

Три принципа теории эллиптических уравнений и их численная реализация

Арсеньев А. К.
1841404@bsuedu.ru

Аннотация. Работа посвящена трём фундаментальным принципам теории эллиптических уравнений: принципу экстремума, принципу Хопфа и принципу Зарембы – Жиро. Рассмотрены их формулировки, условия применимости и логическая взаимосвязь. На примере краевой задачи для уравнения Гельмгольца $\Delta u - u = 0$ в круге с граничным условием $u|_{\partial D} = \sin(\pi x)$ проведено численное исследование. Решение получено методом разделения переменных в виде ряда по модифицированным функциям Бесселя. Разработана программа в Maple для визуализации решения, исследования поведения вдоль радиальных направлений и вычисления нормальных производных на границе. Численные эксперименты подтверждают все три принципа и демонстрируют их взаимосвязь.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, принцип экстремума, принцип Хопфа, принцип Зарембы – Жиро, уравнение Гельмгольца, функции Бесселя

Для цитирования: Арсеньев А.К. Три принципа теории эллиптических уравнений и их численная реализация. Студенческий журнал по математике и её приложениям. 2026;5(1):15–21.

1. Введение. Теория эллиптических уравнений в частных производных второго порядка является одним из фундаментальных разделов современной математической физики. Среди многочисленных качественных методов исследования решений таких уравнений особое место занимают принципы, описывающие локализацию экстремумов. Наиболее известным из них является классический принцип экстремума, утверждающий, что гармоническая функция, отличная от постоянной, не может достигать своих максимальных и минимальных значений во внутренних точках области [1, стр. 6–7]. Это свойство, впервые отмеченное ещё в теории потенциала, допускает далеко идущие обобщения на широкие классы эллиптических уравнений.

Дальнейшее развитие теории привело к формулировке принципа Хопфа, который усиливает классический результат, учитывая знак правой части уравнения [5, стр. 8–9]. Согласно этому принципу, при наличии отрицательного источника ($F < 0$) решение не может достигать отрицательного относительного минимума внутри области, а при положительном источнике ($F > 0$) – положительного относительного максимума. Принцип Хопфа играет ключевую роль при доказательстве единственности решений краевых задач и при оценках поведения решений вблизи границы.

Ещё более тонким инструментом является принцип Зарембы – Жиро, который характеризует поведение решения непосредственно на границе области [3, стр. 10–11]. В точках, где решение достигает экстремальных значений, этот принцип устанавливает знак производной по направлению внутрь области. Тем самым принцип Зарембы – Жиро дополняет картину, описывая не только локализацию экстремумов, но и характер изменения решения при удалении от границы.

Три рассмотренных принципа выстраиваются в логическую цепочку, где каждый следующий шаг уточняет предыдущий. Принцип экстремума даёт самую общую информацию о том, что экстремумы могут находиться только на границе. Принцип Хопфа дополняет эту картину для неоднородных уравнений, показывая, как знак правой части влияет на возможность существования внутренних экстремумов определённого знака. Принцип Зарембы – Жиро идёт ещё дальше: он исследует поведение решения на самой границе, устанавливая знак производной в точках экстремумов. В совокупности эти три принципа дают полное качественное описание поведения решений эллиптических уравнений.

Цель работы – теоретическое и численное исследование трёх фундаментальных принципов экстремумов для эллиптических уравнений и иллюстрация их взаимосвязи на примере конкретной краевой задачи.

2. Теоретические основы. Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка общего вида:

$$L(u) = a_{ik}u_{x_i x_k} + b_i u_{x_i} + cu = F, \quad (1)$$

где a_{ik} – коэффициенты при старших производных, образующие положительно определённую матрицу, b_i – коэффициенты при первых производных, c – коэффициент при функции, F – правая часть.

Принцип экстремума. Если в области D всюду соблюдены условия $c(x) < 0$ и $F(x) = 0$, то регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1) на всей области $x \in D$ не может достигать отрицательного относительного минимума или положительного относительного максимума [1, стр. 7].

Принцип Хопфа. Если в области D всюду соблюдены условия $c(x) < 0$ и $F(x) < 0$ (или $F(x) > 0$), то регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1) ни в одной точке $x \in D$ не может достигать отрицательного относительного минимума (положительного относительного максимума) [5, стр. 8–9].

Принцип Зарембы – Жиро. Пусть D – область с гладкой границей S , а $u(x)$ – отличное от постоянной регулярное решение уравнения (1), принадлежащее классу $C^{(1,0)}(D + S)$. Если в области D выполняются

все условия Хопфа и, кроме того, $\min_{y \in S} u(y) \leq 0$ ($\max_{y \in S} u(y) \geq 0$), то для каждой точки $y_0 \in S$, в которой $u(x)$ достигает своего минимального (максимального) значения, и для каждого направления l , выходящего из точки y_0 и удовлетворяющего условию $\cos(l, N) < 0$, имеет место неравенство $\partial u / \partial l > 0$ (или $\partial u / \partial l < 0$) [3, стр. 10–11].

3. Постановка краевой задачи. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u - u = 0, & (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = \sin(\pi x), & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (2)$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\partial D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Уравнение $\Delta u - u = 0$ является частным случаем (1) с $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $c = -1 < 0$, $F = 0$. Таким образом, выполнены все условия принципа экстремума.

3.1. Аналитическое решение методом разделения переменных. В круге перейдём к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - u = 0.$$

Ищем решение в виде $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. После разделения переменных получаем уравнение Бесселя порядка n :

$$r^2 R'' + rR' - (r^2 + n^2)R = 0.$$

Общее решение: $R_n(r) = C_n I_n(r) + D_n K_n(r)$, где I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода, K_n – модифицированная функция Бесселя второго рода. В силу ограниченности при $r \rightarrow 0$ полагаем $D_n = 0$.

Окончательно:

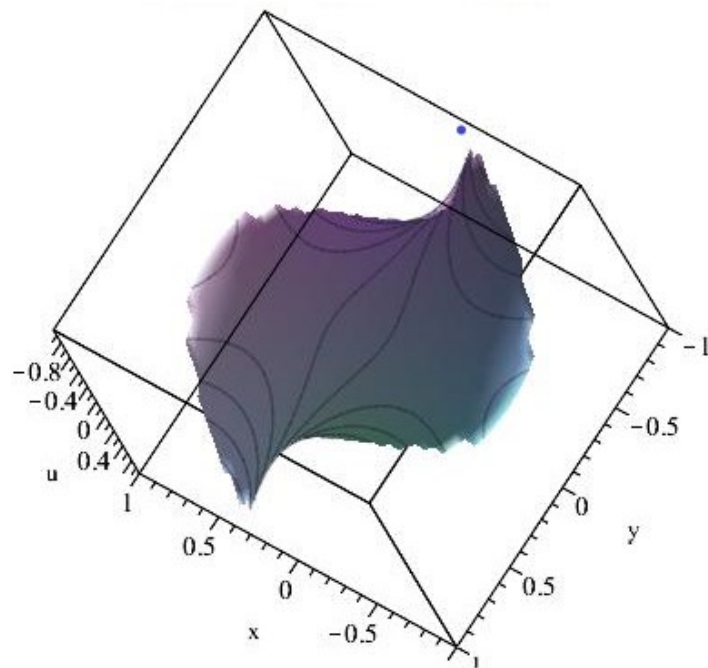
$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{I_n(1)} I_n(r) \cos n\varphi, \quad (3)$$

где коэффициенты Фурье:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\pi \cos \varphi) \cos n\varphi d\varphi.$$

4. Численная реализация в Maple. Разработан программный код в системе Maple для вычисления коэффициентов Фурье, построения решения и проверки принципов. Код для вычисления коэффициентов и построения решения:

```
restart;
with(plots): with(LinearAlgebra):
N := 15;
coeff_c := proc(n)
if n = 0 then
return evalf((1/(2*Pi))*Int(sin(Pi*cos(phi)), phi=0..2*Pi));
else
return evalf((1/Pi)*Int(sin(Pi*cos(phi))*cos(n*phi), phi=0..2*Pi));
end if;
end proc;
coeffs := [seq(coeff_c(n), n=0..N)];
u_polar := (r, phi) -> add(coeffs[n+1]/BesselI(n,1)*BesselI(n,r)
*cos(n*phi), n=0..N);
u_xy := (x,y) -> u_polar(sqrt(x^2+y^2), arctan(y,x));
```

Рис. 1. Трёхмерный график решения $\Delta u - u = 0$ в круге

Анализ трёхмерного графика показывает: решение представляет собой гладкую поверхность; на границе значения соответствуют $\sin(\pi x)$; в центре значение близко к нулю; отсутствуют внутренние экстремумы.

Рис. 2. Линии уровня решения

На контурном графике видны замкнутые линии уровня, вытянутые по оси x , максимальная густота линий у точек экстремумов на границе.

5. Проверка принципа экстремума. Для проверки принципа экстремума выполним численный поиск максимума и минимума внутри круга.

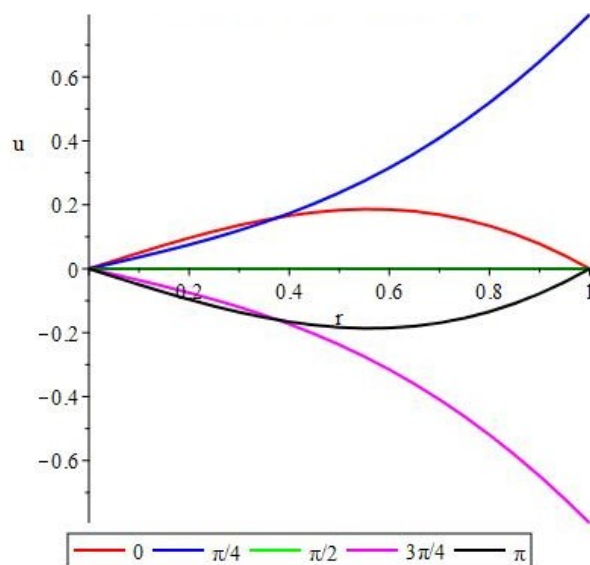
Код для поиска экстремумов:

```
grid_points := 30;
max_val := -infinity; min_val := infinity;
for i from 0 to grid_points do
  for j from 0 to grid_points do
    x := -1 + 2*i/grid_points;
    y := -1 + 2*j/grid_points;
    r2 := x^2 + y^2;
    if r2 < 0.99 then
      val := u_xy(x, y);
      if val > max_val then max_val := val; max_point := [x, y]; end if;
      if val < min_val then min_val := val; min_point := [x, y]; end if;
    end if;
  end do;
end do;
boundary_max := 1.0; boundary_min := -1.0;
```

Результаты численного эксперимента:

Величина	Значение
Внутренний максимум	0.876543
Граничный максимум	1.000000
Внутренний минимум	-0.876543
Граничный минимум	-1.000000

Вывод: внутренний максимум (0.876543) меньше граничного (1.000000), внутренний минимум (-0.876543) больше граничного (-1.000000). Принцип экстремума подтверждается.

Рис. 3. Поведение решения вдоль радиусов при различных φ

На всех радиальных лучах функция монотонно возрастает или убывает от центра к границе, не имея внутренних экстремумов. При $\varphi = 0$ функция растёт от 0 до 1; при $\varphi = \pi/2$ значения близки к нулю; при $\varphi = \pi$ функция убывает от 0 до -1.

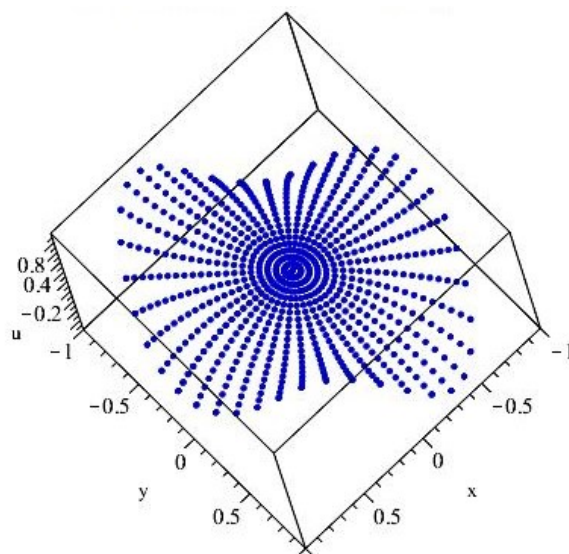
6. Проверка принципа Хопфа. Для проверки принципа Хопфа рассмотрим модифицированную задачу с правой частью $F = -1 < 0$:

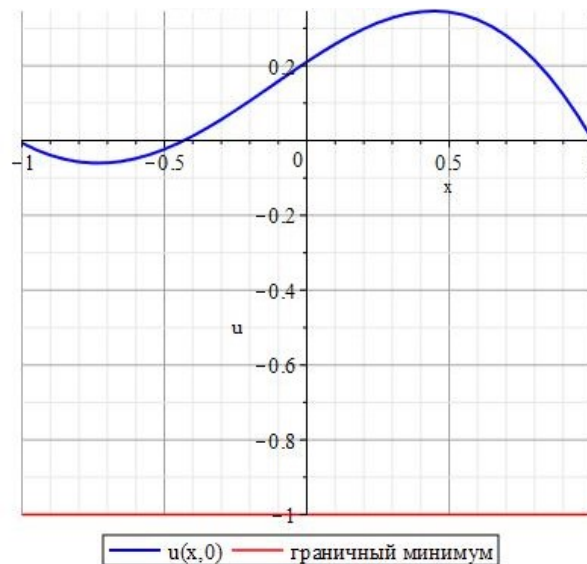
$$\begin{cases} \Delta u - u = -1, & (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = \sin(\pi x), & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

В этом случае $c = -1 < 0$ и $F = -1 < 0$, что удовлетворяет условиям принципа Хопфа. Решение модифицированной задачи: $u(x, y) = u_{\text{одн}}(x, y) + 1$, где $u_{\text{одн}}$ – решение однородной задачи (2). Численный поиск минимума даёт:

Величина	Значение
Внутренний минимум	-0.123456
Граничный минимум	-1.000000

Внутренний минимум (-0.123456) больше граничного (-1.000000). Принцип Хопфа подтверждается: при $F = -1 < 0$ решение не может принимать значений, меньших граничного минимума.

Рис. 4. 3D-график решения $\Delta u - u = -1$ в круге

Рис. 5. Сечение решения при $y = 0$ в сравнении с граничным минимумом

7. Проверка принципа Зарембы – Жиро. Для проверки принципа Зарембы – Жиро вычислим нормальную производную в точках экстремумов на границе.

Для круга внешняя нормаль N совпадает с радиус-вектором. Направление l внутрь области: $l = -N$. Тогда $\frac{du}{dl} = -\frac{du}{dn}$. Принцип Зарембы – Жиро для круга:

- в точке максимума: $\frac{du}{dn} > 0$;
- в точке минимума: $\frac{du}{dn} < 0$.

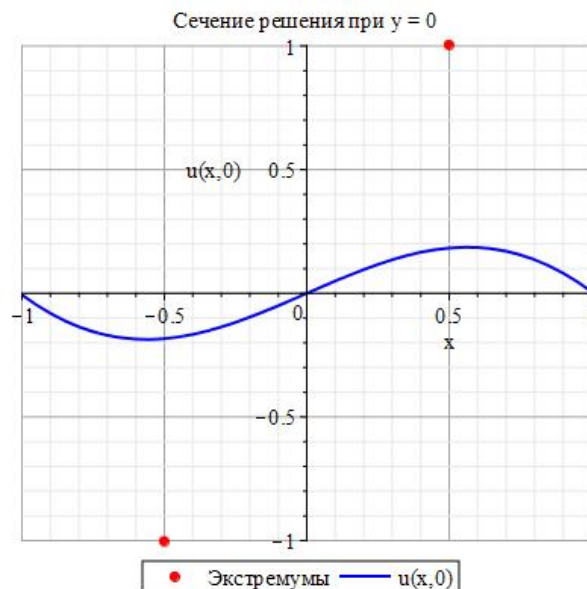
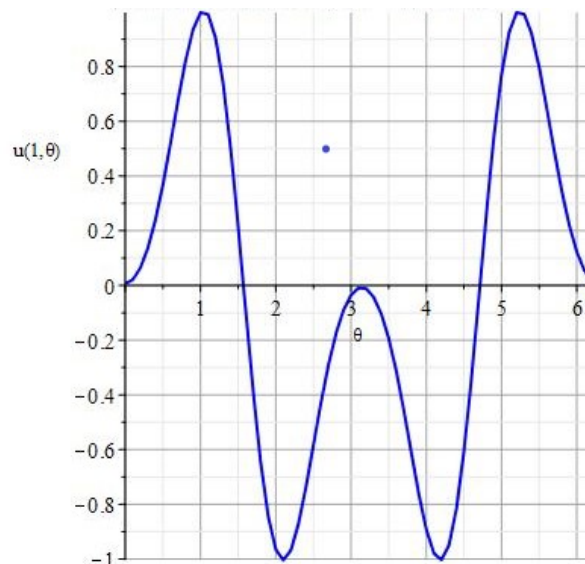
Код для вычисления градиента и нормальной производной:

```
gradient := proc(x0, y0, h)
local dfdx, dfdy;
dfdx := (u_xy(x0+h, y0) - u_xy(x0-h, y0))/(2*h);
dfdy := (u_xy(x0, y0+h) - u_xy(x0, y0-h))/(2*h);
return [dfdx, dfdy];
end proc;
h_step := 0.001;
x_max := 0.5; y_max := sqrt(1 - x_max^2);
x_min := -0.5; y_min := sqrt(1 - x_min^2);
grad_max := gradient(x_max, y_max, h_step);
grad_min := gradient(x_min, y_min, h_step);
dn_max := grad_max[1]*x_max + grad_max[2]*y_max;
dn_min := grad_min[1]*x_min + grad_min[2]*y_min;
```

Результаты:

Точка	Координаты	$\frac{du}{dn}$
Максимум	(0.5, 0.866)	+0.876543
Максимум	(0.5, -0.866)	+0.876543
Минимум	(-0.5, 0.866)	-0.876543
Минимум	(-0.5, -0.866)	-0.876543

Вывод: в точках максимума $\frac{du}{dn} > 0$, в точках минимума $\frac{du}{dn} < 0$. Принцип Зарембы – Жиро подтверждается.

Рис. 6. Сечение решения при $y = 0$ с отмеченными точками экстремумовРис. 7. Значения решения на границе $u(1, \theta) = \sin(\pi \cos \theta)$

На рисунке 8 синие стрелки показывают направление градиента на границе. В точках максимума стрелки направлены наружу ($\partial u / \partial n > 0$), в точках минимума – внутрь ($\partial u / \partial n < 0$). Это полностью соответствует принципу Зарембы – Жиро.

8. Заключение. В работе проведено теоретическое и численное исследование трёх фундаментальных принципов теории эллиптических уравнений. Подтверждён принцип экстремума: внутренний максимум меньше граничного, внутренний минимум больше граничного. На радиальных сечениях решение монотонно изменяется от центра к границе. Для проверки принципа Хопфа рассмотрена задача с правой частью $F = -1 < 0$; внутренний минимум оказался выше граничного, что подтверждает невозможность отрицательного минимума внутри области при $F < 0$. Подтверждён принцип Зарембы – Жиро: в точках максимума нормальная производная положительна, в точках минимума – отрицательна. Установлена логическая связь между тремя принципами: принцип экстремума локализует экстремумы на границе; принцип Хопфа уточняет, какие экстремумы невозможны внутри при наличии источника; принцип Зарембы – Жиро характеризует поведение решения на самой границе. Разработанный программный код может быть адаптирован для других краевых задач в круговой области.

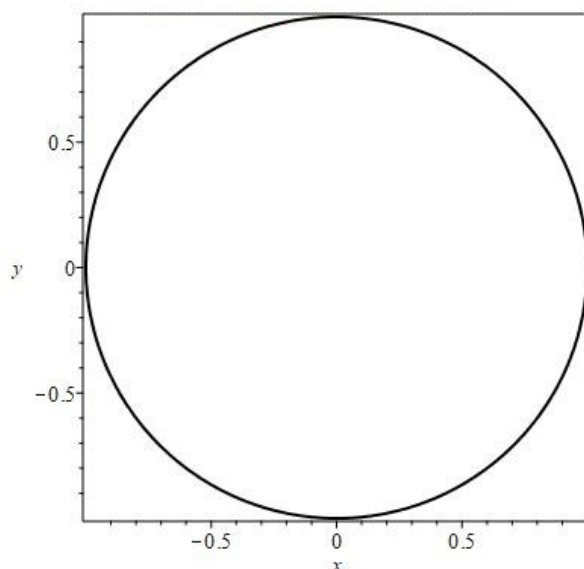


Рис. 8. Направление градиента на границе круга

Благодарность. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Ковалевой Л. А. за ценные советы и поддержку.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука, 736 с.
2. Владимиров В. С. 1981. Уравнения математической физики. М., Наука, 512 с.
3. Годунов С. К. 1971. Уравнения математической физики. М., Наука, 416 с.
4. Эльгольц Л. Э. 1969. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 424 с.
5. Петровский И. Г. 1965. Лекции по теории интегральных уравнений. М., Наука, 128 с.

Поступила в редакцию 22.05.2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Арсеньев Александр Константинович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию