} + \frac{80x^3}{243} - \frac{11x^4}{252} + \frac{13x^5}{630} - \frac{x^6}{486} - \frac{x^7}{63} + \frac{5x^8}{882} + \frac{5x^9}{6804} + \frac{2x^{11}}{2079} - \frac{x^{12}}{6804} - \frac{x^{15}}{59535} + \frac{5177}{18711}.$$

Покажем графически отличие первых трёх последовательных приближений от кривой, удовлетворяющей задаче Коши из условия.

Заключение. В данной статье была разобрана задача Коши для ДУ, разрешенных относительно производной, а именно существование и единственность решения. Доказательство условий существования и единственности строилось на методе последовательных приближений Пикара, которые приближают решение ДУ в точке рассмотрения задачи Коши. Также были решены некоторые задачи: были найдены либо явные решения дифференциального уравнения, либо их приближения решения.

Список литературы

1. Бибиков Ю. Н. 1991. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. – М., Высш. шк., 303 с.
2. Краснов Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., МИР, 720 с.
3. Матвеев Н.М. 1967. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений – М., Высш. шк., 564 с.
4. Степанов В. В. 1950. Курс дифференциальных уравнений. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 486 с.
5. Хартман Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., МИР, 720 с.

Поступила в редакцию 14.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Бекетов Вадим Юрьевич – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 237–244.

Преобразование Фурье, свойства и применение

Науменко Н. Н.
nikakort704@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются интеграл Фурье и преобразование Фурье в контексте функционального анализа. Представлены основные определения интеграла Фурье, прямого и обратного преобразований Фурье, а также их частных случаев: косинус- и синус-преобразований. Рассмотрены ключевые свойства преобразования Фурье, включая линейность, непрерывность, формулу обращения, связь с дифференцированием оригинала и образа, свойство сдвига и преобразование интеграла. Решены практические задачи по вычислению преобразования Фурье. Представлены доказательства свойств преобразования сдвинутой функции и связи преобразования функции с преобразованием её интеграла.

Ключевые слова: интеграл Фурье, преобразование Фурье, косинус-преобразование, синус-преобразование, спектральный анализ, свойства преобразования Фурье

Для цитирования:Науменко Н. Н. 2025. Преобразование Фурье, свойства и применение. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 237–244.

---

1. Введение. Преобразование Фурье занимает важное место в математическом анализе. Изучение гармонического анализа начинается с рядов Фурье, где функция раскладывается в ряд гармонических колебаний. Для функций, заданных на всей числовой оси, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

В данной работе рассматриваются интеграл Фурье и преобразование Фурье. Работа опирается на теоретические основы интегральных преобразований. Проанализирована связь между прямым и обратным преобразованиями Фурье. Представлен процесс вычисления преобразования Фурье для конкретных функций. Рассмотрены примеры использования свойств преобразования Фурье для решения практических задач.

2. Интеграл Фурье. Изучение гармонического анализа начинается с рядов Фурье, где кусочно- гладкая функция, определенная на конечном интервале, раскладывается в ряд, состоящий из дискретных гармонических колебаний. Функция называется кусочно- гладкой, если она в каждой точке имеет конечные пределы слева и справа, а также конечные значения левой и правой производных. Гармонические колебания — это те колебания, в которых колеблющаяся величина меняет своё значение во времени строго по закону синуса или косинуса.

Однако при анализе непериодических явлений, где функция задана на всей числовой оси, происходит качественный переход. Ряд Фурье трансформируется в интеграл Фурье, который представляет собой сумму тех же гармонических колебаний, но частоты которых теперь непрерывно заполняют действительную полуось. Мы рассмотрим основы этого интегрального представления, которое является важным для дальнейшего изучения преобразования Фурье.

«Пусть $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье мы можем для любого $l > 0$ разложить f в ряд Фурье в промежутке $[-l, l]$:» [1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$\cos\frac{n\pi x}{l}$ и $\sin\frac{n\pi x}{l}$ называют гармониками, а коэффициенты a_n и b_n — амплитуды гармоники. Коэффициенты гармоники $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, они образуют бесконечно большую последовательность. Разность двух соседних частот $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}$ тем меньше, чем больше l, с увеличением l соседние частоты становятся все ближе друг к другу. В пределе при $l \to \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до $+\infty$, а ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right)dt, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)dt.$$

Подставим выражение для a_n и b_n в $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(t-x)\right)dt\right]\Delta\lambda$$

Считаем, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ сходится. Предел при $l \to \infty$ первого слагаемого равен нулю:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda(t-x))dt$$

© Науменко Н. Н., 2025

Мы получили представление функции $f(x)$. Самая правая часть называется интегралом Фурье. Записав $\cos(\lambda(t-x))$ в виде $\cos\lambda t\cos\lambda x+\sin\lambda t\sin\lambda x$, получим:

$$f(x)=\int_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda$$

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt \quad \text{и} \quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt$$

Разложение функции $f(x)$ по гармоникам $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, а амплитудами $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ служат интегралы.

Полученное интегральное представление можно конкретизировать для функций с определённой чётностью. Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является чётной, справедливо равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy, \quad \text{где} \quad a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt.$$

в случае, когда f — нечётная функция, выполняется равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy, \quad \text{где} \quad b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt.$$

Для чётной функции разложение содержит только косинусы, а для нечётной — только синусы, что полностью аналогично случаю тригонометрических рядов Фурье.

«Произведение двух чётных или двух нечётных функций есть чётная функция. Произведение чётной и нечётной функций есть нечётная функция»[5].

Общую формулу интеграла Фурье можно записать в более компактной комплексной форме. Используя формулу Эйлера $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, получили следующее:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}\,dt,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

3. Преобразование Фурье. Согласно теореме Фурье, «если непериодическая функция $f(x)$, определённая на $(-\infty,+\infty)$, является оригиналом по Фурье, то во всех точках её непрерывности справедливо интегральное представление»[2]

«Преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ новую функцию

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx, \tag{1}$$

называется прямым преобразованием Фурье и обозначается через F_+. При этом функция $\hat{f}=F_+[f]$ называется прямым преобразованием Фурье функции f» [1].

Обратным преобразованием Фурье для $f(x)$ называют интеграл

$$\check{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx, \tag{2}$$

обозначаемый $\mathcal{F}_-[f]$. Таким образом, $\check{f}=\mathcal{F}_-[f]$.

Эти определения можно также записать в форме, используемой в теории интеграла Фурье. Пусть функция $f(x)$, определённая на всей числовой оси, является кусочно-гладкой в каждом конечном интервале и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty;+\infty)$. Тогда она представима интегралом Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right]e^{iyx}dy.$$

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt, \tag{3}$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \tag{4}$$

Функция $\hat{f}(y)$, полученная по формуле (3), называется прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула (4), восстанавливающая $f(x)$ по $\hat{f}(y)$, называется обратным преобразованием Фурье.

При этом интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$ понимаются в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{+n} f(u)du.$$

Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то интегралы (1) и (2) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

Функция f называется абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, если сходится интеграл от её модуля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Это условие является достаточным для существования преобразования Фурье и обеспечивает равномерную сходимость интеграла, определяющего $\hat{f}(y)$.

4. Формула обращения и спектральная интерпретация. Для функций, удовлетворяющих условиям абсолютной интегрируемости как самой функции f, так и её образа Фурье $\hat{f}$, выполняется важное свойство: последовательное применение прямого и обратного преобразований Фурье к кусочно-гладкой непрерывной функции приводит к исходной функции. То же самое справедливо, если сначала применить обратное преобразование, а затем прямое. Символически это записывается в виде:

$$f = \mathcal{F}_-[\mathcal{F}_+[f]] = \mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[f]],$$

что называют формулами обращения преобразования Фурье. Если непрерывная функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]](x) = f(x). \tag{5}$$

«Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ называют образом Фурье или спектральной характеристикой функции $f(x)$. В физических приложениях функция $\hat{f}(y)$ называется спектральной плотностью сигнала $f(x)$» [1].

Её модуль $|\hat{f}(y)|$ называется амплитудным спектром, а аргумент $\arg \hat{f}(y)$ — фазовым спектром функции $f(x)$.

Преобразование Фурье раскладывает исходную функцию на частотные составляющие, представляя её в виде интеграла синусоид различной частоты, амплитуды и фазы.

Если $f(x)$ интерпретируется как сигнал во временной области, то $\hat{f}(y)$ описывает его спектр в частотной области. Модуль $|\hat{f}(y)|$ определяет амплитуды гармоник с частотой y, а фаза $\arg \hat{f}(y)$ — их сдвиги.

Формулы обращения показывают, что функции f и $\hat{f}$ в определённом смысле равноправны: каждая из них может быть восстановлена по другой. Заметим, что даже для вещественнозначной функции $f(x)$ её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$, является комплекснозначной функцией.

5. Свойства преобразования Фурье.Широкие возможности применения преобразования Фурье основываются на нескольких полезных свойствах этого преобразования.

Отметим следующие свойства преобразования Фурье и обратного преобразования:

1. Формула обращения. Уже была приведена выше (5).

2. Линейность. Преобразование Фурье является линейным оператором: для любых комплексных чисел α, β и функций f, g, для которых определены $\mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}[g]$, выполняется

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g].$$

   Аналогичное свойство имеет и обратное преобразование Фурье.

3. Непрерывность. «Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ есть непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, причём» [4]

$$\lim_{y\to+\infty} \hat{f}(y) = \lim_{y\to-\infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{6}$$

4. Преобразование Фурье производной. «Если f абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f' \in L_1(-\infty, \infty)$, то имеет место равенство» [2]

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Если функция f такова, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $f, \ldots, f^{(k)} \in L_1(-\infty, \infty)$, то с помощью таких же рассуждений получим

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

5. «Производная преобразования Фурье. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, функции $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f]$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до n-го порядка включительно, причём» [4]

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k \mathcal{F}[x^k f(x)](y), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

6. Частные случаи: косинус- и синус-преобразования. Для чётных и нечётных функций общая формула преобразования Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ — чётная. Перепишем равенство для интеграла Фурье в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(yt) dt \right] \cos(yx) dy.$$

$$\hat{f}_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(yt) dt. \tag{9}$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(y) \cos(yx) dy. \tag{10}$$

Функция $\hat{f}_c(y)$ называется косинус-преобразованием функции $f(t)$.

Пусть функция $f(x)$ — нечётная. Тогда равенство для интеграла Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(yt) dt \right] \sin(yx) dy.$$

$$\hat{f}_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(yt) dt, \tag{11}$$

тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(y) \sin(yx) dy. \tag{12}$$

Функция $\hat{f}_s(y)$ называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Пары соотношений (9),(10) и (11),(12) демонстрируют важное свойство симметрии, называемое законом взаимности косинус- и синус-преобразований Фурье: если $\hat{f}_c(y)$ является косинус-преобразованием чётной функции $f(x)$, то сама $f(x)$ оказывается косинус-преобразованием функции $\hat{f}_c(y)$; аналогично, если $\hat{f}_s(y)$ — синус-преобразование нечётной функции $f(x)$, то $f(x)$ является синус-преобразованием функции $\hat{f}_s(y)$.

Это означает, что прямое и обратное косинус- (или синус-) преобразования Фурье имеют одинаковый вид, что упрощает их практическое использование.

7. Решение задач.

Задача 2.1. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

1. $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$;
2. $f(x) = x^2 e^{-|x|}$;

3. $f(x) = \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

Решение.

1. Функция $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ является чётной и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ при $\alpha > 0$. Поэтому её преобразование Фурье можно вычислять как косинус-преобразование:
$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ixy}\,dx.$$
В силу чётности подынтегральной функции мнимая часть (содержащая $\sin(xy)$) обращается в ноль, и интеграл сводится к:
$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(xy)\,dx.$$
Используя табличный интеграл
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0,$$
получаем:
$$\mathcal{F}[e^{-\alpha|x|}](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}, \quad \alpha > 0.$$

2. Для нахождения преобразования Фурье функции $x^2e^{-|x|}$ воспользуемся свойством дифференцирования образа (8):
$$\frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}[e^{-|x|}](y) = (-i)^2\mathcal{F}[x^2e^{-|x|}](y).$$
Согласно полученному реультату из 1 пункта при $\alpha = 1$:
$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$
Дважды дифференцируя эту функцию по y, находим:
$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$
$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(3y^2-1)}{(1+y^2)^3}.$$
Тогда
$$\mathcal{F}[x^2e^{-|x|}](y) = (-1)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(3y^2-1)}{(1+y^2)^3} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}.$$

3. Воспользуемся свойством преобразования производной (формула (7)):
$$\mathcal{F}\left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right](y) = (iy)^3\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y).$$
Найдём преобразование Фурье функции $\dfrac{1}{1+x^2}$. Эта функция чётная, поэтому:
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\,dx.$$
Используем табличный интеграл Лапласа:
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\beta|}.$$
Следовательно,
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|y|}.$$
Окончательно получаем:
$$\mathcal{F}[f](y) = (iy)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|y|} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,y^3e^{-|y|}.$$

Задача 2.2. Доказать, что преобразование Фурье сдвинутой функции имеет вид:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y}\,\hat{f}(y), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y)$.

Доказательство. По определению прямого преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha) e^{-ixy}\,dx.$$

Выполним замену переменной $t = x - \alpha$. Тогда $x = t + \alpha$, $dx = dt$, и пределы интегрирования не изменяются:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+\alpha)y}\,dt.$$

Разложим экспоненту на множители:

$$e^{-i(t+\alpha)y} = e^{-ity} \cdot e^{-i\alpha y}.$$

Множитель $e^{-i\alpha y}$ не зависит от переменной интегрирования t, поэтому его можно вынести за знак интеграла:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity}\,dt.$$

Оставшийся интеграл в точности равен преобразованию Фурье исходной функции $\hat{f}(y)$. Следовательно,

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y}\,\hat{f}(y).$$

Замечание. Данное свойство показывает, что сдвиг сигнала во временной области на величину α приводит лишь к появлению фазового множителя $e^{-i\alpha y}$ в его спектре. При этом амплитудный спектр $|\hat{f}(y)|$ не изменяется.

Задача 2.3. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, и пусть функция

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

удовлетворяет условию $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Доказать, что

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = -\frac{i}{y}\,\hat{f}(y),$$

где $\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y)$.

Доказательство. 1. В силу основной теоремы анализа и непрерывности f, функция $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. Применим к функции $\varphi(x)$ свойство преобразования Фурье производной (7). Условия свойства выполнены: φ непрерывна и дифференцируема, а её производная f абсолютно интегрируема по условию. Получаем:

$$\mathcal{F}[\varphi'](y) = iy\,\mathcal{F}[\varphi](y).$$

Так как $\varphi'(x) = f(x)$, это равенство эквивалентно:

$$\hat{f}(y) = iy\,\mathcal{F}[\varphi](y).$$

3. Рассмотрим случай $y \neq 0$. Из равенства непосредственно выражаем искомое преобразование:

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = \frac{1}{iy}\,\hat{f}(y) = -\frac{i}{y}\,\hat{f}(y).$$

4. Рассмотрим случай $y = 0$. По определению:

$$\mathcal{F}[\varphi](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

В силу условия $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и абсолютной интегрируемости f, оба интеграла существуют. Формулу $-\frac{i}{y}\hat{f}(y)$ при $y = 0$ следует понимать в предельном смысле. Можно показать, что предел $\lim_{y\to 0} \mathcal{F}[\varphi](y)$, вычисленный по полученной формуле, согласуется с прямым значением $\mathcal{F}[\varphi](0)$, что завершает доказательство.

Таким образом, для всех $y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = -\frac{i}{y}\hat{f}(y).$$

Задача 2.4. Найти преобразование Фурье функции (прямоугольного импульса):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. 1. Функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной, ограниченной и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 < +\infty.$$

Функция является чётной: $f(-x) = f(x)$.

2. По определению прямого преобразования Фурье (1):

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

В силу чётности $f(x)$ и нечётности функции $\sin(xy)$ (мнимой части экспоненты), интеграл от мнимой части по симметричному промежутку равен нулю. Поэтому преобразование сводится к косинус-преобразованию Фурье:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx.$$

3. Поскольку $f(x) = 0$ при $x > 1$, верхний предел интегрирования меняется:

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} \cos(xy)\,dx.$$

Вычисляем данный интеграл (при $y \neq 0$):

$$\int_{0}^{1} \cos(xy)\,dx = \left.\frac{\sin(xy)}{y}\right|_{0}^{1} = \frac{\sin y}{y}.$$

При $y = 0$ интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int_{0}^{1} \cos(0)\,dx = \int_{0}^{1} 1\,dx = 1.$$

Объединяя результаты, получаем:

$$\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin y}{y}, & y \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & y = 0. \end{cases}$$

Функция $\frac{\sin y}{y}$ (ядро Дирихле) доопределена по непрерывности в нуле: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, что согласуется с нашим результатом. Таким образом, преобразование Фурье можно записать в единой форме:

$$\mathcal{F}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin y}{y} \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}.$$

6. Заключение. В рамках представленной работы исследованы основные понятия и свойства преобразования Фурье, а также методы его применения для решения дифференциальных уравнений. В теоретической части рассмотрены определения интеграла Фурье, прямого и обратного преобразований, а также их частных случаев — косинус- и синус-преобразований. Особое внимание уделено свойствам преобразования Фурье: линейности, непрерывности, связи с дифференцированием, формуле обращения, свойству сдвига и преобразованию интеграла.

Практическая часть работы была направлена на применение полученных теоретических знаний для решения конкретных задач. Вычислены преобразования Фурье для функций. Доказаны свойства преобразования сдвинутой функции и связи преобразования функции с преобразованием её интеграла. Представленные примеры демонстрируют, как свойства преобразования Фурье используются для сведения дифференциальных операций к алгебраическим действиям в частотной области.

Полученные результаты подтверждают, что преобразование Фурье является эффективным методом для решения задач математической физики и анализа. Практическое применение рассмотренных методов показывает связь между теоретическими конструкциями функционального анализа и конкретными вычислительными процедурами решения прикладных задач.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Бельхеева Р. К. 2014. Преобразование Фурье в примерах и задачах. Новосибирск, РИЦ НГУ, 81.
2. Волков В. А. 2014. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона. Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 32.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 544.
4. Кудрявцев Л. Д. 2021. Курс математического анализа. Том 3. Москва, Юрайт, 351.
5. Романова Л. Д., Шаркунова Т. А., Елисеева Т. В. 2015. Интегральные преобразования. Пенза, Изд-во ПГУ, 76.

Поступила в редакцию 18.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Науменко Наталия Николаевна – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 245–248.

Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование

Рудофилов И. М.
iheljabkjd@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается понятие двойного интеграла как одного из основных объектов математического анализа функций нескольких переменных. Изложены геометрический и физический смысл двойного интеграла, его основные свойства и методы вычисления. Показана связь теоретических конструкций с практическими задачами, возникающими в физике, механике и численном моделировании. Особое внимание уделено практической реализации контроля знаний: представлена концепция теста, направленного на проверку понимания ключевых понятий, анализа области интегрирования и выбора порядка интегрирования. Описана интерактивная реализация теста с использованием связки LuaLaTeX и HTML, позволяющая автоматизировать процесс проверки знаний. Работа демонстрирует междисциплинарный подход, соединяющий математическую теорию, методику преподавания и веб-технологии.

Ключевые слова: двойной интеграл, геометрический смысл, физическая интерпретация, область интегрирования, полярные координаты, тестирование, LuaLaTeX, HTML, MathJax переменных

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2025. Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 245–248.

---

1. Введение. Двойные интегралы являются одним из ключевых понятий математического анализа функций нескольких переменных и находят широкое применение в различных разделах математики и прикладных наук. Они используются при вычислении площадей и объёмов, определении массы и центра тяжести пластин с переменной плотностью, а также при моделировании физических процессов в механике, теплопередаче и электродинамике.

Важной особенностью двойного интеграла является его геометрическая и физическая интерпретация, позволяющая связать абстрактные математические выражения с наглядными образами и прикладными задачами [4]. Существенную роль при вычислении двойных интегралов играет корректное описание области интегрирования, выбор порядка интегрирования и, при необходимости, переход к другим системам координат, в частности к полярным координатам [2].

Несмотря на формальную строгость определения двойного интеграла, на практике наибольшие затруднения у обучающихся вызывает не сам процесс вычисления, а понимание смысла интеграла и анализ области интегрирования. В связи с этим особую актуальность приобретает использование интерактивных и тестовых форм контроля знаний, позволяющих оценить глубину понимания теоретического материала и способность применять его в стандартных и нестандартных ситуациях. Данная статья представляет собой попытку системного изложения теории двойных интегралов и демонстрации практического инструмента для проверки их усвоения.

2. Основные понятия и свойства двойных интегралов.

Пусть на плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана функция $f(x, y)$, интегрируемая по Риману. Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральных сумм, если он существует, и обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в вычислении объёма тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и по бокам цилиндрической поверхностью, построенной над областью D, при условии, что $f(x, y) \geq 0$ на D. В случае, когда функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, интеграл интерпретируется как алгебраическая сумма соответствующих объёмов.

Если рассматривать физическую интерпретацию, то при заданной плотности $\rho(x, y)$ двойной интеграл

$$\iint\limits_D \rho(x, y)\, dx\, dy$$

описывает массу плоской пластины, занимающей область D [3]. Аналогичным образом двойные интегралы применяются для нахождения координат центра тяжести, моментов инерции и других физических характеристик.

Важным частным случаем является интеграл от единицы:

$$\iint\limits_D 1\, dx\, dy,$$

© Рудофилов И. М., 2025

который равен площади области D [4]. Это свойство подчёркивает связь двойного интеграла с геометрическими характеристиками плоских фигур.

На практике вычисление двойных интегралов сводится к вычислению повторных интегралов. Если область D имеет вид $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

При этом порядок интегрирования может быть изменён при выполнении соответствующих условий существования интеграла [5].

Существенную роль при вычислении двойных интегралов играет корректное описание области интегрирования. В более сложных случаях область D задаётся неравенствами, зависящими от переменных, что требует анализа её геометрической структуры и осознанного выбора порядка интегрирования [1].

Для областей, обладающих круговой симметрией, целесообразно использовать переход к полярным координатам, при котором двойной интеграл принимает вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_0^{R(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Появление множителя r связано с якобианом перехода к новой системе координат [2].

Таким образом, теория двойных интегралов объединяет строгие аналитические определения с наглядными геометрическими и физическими интерпретациями, а также требует внимательного анализа области интегрирования и выбора оптимального метода вычисления [3, 5].

3. Методика и инструмент для контроля знаний. Практическая часть работы посвящена применению теоретических положений, связанных с двойными интегралами, в форме интерактивного тестирования. Основной целью теста является проверка не механического запоминания формул, а глубины понимания смысла интеграла, умения анализировать область и выбирать метод решения.

Тест состоит из 10 вопросов, охватывающих следующие темы: геометрическая и физическая интерпретация, свойства, вычисление повторных интегралов, описание области, переход к полярным координатам. Ниже приведён полный перечень вопросов теста в текстовой форме, сопровождаемый скриншотами их реализации в интерактивном HTML-интерфейсе.

1. Дана функция $f(x, y) = x + y$. Что геометрически выражает двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, если $f(x, y) \ge 0$ на области D?

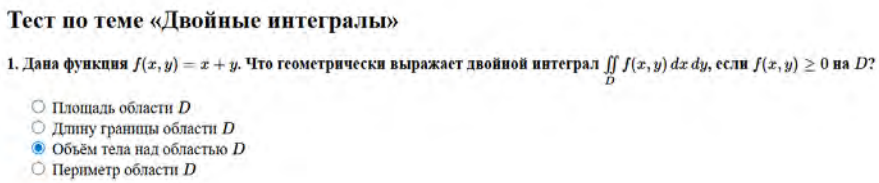


Рис. 1. Вопрос 1 в интерактивном тесте.

2. Какая из записей корректно задаёт повторный интеграл для вычисления $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, если область D задана условиями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$?

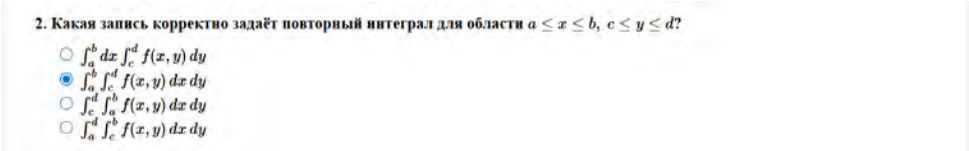


Рис. 2. Вопрос 2 в интерактивном тесте.

3. Пусть область D ограничена линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$. Какой из интегралов соответствует вычислению $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$?

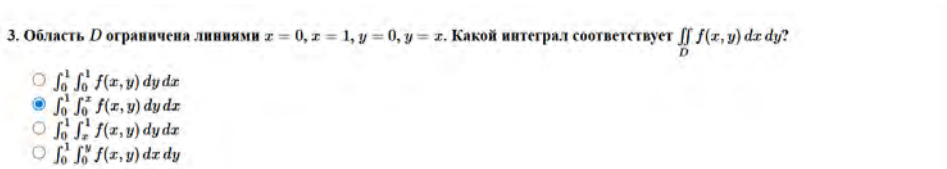


Рис. 3. Вопрос 3 в интерактивном тесте.

4. В каком случае допустима перестановка порядка интегрирования?

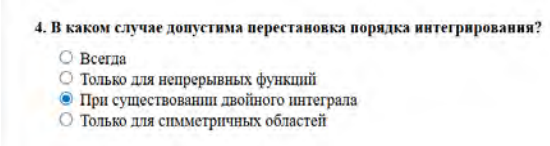


Рис. 4. Вопрос 4 в интерактивном тесте.

5. Чему равен двойной интеграл $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$, где D — плоская область?

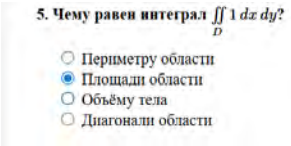


Рис. 5. Вопрос 5 в интерактивном тесте.

6. Какая область наиболее удобна для перехода к полярным координатам?

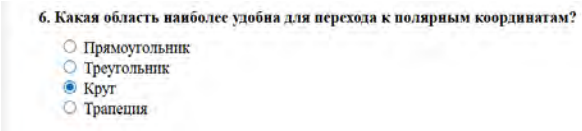


Рис. 6. Вопрос 6 в интерактивном тесте.

7. Пусть плотность пластины задана функцией $\rho(x, y)$. Какой физический смысл имеет интеграл $\iint\limits_D \rho(x, y)\,dx\,dy$?

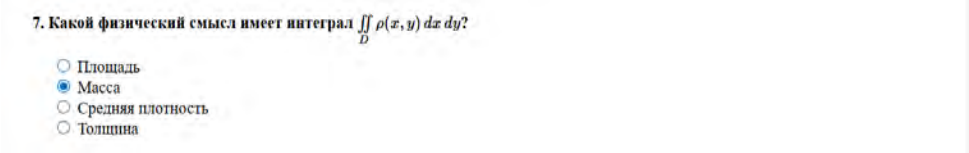


Рис. 7. Вопрос 7 в интерактивном тесте.

8. Какой множитель появляется при переходе к полярным координатам?

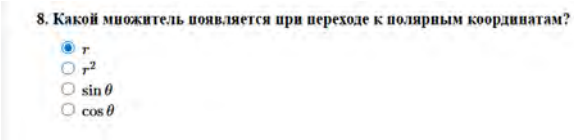


Рис. 8. Вопрос 8 в интерактивном тесте.

9. Какой из интегралов соответствует вычислению площади круга радиуса R?

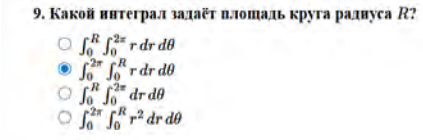


Рис. 9. Вопрос 9 в интерактивном тесте.

10. В чём заключается основная сложность вычисления двойных интегралов?

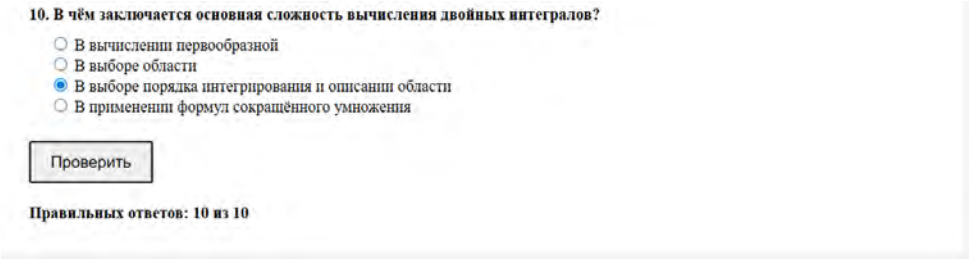


Рис. 10. Вопрос 10 в интерактивном тесте.

Для реализации интерактивной версии использована связка LuaLaTeX, Lua и HTML. В процессе компиляции основного документа Lua-скрипт генерирует HTML-файл, содержащий полный текст теста, варианты ответов в виде радиокнопок и JavaScript-код для мгновенной проверки. Математические формулы отображаются с помощью библиотеки MathJax, что обеспечивает их качественное представление в браузере, как показано на скриншотах.

4. Заключение. В статье рассмотрено понятие двойного интеграла, его геометрический и физический смысл, основные свойства и методы вычисления. Показано, что двойной интеграл служит мощным инструментом как для теоретических исследований, так и для решения прикладных задач в физике, механике и компьютерном моделировании.

Особое внимание уделено методическому аспекту: разработке теста, направленного на проверку понимания, а не формального воспроизведения материала. Предложенный тест позволяет диагностировать типичные ошибки, связанные с анализом области интегрирования и выбором порядка интегрирования.

Практическая реализация теста в виде интерактивного HTML-приложения, автоматически генерируемого из LaTeX-источника, демонстрирует современный подход к созданию электронных обучающих ресурсов. Использование LuaLaTeX и MathJax обеспечивает корректное отображение математических формул как в печатной статье, так и в веб-интерфейсе.

Таким образом, работа вносит вклад как в изложение теоретических основ двойных интегралов, так и в разработку практических инструментов для контроля знаний, что может быть полезно в учебном процессе при изучении курса математического анализа.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Демидович Б. П., Марон И. А. 1987. Основы вычислительной математики. М., Наука, 664 с.
2. Фихтенгольц Г. М. 2003. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., Физматлит, 864 с.
3. Кудрявцев Л. Д. 2006. Математический анализ. Т. 2. М., Физматлит, 720 с.
4. Никольский С. М. 1983. Курс математического анализа. М., Наука, 560 с.
5. Зорич В. А. 2019. Математический анализ. Ч. 2. М., МЦНМО, 704 с.

Поступила в редакцию 28.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудофилов Илья Максимович – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 249–254.

Немного о пространстве L_2

Короплясов К. Р.
korop.kir5@mail.ru

Аннотация. В работе вводятся основные понятия пространства L_2, необходимые для применения методов функционального анализа к задачам математической физики: скалярное произведение, норма, ортогональность и полнота. На примере одномерной задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями показано построение решения методом разделения переменных. Решение представлено в виде ряда по ортогональной системе собственных функций, доказана его принадлежность пространству L_2 и приведены аналитическая и численная проверки, а также графическое представление приближённого решения

Ключевые слова: метод разделения переменных, норма, ортогональность, полнота, пространство L_2, скалярное произведение, уравнение теплопроводности,

Для цитирования: Короплясов К. Р. 2025. Немного о пространстве L_2. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 249–254.

---

1. Введение. Во многих физических задачах нас интересуют не отдельные числа, а функции. Например, как распределяется температура вдоль стержня или как она меняется со временем. Пространство L_2 вводится для того, чтобы с такими функциями можно было работать строго и удобно. В этом пространстве функции можно складывать, умножать на число и сравнивать между собой, оценивая, насколько они близки. Именно поэтому пространство L_2 широко используется при решении задач теплопроводности и других задач математической физики.

2. Пространство L_2 и используемые в задаче понятия

При решении задачи теплопроводности методом разделения переменных возникает необходимость работать с функциями, заданными на отрезке, и рассматривать их разложения по ортогональным системам. Для этого используется пространство L_2, а также связанные с ним понятия скалярного произведения, нормы и ортогональности.

2.1 Определение пространства L_2

Определение 2.1.[2] *Пусть X — множество, на котором задана мера μ. Функция f, определённая на X, называется функцией с интегрируемым квадратом на X, если существует (конечен) интеграл*

$$\int_X |f(x)|^2 \, d\mu.$$

Совокупность всех функций с интегрируемым квадратом на X обозначается $L_2(X, \mu)$ и называется пространством L_2.

Это определение означает, что пространство L_2 состоит из функций, у которых существует интеграл от квадрата функции. В таком случае, суммарная энергия, связанная с такой функцией, конечна. Поэтому функции из L_2 используются для описания реальных физических процессов, в которых энергия также должна быть конечна, иначе сам процесс не может существовать.

2.2 Скалярное произведение и норма в L_2

Определение 2.2.[2] *В пространстве $L_2(X, \mu)$ скалярным произведением функций f и g называется число*

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x) \, d\mu.$$

При этом для любых функций $f, g, h \in L_2(X, \mu)$ и любого числа α выполняются следующие свойства:

1. $(f, g) = (g, f)$;
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
3. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$;
4. $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$.

По смыслу скалярное произведение функций в пространстве L_2 полностью аналогично скалярному произведению векторов: оно показывает, насколько два объекта направлены в одну сторону. В задачах теплопроводности оно используется для нахождения коэффициентов разложения решения по собственным функциям. Именно с его помощью определяется, какой вклад каждая синусоида вносит в общее распределение температуры.

© Короплясов К. Р., 2025

Определение 2.3.[2] *Норма функции $f \in L_2(X, \mu)$ определяется формулой*

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu \right)^{1/2}.$$

Норма функции в пространстве L_2 — это расстояние от этой функции до нулевой функции. То есть норма показывает, насколько функция отличается от нуля на всём отрезке.

В задачах теплопроводности норма позволяет понять, насколько велика температура на стержне. Если норма со временем уменьшается, значит распределение температуры затухает и стержень охлаждается.

2.3 Ортогональность функций

Определение 2.4.[2] *Функции f и g из пространства $L_2(X, \mu)$ называются ортогональными, если*

$$(f, g) = 0.$$

Ортогональность является аналогом перпендикулярности в геометрии. Так же как перпендикулярные векторы в евклидовом пространстве не имеют общей направленности, ортогональные функции в пространстве L_2 не содержат общих компонент. Ортогональная система функций представляет собой набор функций, которые взаимно независимы друг от друга в смысле скалярного произведения.

2.4 Полнота пространства L_2

Теорема 2.1.[2] *Пространство $L_2(X, \mu)$ полно.*

Полнота пространства L_2 означает, что если последовательность функций из L_2 сходится по норме L_2, то существует функция, являющаяся её пределом, и эта функция также принадлежит пространству L_2. Здесь сходимость по норме означает, что расстояние между функциями последовательности и их пределом стремится к нулю.

Расстояние между двумя функциями в пространстве L_2 показывает, насколько сильно значения одной функции отличаются от значений другой на рассматриваемом отрезке. Если расстояние мало, то значения функций близки, если расстояние велико — различие между ними существенно.

В задаче теплопроводности решение строится как предел частичных сумм ряда по собственным функциям. Полнота пространства L_2 гарантирует, что этот предел существует и задаёт корректное решение задачи.

3. Пример решения задачи теплопроводности в L_2

Рассмотрим задачу теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \tag{1}$$

на отрезке $0 < x < 1$ при $t > 0$ с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \qquad u_x(1, t) = 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Начальная функция $u(x, 0) = x$ принадлежит пространству $L_2(0, 1)$, так как

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} < \infty.$$

Значит, решение корректно искать в виде ряда по ортогональной системе собственных функций в $L_2(0, 1)$ (см. определение).

Решение. Ищем решение задачи теплопроводности методом разделения переменных, предполагая, что

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{3}$$

Подставим (3) в уравнение (1):

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Разделим переменные:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{4}$$

Тогда получаем две задачи:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

а из граничных условий (2) следует

$$X(0) = 0, \qquad X'(1) = 0.$$

Положим $\lambda = k^2$, $k > 0$. Тогда общее решение имеет вид

$$X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

Из условия $X(0) = 0$ получаем $B = 0$, значит

$$X(x) = A\sin(kx).$$

Тогда

$$X'(x) = Ak\cos(kx),$$

и условие $X'(1) = 0$ даёт

$$\cos(k) = 0.$$

Следовательно,

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и собственные функции можно взять в виде

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

В силу ортогональности собственных функций в пространстве $L_2(0,1)$ (см. определение) решение представляется в виде ряда по $\{X_n(x)\}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k_n^2 t} X_n(x).$$

Коэффициенты a_n находятся как проекции начальной функции $f(x) = x$ на собственные функции относительно скалярного произведения (см. определение). Поскольку

$$\int_0^1 X_n^2(x)\,dx = \int_0^1 \sin^2(k_n x)\,dx = \frac{1}{2},$$

получаем

$$a_n = 2\int_0^1 x\sin(k_n x)\,dx.$$

Вычисляя интеграл, окончательно находим

$$a_n = \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Полнота пространства L_2 (см. теорему) гарантирует, что полученный ряд задаёт корректное решение задачи.

Ответ.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}\,\exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right). \tag{5}$$

Проверка. Покажем, что при каждом фиксированном $t > 0$ найденное решение принадлежит пространству $L_2(0,1)$, то есть имеет конечную норму (см. определение):

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx < \infty.$$

Решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k_n^2 t}\sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2},$$

где

$$a_n = \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Обозначим коэффициенты ряда:

$$b_n(t) = a_n e^{-k_n^2 t}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(k_n x).$$

Система $\{\sin(k_n x)\}_{n\geq 1}$ ортогональна (см. определение) в $L_2(0,1)$ и удовлетворяет

$$\int_0^1 \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{1}{2}, & n = m. \end{cases}$$

По формуле Парсеваля получаем

$$\int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(t)|^2.$$

С учётом определения коэффициентов имеем

$$|b_n(t)|^2 = |a_n|^2 e^{-2k_n^2 t},$$

и, следовательно,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2k_n^2 t}.$$

При $t > 0$ выполнено $0 < e^{-2k_n^2 t} \leq 1$, поэтому

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Подставляя a_n, получаем

$$|a_n|^2 = \frac{64}{(2n-1)^4\pi^4},$$

и оценку

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leq \frac{32}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ сходится, сходится и ряд по нечётным индексам, следовательно, правая часть конечна. Значит, $\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} < \infty$ при всех $t > 0$, то есть

$$u(\cdot,t) \in L_2(0,1) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Численная проверка в Maple. Для подтверждения результата вычислим квадрат L_2-нормы по формуле Парсеваля в системе Maple и выведем значения в виде таблицы при различных N. Скриншот результата вычислений приведён на рисунке 1.

```
restart :
with(LinearAlgebra) :

# Пример 2: k_n = (2n-1)Pi/2, a_n = 8(-1)^(n-1)/((2n-1)^2 Pi^2)
# По Парсевалю:
# ||u||^2_{L2} = (1/2) * sum_{n=1..infty} |a_n|^2 * exp(-2 k_n^2 t)
# Частичная сумма по n=1..N даёт численную проверку.

k := n → (2*n− 1) * Pi / 2 :
a := n → 8 * (− 1)^(n− 1) / (((2*n− 1)^2) * Pi^2) :

L2sq_par2 := proc(t, N)
local n,
return (1/2) * add( (a(n))^2 * exp(− 2 * (k(n))^2 * t), n = 1 ..N );
end proc:

t0 := 0.1 :
Ns := [5, 10, 20, 50, 100, 200] :

# Таблица: N и значение ||u||^2_{L2}
Tab := Matrix( nops(Ns), 2 ) :
for i to nops(Ns) do
Tab[i, 1] := Ns[i];
Tab[i, 2] := evalf( L2sq_par2(t0, Ns[i]) );
end do:

Tab;

# Дополнительно можно посмотреть значение при t=0 (должно стремиться к ||f||^2 = int_0^1 x^2 dx = 1/3)
evalf( L2sq_par2(0, 500) );
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 0.2006033603 \\ 10 & 0.2006033603 \\ 20 & 0.2006033603 \\ 50 & 0.2006033603 \\ 100 & 0.2006033603 \\ 200 & 0.2006033603 \end{bmatrix}$$

$$0.3333333332$$

Рис. 1. Табличный вывод в Maple значений квадрата L_2-нормы по формуле Парсеваля при различных N.

Графическое представление решения

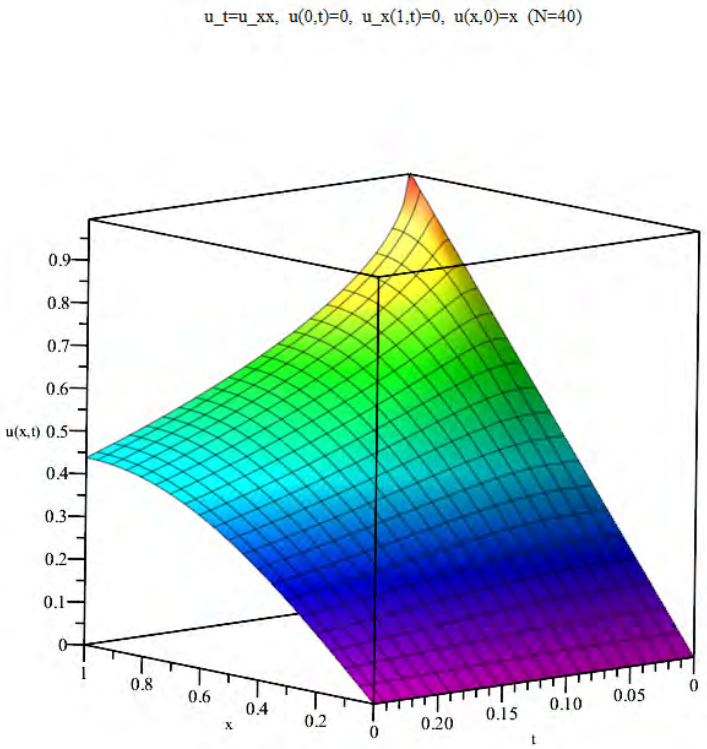


Рис. 2. Графическое представление решения задачи теплопроводности (приближение с помощью конечного числа слагаемых).

На рисунке показано приближённое решение задачи теплопроводности, полученное по формуле (5) как сумма конечного числа членов ряда. Иными словами, точное решение заменяется более простым,

состоящим из нескольких синусоид.

Каждая синусоида описывает простое распределение температуры вдоль стержня. При сложении нескольких таких функций получается приближение реального распределения температуры во времени.

Поскольку используется не бесконечная сумма, а лишь конечное число слагаемых, решение совпадает с точным не полностью. Из-за этого при малых значениях времени и вблизи концов стержня на графике видны небольшие неровности.

Если мы будем увеличивать число слагаемых, то погрешность совпадения с точным решением уменьшится, график будет становиться более гладким, и станет лучше отображать процесс охлаждения.

6. Заключение. В работе введены основные понятия пространства L_2, необходимые для анализа решений задач математической физики. На примере задачи теплопроводности показано применение скалярного произведения, ортогональности и полноты пространства L_2 при построении решения методом разделения переменных.

Благодарность.

Список литературы

1. Дьяконов В. П. 2001. Maple 7. Учебный курс. СПб., Питер, 640 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1981. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 512 с.
3. Константинов М. Ю., Гаврилов С. А. 2010. Функциональный анализ. М., Физматлит, 256 с.
4. Красносельский М. А., Забарян М. М. 1975. Основы функционального анализа. М., Наука, 320 с.
5. Рудин У. 1974. Функциональный анализ / пер. с англ. М., Мир, 432 с.

Поступила в редакцию 30.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Короплясов Кирилл Романович – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию

Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 255–261.

Сравнение интеграла Римана и Лебега. Примеры

Новиков И. А.
goga-novikov.10@inbox.ru

Аннотация. В данной работе проводится сравнительный анализ интегралов Римана и Лебега с акцентом на их определения, свойства и применимость. Рассматриваются ключевые различия в подходах к интегрированию, условия существования интегралов, а также примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману. Анализируются преимущества и недостатки каждого подхода и области их применения. Особое внимание уделяется концепции меры Лебега и ее роли в определении интеграла Лебега. Приводятся примеры, демонстрирующие преимущества интеграла Лебега, особенно в контексте функций с разрывами и пределами интегралов.

Ключевые слова: интеграл Римана, интеграл Лебега, мера Лебега, интегрируемость, функциональный анализ, теория меры, разрывные функции

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2025. Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 245–248.

---

1. Введение. Интегралы Римана и Лебега занимают важное место в математическом анализе и теории функций, предлагая различные подходы к определению и вычислению интеграла. Интеграл Римана исторически предшествовал интегралу Лебега и до сих пор широко используется благодаря своей наглядности и простоте применения к достаточно гладким функциям. Однако он имеет ограничения при работе с функциями, имеющими разрывы или сложную структуру.

Интеграл Лебега, в свою очередь, является более мощным инструментом, позволяющим интегрировать значительно более широкий класс функций, включая те, которые не интегрируемы по Риману. Он использует понятие меры, что позволяет корректно определять интеграл для функций, заданных на множествах со сложной структурой. Понимание различий и связей между этими двумя типами интегралов необходимо для глубокого изучения математического анализа и его приложений.

2. Интеграл Римана. Пусть дан отрезок $[a, b]$. Разбиением T этого отрезка называется упорядоченный набор точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, [4] таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим длину i-го отрезка разбиения как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Диаметром разбиения (или мелкостью разбиения) называется величина:

$$\lambda(T) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i.$$

Суммы Дарбу – верхняя и нижняя оценки.

Определение 1. *Для заданного разбиения T и ограниченной на $[a, b]$ функции $f(x)$ определяются верхняя (S) и нижняя (s) суммы Дарбу:*

$$S(f, T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad \text{где} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$s(f, T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i, \quad \text{где} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Здесь M_i и m_i – верхняя и нижняя границы функции f на соответствующем отрезке.

Интеграл Римана как предел.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если существует число I, такое что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любого разбиения T с $\lambda(T) < \delta$ выполняется:*

$$|S(f, T) - I| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |s(f, T) - I| < \varepsilon.$$

Это число I называется интегралом Римана[1] функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Критерий интегрируемости.

Определение 3. *Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, такое что:*

$$S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon.$$

© Новиков И. А., 2025

Альтернативная формулировка связана с понятием колебания функции.

Колебание функции.

Определение 4. *Для каждого подотрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определим:*

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Тогда функция f интегрируема по Риману, если сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно мелком разбиении.

3. Классы функций, интегрируемых по Риману. Непрерывность и интегрируемость.

Определение 5. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она обязательно интегрируема по Риману. Это связано с тем, что непрерывные функции равномерно непрерывны на замкнутом интервале, что позволяет сделать колебания ω_i сколь угодно малыми.*

Кусочно-непрерывные функции.

Определение 6. *Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она имеет конечное число точек разрыва первого рода, то есть точки, в которых существуют конечные левый и правый пределы функции. Такие функции также являются интегрируемыми по Риману.*

Монотонные функции и интегрируемость.

Определение 7. *Если функция $f(x)$ монотонна (возрастающая или убывающая) на $[a, b]$, то она обязательно интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Пример неинтегрируемой функции.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема по Риману на любом интервале, поскольку в любой окрестности точки содержатся как рациональные, так и иррациональные числа, и верхняя и нижняя суммы не совпадают.

4. Свойства интеграла Римана.

1. Линейность Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрирумы на $[a, b]$, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. Аддитивность Для $a < c < b$, при условии, что $f(x)$ интегрируема по Риману на каждом из интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$, выполняется:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

3. Интегрирование неравенств Если $f(x) \le g(x)$ на $[a, b]$ и обе функции интегрируемы, то:

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx.$$

4. Теорема о среднем значении Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$, такая что:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

5. Интегрирование по частям Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы, то:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

6. Абсолютная интегрируемость Если $f(x)$ интегрируема по Риману, то и $|f(x)|$ тоже является интегрируемой функцией. Обратное утверждение будет неверно.

5. Интеграл Лебега. Пусть $\phi(x)$ – простая функция, принимающая значения y_n на измеримых множествах A_n, где $n = 1, \ldots, N$. Тогда интеграл Лебега от ϕ по множеству A определяется следующим образом [3]:

$$\int_A \phi(x)\, d\mu = \sum_{i=1^n} y_n \mu(A_n)$$

где μ – мера Лебега.

Интеграл от неотрицательной функции.

Определение 8. *Для неотрицательной измеримой функции f, интеграл Лебега определяется как:*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sup\left\{\int_A \phi(x)\, d\mu : \phi \text{ – простая функция, } 0 \le \phi(x) \le f(x) \text{ для всех } x \in A\right\}.$$

Альтернативно, можно представить f как предел возрастающей последовательности простых функций $\phi_n(x)$, где $\phi_n(x) \to f(x)$ поточечно. Тогда:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A \phi_n(x)\, d\mu$$

Общий случай.

Для произвольной измеримой функции f определяются её положительная и отрицательная части $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ и $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Если оба интеграла $\int_A f^+(x)\, d\mu$ и $\int_A f^-(x)\, d\mu$ конечны, то f называется интегрируемой по Лебегу на множестве A.

Интеграл Лебега тогда определяется как

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A f^+(x)\, d\mu - \int_A f^-(x) d\mu.$$

6. Свойства интеграла Лебега. Предположим, что все интегралы существуют и конечны.

1. Линейность: Для измеримых функций f, g, которые интегрируемы по Лебегу на множестве A, и для произвольных скаляров $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:

$$\int_A (af + bg)\, d\mu = a\int_A f\, d\mu + b\int_A g\, d\mu$$

2. Аддитивность по множествам: Если $A_1, A_2 \subseteq A$ – измеримые, попарно непересекающиеся множества, то:

$$\int_{A_1 \cup A_2} f\, d\mu = \int_{A_1} f\, d\mu + \int_{A_2} f\, d\mu$$

В общем случае, при разбиении измеримого множества A на семейство измеримых подмножеств $\{A_k\}$:

$$\int_A f\, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f\, d\mu$$

3. Неравенства и теоремы сравнения: Пусть функции f, g – измеримые и почти всюду выполняется

$$f(x) \le g(x) \quad \text{для почти всех } x \in A,$$

и обе функции интегрируемы по Лебегу [5]. Тогда:

$$\int_A f\, d\mu \le \int_A g\, d\mu$$

4. Теоремы монотонности и Леви о сходимости:

   - Монотонная сходимость: Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ возрастает почти всюду и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

- Теорема Леви о мажорированной сходимости: Пусть $f_n \to f$ почти всюду на A и существует интегрируемая функция g, такая что:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{для всех } n \text{ и п.в. } x \in A,$$

тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

5. Совпадение интегралов по Лебегу и Риману: Если функция f – ограниченная и одновременно интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, то она также интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, и её интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f(x) \, dx.$$

6. Функции, интегрируемые по Лебегу, но не по Риману: Например, функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману на $[0, 1]$, поскольку она разрывна в каждой точке этого интервала. Однако она интегрируема по Лебегу и её интеграл равен нулю:

$$\int_{[0,1]} f(x) \, d\mu = 0.$$

7. Мера Лебега. Мера Лебега – это обобщение понятия длины (в $\mathbb{R}$), площади (в $\mathbb{R}^2$) и объема (в $\mathbb{R}^3$), позволяющее измерять "размер"более широкого класса множеств, чем просто интервалы, прямоугольники и параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$.

Основные свойства.

- Мера Лебега обнуляется на множествах меры ноль: если существует множество меры нуль $A' \supset A$, такое, что $\mu(A') = 0$, то $\mu(A) = 0$.
- Мера Лебега удовлетворяет аксиомам неотрицательности, счетной аддитивности и трансляционной инвариантности. Она также удовлетворяет аксиоме нулевой меры.
- Мера Лебега является мерой на всём пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть для измеримого пространства $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$: $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Пример вычисления меры Лебега.
Формула для измерения компактного прямоугольника:
Для прямоугольника (параллелепипеда) вида $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, мера Лебега равна

$$\mu(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

8. Сравнение интегралов Римана и Лебега: преимущества и недостатки.

- Интеграл Римана – дробит область по оси x, приближаясь к площади под графиком функции.
- Интеграл Лебега – дробит значения функции по оси y, суммируя меры множеств, где функция принимает определённые значения.

Примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не по Риману.

- Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Не интегрируема по Риману на любом интервале, но по Лебегу её интеграл равен 0, поскольку множество рациональных чисел имеет меру нуль [2].

- Функция на Канторовом множестве:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

где C – Канторово множество (меры нуль). Не интегрируема по Риману, но по Лебегу – да, её интеграл равен 0.

Интеграл Лебега является более общим, так как «игнорирует» редкие разрывы – если множество точек разрыва имеет меру нуль, функция всё равно интегрируема. Поскольку интеграл Лебега оперирует мерой подмножеств, а не значениями функции в отдельных точках, такие множества не влияют на результат интегрирования. В отличие от этого, интеграл Римана чувствителен даже к очень редким разрывам.

9. Предельные переходы под знаком интеграла: сила теорем Лебега. Проблема с предельным переходом в интеграле по Риману. Требуются очень сильные условия, например, равномерная сходимость, для обмена предела и интеграла.

Теорема Фату. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, и пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных измеримых функций на X, сходящаяся поточечно почти всюду к функции f. Тогда*

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. *Если $\{f_n(x)\}$ – последовательность измеримых функций, сходящаяся почти всюду к функции $f(x)$, и существует интегрируемая по Лебегу функция $g(x)$, такая что и $\forall n, \quad |f_n(x)| \leq g(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu.$$

Пример. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n, x \in [0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, а интеграл:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Здесь предел интеграла не равен интегралу предельной функции, так как условия равномерной сходимости не выполнены. Теорема Лебега помогает в случаях с мажорантой.

Теорема Фату – говорит о неравенстве, связывающем пределы и интегралы, в случаях, когда мажоранты нет.

Теорема Леви о монотонной сходимости – Обеспечивает равенство пределов и интегралов для монотонных последовательностей функций.

10. Геометрическая интерпретация интегралов.

Интеграл Римана.

Площадь под графиком $y = f(x)$, получаемая разбиением области по x, сумма площадей маленьких прямоугольников.

Интеграл Лебега.

Суммирование значений функции, основанное на мерах множеств:

- Разбиваем по значениям функции $f(x)$ (по оси y).
- Для каждого интервала значений находим меру множества $\{x : f(x) \in \text{интервал}\}$.
- Умножаем на соответствующее значение.

11. Преимущества и недостатки каждого подхода.

Интеграл Римана.

Преимущества: Простая и наглядная геометрическая интерпретация. Хорошо подходит для непрерывных и кусочно-непрерывных функций.

Недостатки: Ограничен по типам функций (редкие разрывы мешают интегрируемости). Меньшая универсальность.

Интеграл Лебега.

Преимущества: Более общий, расширяет класс интегрируемых функций. Мощные теоремы о пределе (ТЛМС, Фату, Леви).

Недостатки: Требуется теория меры.

12. Области применения интегралов.

Интеграл Римана.

- Физика и инженерия – расчет работы, центров масс, моментов инерции.
- Решение дифференциальных уравнений.
- Когда функции непрерывны или кусочно-непрерывны.

Интеграл Лебега.

- Теория вероятностей – математическое ожидание.
- Функциональный анализ – пространства L^p.
- Обработка сигналов и изображений, при необходимости интеграл с разрывами или сложной структурой.

13. Примеры.

- Пример 1 (преимущество интеграла Римана).

  Пусть $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$. Эта функция непрерывна на интервале и является классическим примером, который легко интегрировать по Риману. Интеграл равен

  $$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

  Для непрерывных функций на отрезке интеграл по Риману – очень удобен и просто вычисляется.

- Пример 2 (ограничение интеграла Римана).

  Рассмотрим функцию

  $$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рациональное}, \\ 0, & x \text{ – иррациональное}. \end{cases}$$

  Она разрывна на множестве $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, которое плотно в [0,1]. Поэтому она не является риманинтегрируемой . Функции, разрывные только на множестве меры ноль, остаются интегрируемыми по Риману, что удобно для анализа «пункторазрывных» функций с малым множеством разрывов.

- Пример 3 (преимущество интеграла Лебега).

  Пусть

  $$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

  Множество рациональных чисел имеет меру ноль, поэтому почти всюду функция равна 0, и её интеграл по Лебегу равен 0. В этом случае Лебег успешно справляется с функциями, разрывными на множестве меры ноль, где интеграл по Риману затруднителен.

- Пример 4 (сложность вычисления) интеграла Лебега.

  Рассмотрим функцию

  $$l(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

  Эта функция измерима по Лебегу на $[0,1]$. Ее интеграл Лебега существует и равен

  $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,d\mu = \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

  Хотя интеграл Лебега этой функции существует и конечен, этот пример демонстрирует, что измеримость и существование интеграла Лебега сами по себе не всегда упрощают аналитическое вычисление. В данном случае пришлось использовать знания из анализа (вычисление несобственного интеграла) чтобы получить результат. Кроме того, хотя интеграл и существует, функция не ограничена в окрестности нуля, что может создавать определенные трудности при анализе ее свойств.

Пример, где оба интеграла не справляются. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{иррациональный}, \\ 0, & x - \text{рациональный}. \end{cases}$$

Это функция, которая в точности совпадает с функцией $f(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. В этом случае:

Она разрывна на множестве $[0, 1]$, где разрывы расположены на множестве, которое имеет меру, отличную от нуля. Тогда она не является ни римман-интегрируемой, ни измеримой, поскольку она не может быть аппроксимирована простыми функциями с помощью интегральных методов в стандарте. Функция не интегрируема по Риману, так как множество ее точек разрыва (то есть весь отрезок [0, 1]) имеет меру 1, а не меру нуль.

Существование функций, для которых оба классических подхода не работают, подчёркивает необходимость расширения теории.

6. Заключение. В заключение, данная курсовая работа была посвящена детальному сравнительному анализу интегралов Римана и Лебега, с акцентом на практическое применение и понимание концепции меры Лебега. Исследование выявило ключевые различия, преимущества и недостатки каждого из подходов, а также продемонстрировало на конкретных примерах ситуации, в которых интеграл Лебега является более мощным и гибким инструментом. В частности, было установлено, что интеграл Римана хорошо подходит для функций с конечным числом точек разрыва, обеспечивая относительную простоту вычислений, но оказывается неприменимым к функциям с более сложной структурой разрывов, таким как функция Дирихле. В свою очередь, интеграл Лебега расширяет возможности интегрирования за счет использования меры Лебега, позволяя интегрировать более широкий класс функций, для которых интеграл Римана не существует, хотя и ограничивается измеримыми функциями. Примеры, рассмотренные в работе, подтверждают, что интеграл Лебега предоставляет осмысленные результаты для функций, вроде функции Дирихле. Особое внимание уделено пониманию концепции меры Лебега через процесс «суммирования» значений функции и подчеркнута важность теоремы о мажорируемой сходимости для упрощения вычисления пределов интегралов.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа. Ч. 1. Основные операции анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон ; пер. с англ. Д. Е. Меньшова. – 2-е изд. – Москва : Физматгиз, 1962. – 344 с.
2. Колмогоров, А. Н. Математический анализ / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Наука, 1976. – 512 с.
3. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 431 с.
4. Зорич, В. А. Математический анализ. Ч. 1 / В. А. Зорич. – Москва : МЦНМО, 2019. – 576 с.
5. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов. - Москва : Наука, 1974. - 656 с.

Поступила в редакцию 30.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Новиков Игорь Андреевич – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию