

Метод зеркальных отображений в теории функций Грина

Дробоног Я. И.
1484717@bsuedu.ru

Аннотация. Работа посвящена методу зеркальных отображений для построения функций Грина уравнения Лапласа в двумерных областях. Дано определение функции Грина внутренней и внешней задач Дирихле. Метод применён к построению функций Грина для полуплоскости, круга, внешности круга и полукруга. Для каждой области приведены явные формулы с выводом. Решены четыре краевые задачи: построение функции Грина для полуплоскости с граничным условием $u(x, 0) = \sin x$, для круга, внешности круга и полукруга. Представлены решения в аналитическом виде, код Maple и трёхмерные визуализации.

Ключевые слова: функция Грина, метод зеркальных отображений, задача Дирихле, уравнение Лапласа, полуплоскость, круг, внешность круга, полукруг

Для цитирования: Дробоног Я.И. Метод зеркальных отображений в теории функций Грина. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*. 2026;5(1):22–28.

1. Введение. Метод зеркальных отображений является одним из наиболее наглядных и эффективных способов построения функций Грина для краевых задач математической физики. Впервые предложенный в электростатике для расчёта полей точечных зарядов в присутствии проводящих поверхностей, он позволяет заменить влияние границы системы фиктивными источниками-изображениями, расположенными симметрично относительно границы таким образом, чтобы граничные условия выполнялись автоматически [1, стр. 15–20], [3, стр. 112–118]. Впоследствии метод получил широкое распространение в теории потенциала, гидродинамике, теплопроводности и других разделах естествознания [2, стр. 320–335], [5, стр. 250–260].

Функция Грина, являющаяся ядром интегрального представления решения краевой задачи, играет фундаментальную роль в современной математической физике. Она позволяет свести решение неоднородного уравнения с произвольной правой частью к вычислению интегралов, что особенно ценно при аналитических исследованиях [4, стр. 78–85]. Для двумерных задач, описываемых уравнением Лапласа, функция Грина допускает наглядную физическую интерпретацию как потенциал точечного источника в ограниченной области с заданными условиями на границе.

Цель настоящей работы – систематическое изложение метода зеркальных отображений для построения функций Грина уравнения Лапласа в двумерных областях и его применение к решению краевых задач Дирихле.

2. Функция Грина внутренней задачи Дирихле. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей $L = \partial D$:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), & M \in D, \\ u(P)|_{P \in L} = f(P), & P \in L, \end{cases}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа.

Функцией Грина $G(M, M_0)$ называется функция, удовлетворяющая условиям:

1. при фиксированном $M_0 \in D$ функция $G(M, M_0)$ как функция точки M удовлетворяет уравнению $\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$;
2. на границе области функция обращается в нуль: $G(P, M_0)|_{P \in L} = 0$;
3. в окрестности точки $M = M_0$ функция имеет особенность типа фундаментального решения уравнения Лапласа [3, стр. 112–115].

Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в двумерном случае представима в виде:

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q, M),$$

где $v(Q, M)$ – гармоническая функция, подбираемая так, чтобы удовлетворить граничному условию.

Метод зеркальных отображений заключается в замене влияния границы области системой фиктивных источников-изображений, расположенных симметрично относительно границы таким образом, чтобы граничные условия выполнялись автоматически [3, стр. 115–120], [4, стр. 80–85].

3. Построение функции Грина для основных областей.

3.1. Полуплоскость. Пусть область D – верхняя полуплоскость $\{y > 0\}$ с границей $\Gamma = \{y = 0\}$. Для задачи Дирихле ($u|_{\Gamma} = 0$) фиктивный источник помещается в точку, симметричную исходному относительно границы, и имеет противоположный знак.

Пусть источник находится в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ с $y_0 > 0$. Поместим фиктивный источник противоположного знака в точку $M_1 = (x_0, -y_0)$, симметричную относительно границы $y = 0$. Фундаментальное решение оператора Лапласа на плоскости:

$$E(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_{MM_0}, \quad \text{где } r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Будем искать функцию Грина в виде суперпозиции полей от реального источника и изображения:

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_{MM_0} + \frac{1}{2\pi} \ln r_{MM_1},$$

где $r_{MM_1} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$.

На границе $y = 0$ имеем $r_{PM_0} = r_{PM_1}$, следовательно, $G(P, M_0) = 0$, что удовлетворяет граничному условию. Таким образом, функция Грина для полуплоскости имеет вид [3, стр. 116–117]:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что на границе $y = 0$ функция обращается в нуль, а в точке источника имеет правильную логарифмическую особенность.

3.2. Круг. Для круговой области радиуса a с центром в начале координат используется инверсия относительно окружности. Если точка источника M_0 находится на расстоянии r_0 от центра, то её изображение M_1 помещается на расстоянии $r_1 = a^2/r_0$ от центра на том же луче.

Введём полярную систему координат. Пусть точка источника M_0 имеет координаты (r_0, ψ_0) , где $0 < r_0 < a$; точка наблюдения M имеет координаты (r, ψ) ; точка на границе P имеет координаты (a, ψ) .

Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + A + B \ln \frac{1}{r_{MM_1}},$$

где r_{MM_0} и r_{MM_1} – расстояния от точки наблюдения до источника и изображения соответственно.

Для точек на окружности справедливо геометрическое соотношение, вытекающее из подобия треугольников:

$$\frac{r_{PM_0}}{r_{PM_1}} = \frac{r_0}{a}.$$

Потребуем выполнения граничного условия на окружности: $G(P, M_0) = 0$. После подстановки и приравнивания коэффициентов при переменной и постоянной частях получаем:

$$B = \frac{1}{2\pi}, \quad A = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{a}.$$

Таким образом, функция Грина для круга имеет вид [3, стр. 118–120]:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} + \ln \frac{r_0}{a} \right), \quad (2)$$

где

$$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \psi_0)}, \quad r_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\psi - \psi_0)}, \quad r_1 = \frac{a^2}{r_0}.$$

На границе $r = a$ справедливо $r_{PM_0}/r_{PM_1} = r_0/a$, откуда непосредственно следует, что $G(P, M_0) = 0$.

3.3. Внешность круга. Для внешней задачи Дирихле в области $D_e = \{r > a\}$ функция Грина должна удовлетворять условию регулярности на бесконечности: $G(M, M_0)$ ограничена при $r \rightarrow \infty$. Используя метод изображений, помещаем фиктивный источник внутри круга в точку M_1 с $r_1 = a^2/r_0 < a$ [3, стр. 120–122]:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} + \ln \frac{r_0}{a} \right), \quad (3)$$

где $r_0 > a$, $r_1 = a^2/r_0 < a$.

При $r \rightarrow \infty$ разность логарифмов стремится к нулю, и функция стремится к конечной константе $\frac{1}{2\pi} \ln(r_0/a)$, что обеспечивает регулярность на бесконечности.

3.4. Полуокруг. Для полуокруга $D = \{0 < r < a, 0 < \psi < \pi\}$ с условиями Дирихле на всей границе функция Грина строится последовательным применением метода изображений: сначала относительно окружности (инверсия), затем относительно диаметра (отражение) [3, стр. 122–124].

Для источника в точке (ρ, θ) с $\theta \in (0, \pi)$ добавим изображение в точке $(\rho, -\theta)$ с противоположным знаком. Тогда функция Грина для полуокруга примет вид:

$$G(r, \psi; \rho, \theta) = G_{\text{кр}}(r, \psi; \rho, \theta) - G_{\text{кр}}(r, \psi; \rho, -\theta), \quad (4)$$

где $G_{\text{кр}}$ – функция Грина для полного круга (2). Проверим свойства построенной функции. На лучах $\psi = 0$ и $\psi = \pi$ функция тождественно равна нулю, так как $G_{\text{кр}}(r, 0; \rho, \theta) = G_{\text{кр}}(r, 0; \rho, -\theta)$ и $G_{\text{кр}}(r, \pi; \rho, \theta) = G_{\text{кр}}(r, \pi; \rho, -\theta)$. На граничной окружности $r = a$ функция также обращается в нуль, поскольку каждое слагаемое $G_{\text{кр}}$ обращается в нуль на окружности независимо от угловой координаты. Особенность функции сохраняется лишь в исходной точке (ρ, θ) , так как симметричная точка $(\rho, -\theta)$ расположена вне рассматриваемого полуокруга и не влияет на характер особенности внутри области.

4. Решение краевых задач.

4.1. Задача 1. Построение функции Грина для полуплоскости.

Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если $u|_{y=0} = \sin x$:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & y > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & -\infty < x < \infty, \\ |u(x, y)| < \infty, & x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Для области $y > 0$ функция Грина $G(M, M_0)$ должна удовлетворять:

1. $\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$ при $y > 0, y_0 > 0$;
2. $G|_{y=0} = 0$ (условие Дирихле на границе);
3. G ограничена при $|M| \rightarrow \infty$.

Используя метод зеркальных отображений, помещаем фиктивный источник противоположного знака в точку $M_1 = (x_0, -y_0)$, симметричную относительно границы $y = 0$. Функция Грина имеет вид (1). Для решения задачи Дирихле необходима нормальная производная функции Грина на границе. Внешняя нормаль к области $y > 0$ на границе $y = 0$ направлена вниз, поэтому $\partial/\partial n = -\partial/\partial y$.

Вычислим производную по y :

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(y + y_0)}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} - \frac{2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right).$$

На границе $y = 0$:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{y_0}{\pi[(x - x_0)^2 + y_0^2]}.$$

Тогда нормальная производная:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{y=0} = -\frac{y_0}{\pi[(x - x_0)^2 + y_0^2]}.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа через функцию Грина выражается формулой:

$$u(x_0, y_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left. \frac{\partial G(x, 0; x_0, y_0)}{\partial n} \right|_{y=0} dx,$$

где $f(x) = \sin x$ – граничное условие. Подставляя нормальную производную, получаем:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

Вычислим интеграл заменой переменной $t = x - x_0$:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t + x_0)}{t^2 + y_0^2} dt.$$

Используем формулу синуса суммы: $\sin(t + x_0) = \sin t \cos x_0 + \cos t \sin x_0$. Первый интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция $\sin t / (t^2 + y_0^2)$ нечётная. Второй интеграл – табличный:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + y_0^2} dt = \frac{\pi}{y_0} e^{-y_0}.$$

Таким образом: $u(x_0, y_0) = \sin x_0 \cdot e^{-y_0}$. Возвращаясь к исходным обозначениям (x, y) , получаем окончательное решение: $u(x, y) = e^{-y} \sin x$.

Проверка: $\Delta u = 0$, $u(x, 0) = \sin x$, функция ограничена. На рисунке 1 представлены графики решения $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ в полуплоскости.

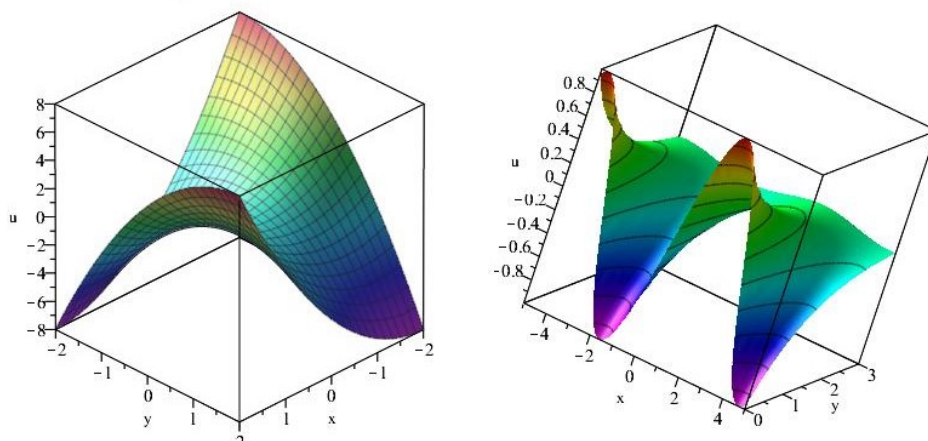


Рис. 1. Графики решения $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ в полуплоскости

Физическая интерпретация: решение $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ описывает стационарное распределение температуры в полубесконечной пластине, на границе которой поддерживается периодическая температура $\sin x$. По координате x решение осциллирует с периодом 2π , по координате y экспоненциально затухает.

4.2. Задача 2. Построение функции Грина для круга. Построить функцию Грина для круга радиуса a с центром в начале координат для задачи Дирихле.

Решение. Функция Грина ищется в виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

где $v(M, M_0)$ – гармоническая функция, подбираемая так, чтобы $G(P, M_0)|_{r=a} = 0$.

Используя метод изображений, помещаем фиктивный источник в точку M_1 с $r_1 = a^2/r_0$. Функция Грина имеет вид (2). На границе $r = a$: $G(P, M_0) = 0$. На рисунке 2 представлена функция Грина для круга при $a = 2$, $M_0 = (1.2, \pi/4)$.

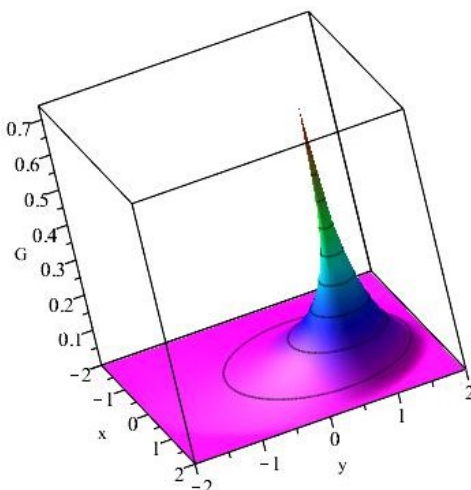


Рис. 2. Функция Грина для круга при $a = 2$, $M_0 = (1.2, \pi/4)$

Цветовая карта показывает распределение значений $G(x, y)$ внутри круга: максимальные значения соответствуют окрестности источника, минимальные – границе круга, где $G = 0$. Хорошо видна логарифмическая особенность в точке источника и плавное убывание к границе.

4.3. Задача 3. Построение функции Грина для внешности круга. Построить функцию Грина для внешности круга радиуса a с центром в начале координат для задачи Дирихле.

Решение. Для внешней задачи Дирихле в области $D_e = \{r > a\}$ функция Грина должна удовлетворять условию регулярности на бесконечности. Используя метод изображений, помещаем фиктивный источник внутри круга в точку M_1 с $r_1 = a^2/r_0 < a$:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} + \ln \frac{r_0}{a} \right),$$

где $r_0 > a$, $r_1 = a^2/r_0 < a$. При $r \rightarrow \infty$ функция стремится к конечной константе $\frac{1}{2\pi} \ln(r_0/a)$, что обеспечивает регулярность на бесконечности. На границе $r = a$: $G(P, M_0) = 0$. На рисунке 3 представлена функция Грина для внешности круга при $a = 2$, $M_0 = (3, \pi/4)$.

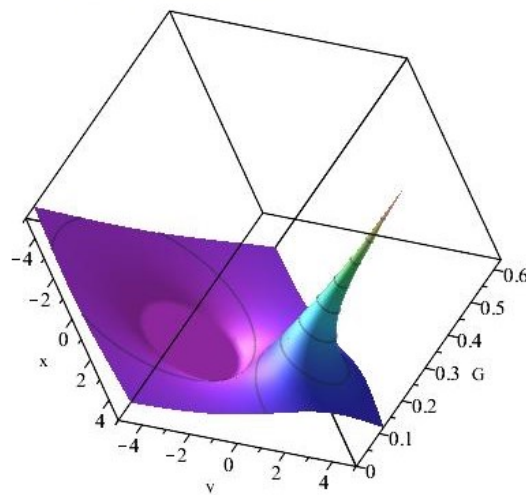


Рис. 3. Функция Грина для внешности круга при $a = 2$, $M_0 = (3, \pi/4)$

На графике видна логарифмическая особенность в источнике, нулевое значение на границе круга и выход на постоянный уровень при удалении от круга.

4.4. Задача 4. Построение функции Грина для полукруга. Построить функцию Грина для полукруга $D = \{0 < r < a, 0 < \psi < \pi\}$ с условиями Дирихле на всей границе.

Решение. Функция Грина строится последовательным применением метода изображений: сначала относительно окружности (инверсия), затем относительно диаметра (отражение):

$$G(r, \psi; \rho, \theta) = G_{\text{кр}}(r, \psi; \rho, \theta) - G_{\text{кр}}(r, \psi; \rho, -\theta),$$

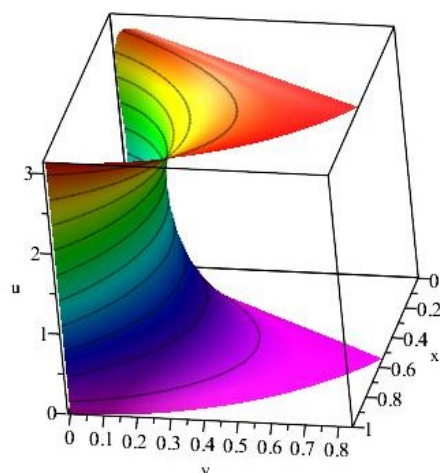
где $G_{\text{кр}}$ – функция Грина для полного круга (2).

Проверка свойств:

- на лучах $\psi = 0$ и $\psi = \pi$: $G = 0$;
- на дуге окружности $r = a$: $G = 0$;
- особенность сохраняется только в точке (ρ, θ) .

На рисунке 5 представлено решение задачи Дирихле в полукруге при $V_0 = 1$.

5. Численная реализация в Maple. Для визуализации теоретических понятий было разработано приложение в системе Maple. Программа позволяет строить функцию Грина для полукруга и решать задачу Дирихле с визуализацией результатов.

Рис. 5. Решение $u(r, \psi)$ в полукруге при $V_0 = 1$

Ниже приведён код Maple для построения функции Грина и решения задачи в полукруге.

Код 1. Программа в Maple для построения функции Грина в полукруге

```

1 restart;
2 with(plots):
3 with(plottools):
4
5 # Параметры задачи
6 a := 1;      # радиус полукруга
7 V0 := 1;     # значение на диаметре
8
9 # Функция Грина для полного круга
10 G_circle := (r, psi, rho, theta, a) ->
11 1/(2*Pi) * ( ln(1/sqrt(r^2 + rho^2 - 2*r*rho*cos(psi - theta)))
12 - ln(1/sqrt(r^2 + a^4/rho^2 - 2*r*a^2/rho*cos(psi - theta)))
13 + ln(rho/a) );
14
15 # Функция Грина для полукруга (метод изображений)
16 G_semicircle := (r, psi, rho, theta, a) ->
17 G_circle(r, psi, rho, theta, a) - G_circle(r, psi, rho, -theta, a):
18
19 # Явное решение задачи Дирихле в полукруге
20 u_solution := (r, psi, a, V0) ->
21 V0 * (1 - 2/Pi * arctan(2*a*r*sin(psi) / (a^2 - r^2))):
22
23 # Построение 3D-графика решения
24 plot3d(
25 u_solution(r, psi, a, V0),
26 r = 0..a,
27 psi = 0..Pi,
28 coords = cylindrical,
29 axes = boxed,
30 labels = ["x", "y", "u"],
31 title = "Решение задачи Дирихле в полукруге",
32 titlefont = [TIMES, BOLD, 14],
33 shading = zhue,
34 transparency = 0.1,
35 orientation = [45, 60]
36 );
37
38 # Построение функции Грина для фиксированного источника
39 rho0 := 0.5:
40 theta0 := Pi/4:
41
42 plot3d(
43 G_semicircle(r, psi, rho0, theta0, a),

```

```

44  r = 0..a,
45  psi = 0..Pi,
46  coords = cylindrical,
47  axes = boxed,
48  labels = ["x", "y", "G"],
49  title = "Функция Грина для полукруга",
50  titlefont = [TIMES, BOLD, 14],
51  shading = zhue,
52  transparency = 0.1,
53  orientation = [45, 60]
54  );

```

Программа позволяет:

- задавать параметры задачи (радиус полукруга a , значение на диаметре V_0);
- строить функцию Грина для полного круга;
- строить функцию Грина для полукруга методом изображений;
- вычислять и визуализировать решение задачи Дирихле;
- отображать трёхмерные графики в цилиндрической системе координат.

6. Заключение. В работе изложен метод зеркальных отображений для построения функций Грина уравнения Лапласа в двумерных областях. Дано строгое определение функции Грина для внутренней и внешней задач Дирихле. Построены явные формулы для полуплоскости, круга, внешности круга и полукруга. Для каждой области приведены подробные выводы и проверки граничных условий. Решены четыре краевые задачи: в полуплоскости с условием $u(x, 0) = \sin x$, а также построение функций Грина для круга, внешности круга и полукруга. Приведён код Maple для численной реализации и построения трёхмерных графиков. Результаты могут применяться в учебном процессе по уравнениям математической физики и теории потенциала.

Благодарность. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Ковалевой Л. А. за ценные советы и поддержку.

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф. 1977. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука, 224 с.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики. 2-е изд., стер. М., Физматлит, 400 с.
3. Гюнтер Н. М. 1953. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 416 с.
4. Миранда К. 1957. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Иностранная литература, 256 с.
5. Соболев С. Л. 1966. Уравнения математической физики. 4-е изд. М., Наука, 444 с.

Поступила в редакцию 22.05.2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Дробонюг Яна Игоревна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию