Студенческий математический журнал, 2023 С. 7–11.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Д. Ю. Овчаров

E-mail: 146934@bsu.edu.ru

Аннотация. Данная статья посвящена изучению линейных пространств - фундаментального понятия в линейной алгебре и математическом анализе. Основной целью статьи было решение задач на использование различных понятий, связанных с линейными пространствами, таких как: линейные пространства, их подпространства, базисы и размерность, линейная зависимость и независимость. Конечно тема «Линейные пространства» охватывает большое количество материала, однако в нашей статье мы ограничимся лишь теми определениями, которые мы использовали при решении задач.

Ключевые слова: линейные пространства, аксиомы линейных пространств, линейная зависимость, базис, размерность, конечномерное пространство

Для цитирования: Овчаров Д. Ю. 2023. Линейные пространства. Студенческий математический журнал. 2023: 7–11.

---

1. Введение. Линейные пространства являются одним из фундаментальных понятий в математике и имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Они обеспечивают абстрактную структуру для изучения и анализа векторов, операций над ними и линейных преобразований.

Линейные пространства представляют собой наборы элементов, называемых векторами, на которых определены операции сложения и умножения на скаляр. Они обладают рядом особых свойств, таких как ассоциативность и коммутативность операций, наличие нулевого вектора и обратного элемента.

Изучение линейных пространств имеет фундаментальное значение для понимания и решения различных математических и прикладных задач. Они широко применяются в алгебре, геометрии, физике, экономике, компьютерной графике, машинном обучении и других областях.

Учитывая важность линейных пространств, введем основные понятия теории линейных пространств.

2. Понятие и аксиомы линейных пространств. Линейные подпространства. В книге [2] приведены следующие определения:

Определение 1.1. Непустое множество L элементов $x, y, z, \dots$ называется *линейным, или векторным, пространством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, причем

1) $x + y = y + x$ (коммутативность),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),

3) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля),

4) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, то $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

2. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента x на число α), причем

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность),

2) $1 \cdot x = x$ (существование единичного элемента),

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность),

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Приведем следствия из аксиом линейных пространств:

1. $0 \cdot x = 0$.

2. $(-1) \cdot x = -x$.

3. $\alpha \cdot 0 = 0$.

4. Если $\alpha x = \beta x$ и $x \neq 0$, то $\alpha = \beta$.

Определение 1.2. Непустое множество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к определенным в L операциям сложения и умножения на скаляр.

То есть, $L' \subset L$ – подпространство, если из $x, y \in L'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L'$ при любых α и β.

Определение 1.3. Подпространство, отличное от L и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется *собственным.*

3. Линейная зависимость. В книге [2] приведены следующие понятия, связанные с линейной зависимостью:

Определение 1.3. Выражение вида

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

называется *линейной комбинацией* $x_1, x_2, \dots, x_n$ множества E.

Определение 1.4. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства L называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \tag{1}$$

В противном случае, элементы называются *линейно-незавимыми.*

Определение 1.5. Бесконечная система элементов $x_1, x_2, \dots$ пространства L называется *линейно-независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Согласно книге [3], приведем теорему о линейной зависимости:

Теорема 1.1. Система из k векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Пусть векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ - линейно-зависимы. Тогда по определению существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots, \alpha_k x_k = 0$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2 - \dots = \alpha_k x_k.$$

Разделим выражение на α_1:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot x_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot x_k,$$

то есть вектор x_1 линейно выражается через $x_2, \dots, x_k$.

Обратно: Пусть один из векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно выражается через остальные. Например,

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_k x_k.$$

Перенесем x_1 в правую сторону. Тогда

$$-x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0.$$

Коэффициент при x_1 равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ - линейно зависимы.

Теорема доказана.

4. Базис и размерность линейных пространств. В книгах [1, 2, 3, 4] приведено следующее понятие размерности линейного пространства:

Определение 1.6. Если в пространстве L можно найти n линейно-независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно-зависимы, то говорят, что *пространство L имеет размерность n* и обозначают это $\dim E$ При этом пространство называют *конечномерным.*

Согласно книге [2], приведем понятия бесконечномерного линейного пространства и базиса линейного пространства:

Определение 1.7. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно-независимых элементов, то говорят, что *пространство L бесконечномерно.*

Определение 1.8. *Базисом* в $n-$мерном пространстве L называется любая система из n линейно-независимых элементов.

5. Множества в линейных пространствах. В книге [1] приведены следующие определения множеств в линейных пространствах:

Определение 1.9. Пусть E - линейное пространство. Тогда множество $A \subset E$ называется *выпуклым*, если $\lambda A + \mu A \subset A$ для всех $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, таких что $\lambda + \mu = 1$.

Определение 1.10. Множество в линейном пространстве E называется *уравновешенным*, если $\lambda A \subset A$ для всех $|\lambda| \leq 1$.

Определение 1.11. Множество называется абсолютно выпуклым, если оно выпукло и уравновешенно.

Определение 1.12. *Выпуклой (уравновешенной, абсолютно выпуклой) оболочкой* множества A из пространства E называется наименьшее выпуклое (уравновешенное, абсолютно выпуклое) множество, содержащее A.

6. Задачи на доказательство того, что множество является линейным пространством.

Задача. Является ли векторным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над полем $\mathbb{C}$ множество $l_p (0 < p < \infty)$ - комплексных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, для которых ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ сходятся?

Решение.

Проверим выполнение аксиом линейного пространства из определения 1.1.:

1) Операция сложения: для любых $x, y \in l_p$ имеем, что $(x+y)_k = x_k+y_k (k \in \mathbb{N})$. Это означает, что сумма двух последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ и $(y_1, y_2, \dots)$ определяется как $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ и принадлежит l_p, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$ сходится, поскольку ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$ сходятся.

2) Коммутативность сложения: для любых $x, y \in l_p$ имеем:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots) = y + x.$$

Следовательно коммутативность сложения доказана.

3) Ассоциативность сложения: для любых $x, y, z \in l_p$ имеем:

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) + (z_1, z_2, \dots) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z + 2, \dots) =$$

$$= (x_1, x_2, \dots) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots) = x + (y + z).$$

Таким образом, операция сложения ассоциативна.

4) Существование нулевого элемента: существует такая нулевая последовательность $0 = (0, 0, \dots) \in l_p$ такая, что $\forall x \in l_p$ имеем

$$x + 0 = (x_1, x_2, \dots) + (0, 0, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = x.$$

Таким образом, $\exists 0 \in l_p$, такой, что $x + 0 = x$.

5) Существование противоположного элемента: для любого $x \in l_p$ существует последовательность $-x \in l_p$ такая, что

$$x + (-x) = (x_1, x_2, \dots) + (-x_1, -x_2, \dots) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots) = (0, 0, \dots) = 0.$$

6) Операция умножения на скаляр: для любого $x \in l_p$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем $(\alpha x)_k = \alpha x_k$. Это означает, что умножение последовательности x на скаляр α определено как $(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$ и принадлежит множеству l_p, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p$ сходится, поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ сходится.

7) Ассоциативность умножения на скаляр: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любого $x \in l_p$ имеем:

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \dots) = \alpha\beta(x_1, x_2, \dots) = (\alpha\beta)x.$$

Таким образом, операция умножения в l_p ассоциативна.

8) Дистрибутивность умножения на скаляр: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y \in l_p$ имеем:

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots) =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots) = \alpha x + \alpha y$$

и

$$(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots) = \alpha x + \beta x.$$

Значит, операция умножения на скаляр дистрибутивна.

9) Существование единичного элемента: для любого $x \in l_p$ и $\alpha = 1$ имеем:

$$\alpha x = 1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = x.$$

Следовательно, существует единичный элемент в l_p.

Таким образом, все аксиомы выполнены, значит множество l_p образует линейное пространство.

Задача. Является ли линейным пространством множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $x(a) = 1$?

Решение.

Предположим, что множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $x(a) = 1$, является линейным пространством. Тогда должны выполняться все аксиомы из определения 1.1.

Проверим выполнение аксиомы сложения на заданном множестве. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - функции, непрерывные на $[a, b]$ и удовлетворяющие условию $x(a) = 1$. Тогда функция $(f + g)(a)$ должна принадлежать множеству. Поскольку $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 1 + 1 = 2$, то, она не удовлетворяет условию $x(a) = 1$, а значит, не принадлежит множеству.

Следовательно, множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $x(a) = 1$, не является линейным пространством.

7. Задачи на исследование функций на линейную зависимость.

Задача. Исследовать на линейную зависимость

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \cos^2 x,\ f_4(x) = \sin^2 x.$$

Решение.

Так как $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то $f_1(x) = f_3(x) + f_4(x)$, следовательно, $f_1(x) = 0 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x) + 1 \cdot f_4(x)$. То есть $f_1(x)$ - есть линейная комбинация остальных функций. Поэтому, согласно теореме 1.1., эта система функций линейно зависима.

Задача. Доказать линейную независимость системы функций

$$1,\ \sin x,\ \cos x.$$

Решение. Для доказательства линейной независимости системы функций $1, \sin x, \cos x$ нужно показать, что они не могут удовлетворять нетривиальной линейной комбинации. Пусть α, β, γ — произвольные константы. Составим линейную комбинацию этой системы функций и приравняем ее к нулевому вектору:

$$\alpha + \beta \sin x + \gamma \cos x = 0.$$

Докажем, что это соотношение может выполняться только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Рассмотрим значение линейной комбинации при $x = 0$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin 0 + \gamma \cos 0 = \alpha + 0 + \gamma = 0.$$

Значит, $\gamma = -\alpha$. Рассмотрим теперь значение выражения при $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin \frac{\pi}{2} + \gamma \cos \frac{\pi}{2} = \alpha + \beta \cdot 1 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\beta = -\alpha$. Далее, возьмем $x = -\dfrac{\pi}{2}$:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin(-\frac{\pi}{2}) + \gamma \cos(-\frac{\pi}{2}) = \alpha - \beta = 0.$$

Значит, $\alpha = \beta$.

Таким образом, мы получили, что $\alpha = -\beta = -\gamma$ и $\alpha = \beta$, что возможно при $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, $\gamma = 0$. Поскольку $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то система функций линейно независима.

8. Задача на базис и размерность.

Задача. Доказать, что система векторов $\vec{a}_1 = (2, 1, -3),\ \vec{a}_2 = (3, 2, -5),\ \vec{a}_3 = (1, -1, 1)$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Так как $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, то достаточно показать, что $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - линейно независимы, так как базис - набор линейно независимых векторов.

Составим линейную комбинацию векторов:

$$\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 = 0.$$

Система векторов будет линейно независимой, если существует тривиальное решение системы:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Найдем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Таким образом, система векторов линейно-независима, а значит она образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

8. Задачи на множества в линейных пространствах.

Задача. Доказать, что если множества A и B выпуклы, то $A + B$ тоже выпукло.

Решение. Пусть A и B - выпуклые множества в линейном пространстве E. То есть, для любых $x_1, x_2 \in A$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, таких что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$, и аналогично для множества B.

Нам нужно показать, что $A+B$ - тоже выпуклое множество. Для этого возьмем произвольные $z_1, z_2 \in A+B$ и $\alpha, \beta \geq 0$ такие, что $\alpha + \beta = 1$. По определению z_1 и z_2 представимы в виде $z_1 = a_1 + b_1$ и $z_2 = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. Тогда:

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) = (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2).$$

Заметим, что $\alpha a_1 + \beta a_2 \in A$ и $\alpha b_1 + \beta b_2 \in B$ по определению выпуклости множеств A и B соответственно. Тогда получаем, что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in A + B$, что и означает, что $A + B$ - выпуклое множество.

Задача. Доказать, что если множества A и B уравновешены, то $A + B$ тоже уравновешено.
Решение. Пусть A и B – уравновешенные множества в линейном пространстве E, то есть для любого $|\lambda| \leq 1$ выполнено $\lambda A \subset A$ и $\lambda B \subset B$. Тогда для любого элемента $x \in A + B$ найдутся элементы $a \in A$ и $b \in B$, такие что $x = a + b$. Заметим, что для любого $|\lambda| \leq 1$ выполнено

$$\lambda x = \lambda a + \lambda b,$$

где $\lambda a \in A$ и $\lambda b \in B$, так как A и B уравновешены. Поэтому $\lambda x \in A + B$, что означает, что множество $A + B$ также является уравновешенным.

5. Заключение. В ходе исследования были проанализированы различные источники, представленные в списке литературы.

В работе были представлены ключевые определения, связанные с линейными пространствами, затронуты понятия линейной зависимости, базиса, размерности. Также было уделено внимание некоторым видам множеств в линейных пространствах. На основе теоретического материала были представлены решенные задачи по теме работы.

Благодарность. *Автор выражает глубокую благодарность моему научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за её неоценимую поддержку и руководство во время написания этой работы.*

Список литературы

1. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В., 2010. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Учебное пособие. М., Либроком, 216.

2. Колмогоров А. Н. 2017. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 217.

3. Проскуряков И. В. 2010. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие. СПб., Лань, 480.

4. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 449.

5. Шерстнева А. И., Ящик О. В. 2010. Линейные пространства. Линейные операторы: учебное пособие. Томск., Издательство Томского политехнического университета, 92.

Поступила в редакцию 31.05.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Овчаров Данил Юрьевич – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 146934@bsu.edu.ru

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: Kovaleva_L@bsu.edu.ru