

Математический аппарат теории обработки сигналов и изображений

Тарасова А. С.
tarasova_as@bsuedu.ru

Аннотация. Математический аппарат является универсальным инструментом для анализа, преобразования и синтеза сигналов и изображений. Он является основой для цифрового аппарата и цифровой обработки сигналов. Систематизация ключевых математических концепций, лежащих в основе обработки сигналов, позволяет проследить связь между абстрактным и практическим, а также выявить развитие и взаимосвязь методов.

Ключевые слова: сигнал, функция, вектор, спектр, преобразование Фурье, ряд Фурье

Для цитирования: Тарасова А.С. Математический аппарат теории обработки сигналов и изображений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*. 2026;5(1):5–14.

1. Введение. Одним из сопутствующих факторов компьютерной революции оказалось появление совершенно новых областей исследования. К ним относится цифровая обработка многомерных сигналов, требующая значительных объемов цифровой памяти и соответствующего количества арифметических операций и поэтому получившая развитие лишь в последнее время. Несмотря на сложность, цифровая обработка сигналов уже позволила найти решение ряда важных задач, начиная с компьютерной томографии (методики, позволяющей по проекциям рентгеновского изображения, полученным при различных ориентациях детекторов, выполнять трехмерную реконструкцию органов человеческого тела) и кончая проектированием полей пассивных акустических датчиков и исследованием ресурсов Земли с помощью спутников.

В дополнение к многочисленным блистательным и скромным приложениям цифровая обработка многомерных сигналов имеет также прочное математическое обоснование, позволяющее не только понять уже достигнутое, но и эффективно исследовать новые проблемы по мере их возникновения и успешно их решать [1, 5].

2. Сигнал и его типы. Сигнал – это некоторое средство для передачи информации, а целью обработки сигналов является извлечение этой информации. Так, ансамбли изменяющихся во времени электрических потенциалов, плотность зерен серебра фотографической эмульсии или массивы чисел в памяти ЭВМ представляют собой примеры сигналов. Обычно обработка сигналов включает в себя перенос информации с одного сигнала на другой. Например, с фотографии за счет сканирования можно собрать информацию, дискретизировать ее и записать в память ЭВМ. В этом случае информация переносится с сигнала в виде переменной плотности зерен серебра на пучок видимого света, затем на электрический сигнал и наконец на последовательность чисел, которые в свою очередь характеризуются определенным расположением областей намагниченности на диске ЭВМ [1].

Каждый сигнал – это информация. Не всегда вся информация несет в себе «нужность». Отсюда следует, что сигнал должен обрабатываться и в результате должен быть «очищен», например, при удалении шумов с изображения, происходит потеря данных, должно быть различие между существенным и несущественным в изображении. Для обработки сигналов необходимы математическая и цифровая обработки. Данные понятия тесно связаны между собой. Если под математической обработкой мы понимаем общие теоретические основы, которые описывают сигналы независимо от способа их реализации, то цифровая обработка – это часть общих основ, которые подстраиваются под дискретные и квантовые сигналы, реализуемые на цифровых вычислительных устройствах.

В данной работе рассмотрим ключевые математические концепции, на принципах и законах, которых происходит обработка сигналов. Для начала разберемся с какими типами сигналов нам предстоит работать.

Сигнал может представлять собой последовательность чисел, а может быть представлен многомерным массивом, не трудно догадаться, что и сложность обработки будет зависеть от структуры того или иного типа. Если говорить о изображении, то это двумерный, и вообще говоря, векторный сигнал, несущий огромное количество информации. Кроме того, изображение часто выступает как слабый сигнал, предназначенный для визуального восприятия. При работе с такими сигналами, требуется, чтобы обработка выполнялась в реальном масштабе времени пользователя, т. е. за секунды или доли секунды на один кадр. Цветное изображение, содержащее $500 * 500$ элементов (примерно соответствует телевизионному вещательному стандарту), по современным представлениям – весьма скромное по объему изображение, а ведь это массив в 750 000 байтов, который необходимо обработать за секунды, причем только пересылка этого массива со скоростью 1 Мбайт/с занимает почти секунду [4].

На математическом языке сигналы – это функции одной или более независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а фотографический образ – функция яркости от двух пространственных переменных. По общему соглашению независимой переменной в

математическом представлении сигнала выступает время, хотя в отдельных примерах независимая переменная в сигнале фактически временем не является. Независимая переменная в математической реализации сигнала может быть как непрерывной, так и дискретной.

Сигналы с непрерывным временем определяются на непрерывных промежутках, зависят от непрерывной переменной и обычно называются аналоговыми. Сигналы с дискретным временем, или просто дискретные сигналы, определены в дискретные моменты времени и, как следствие, имеют независимую переменную с дискретными значениями. Тем самым они отождествляются с числовыми последовательностями. Такие сигналы как речь или изображение, могут иметь как непрерывное, так и дискретное представление, и при выполнении определенных условий, эти представления полностью эквивалентны. Кроме независимой переменной, дискретным или непрерывным может быть уровень (величина) сигнала. К цифровым сигналам относят те, у которых дискретны как переменная, так и уровень [2, 5]. Далее следует отметить детерминированные и случайные сигналы. Рассмотрим понятие «детерминированность».

Сигналы детерминированы, значит, что каждый член последовательности однозначно определен математическим выражением, таблицей данных или каким-либо другим правилом. Однако во многих ситуациях процессы, генерирующие сигналы, настолько сложны, что дать точное описание получаемого сигнала невероятно трудно или неудобно, если вообще возможно. В таких случаях полезнее моделировать сигнал как стохастический процесс.

Стохастический сигнал рассматривается как член ансамбля дискретных сигналов, характеризующегося множеством плотностей вероятности. Более конкретно, для определенного сигнала в фиксированный момент времени амплитуда отсчета сигнала определяется подлежащей схемой вероятностей. То есть каждый индивидуальный отсчет $x[n]$ конкретного сигнала считается значением некоторой случайной величины x_n . Ведь сигнал представляется совокупностью случайных величин, по одной на каждый момент времени $n, -\infty < n < +\infty$. Такой набор случайных величин называют случайным процессом, и мы считаем, что конкретная последовательность отсчетов $x[n]$, для $-\infty < n < +\infty$, генерируется случайным процессом, соответствующим сигналу [2].

Также сигналы различаются по своей периодичности. Периодический сигнал – это бесконечное и точное повторение паттерна во времени, в то время как непериодический – это его отсутствие. Разная природа периодичности создает необходимость в правильном выборе математического аппарата для анализа.

И еще одно различие сигналов, которое также влияет на выбор аппарата для их исследования – это их «энергетика». Можно выделить сигналы с конечной энергией, которые существуют ограниченное время, и сигналы с конечной мощностью, которые длятся неограниченное количество времени.

Таким образом, проанализировав, классификацию сигналов, можно сделать выводы о «природе» сигналов и их исходных данных, которые создают базу для выбора правильного математического аппарата. Однако перед этим следует сказать, что данный выбор будет строиться на основе рассмотрения сигналов как специального векторного пространства, в котором каждый сигнал, есть точка или вектор, который мы проанализируем с помощью линейной алгебры и геометрических аналогий. Далее, чтобы ориентироваться в пространстве нам необходима система координат – базис, а разложение сигнала – есть нахождение координат в данной системе.

3. Классическая обработка. Прежде чем перейти к описанию конкретных алгоритмов классической обработки, необходимо ввести математический аппарат, который делает эту обработку возможным. Таким аппаратом являются преобразования Фурье, позволяющие перейти от временного представления сигнала к частотному. Выбор конкретного преобразования зависит от типа сигнала. Поэтому рассмотрим следующие преобразования: дискретно-временной ряд Фурье для периодических сигналов, дискретно-временное преобразование Фурье для непериодических сигналов, ключевое свойство этих преобразований – теорему о свертке, которая лежит в основе частотной фильтрации. И затем вычислительную реализацию – дискретное преобразование Фурье.

3.1. Дискретно-временной ряд Фурье. Рассмотрим N -периодическую последовательность $\tilde{x}[n]$, т. е. $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$, для любых целых чисел n и r . Как и непрерывные периодические сигналы, такие последовательности можно представить рядом Фурье, состоящим из суммы гармонически связанных друг с другом комплексных экспоненциальных последовательностей, т. е. экспонент, частоты которых кратны основной частоте $2\pi/N$, ассоциированной с периодической последовательностью $\tilde{x}[n]$. Периодические комплексные экспоненты имеют вид:

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN], \quad (1)$$

где k – целое число. При этом рядом Фурье называют сумму

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (2)$$

Для представления непрерывного периодического сигнала в виде ряда Фурье нужно бесконечно много комплексных экспонент, а в ряде Фурье N -периодического дискретного сигнала участвует лишь N таких последовательностей. Действительно, гармонически связанные друг с другом комплексные экспоненты $e_k[n]$ из равенства (1) удовлетворяют тождествам: $e_0[n] = e[n]$, $e_1[n] = e_{1+N}[n]$ и т.д., поскольку для любых целых чисел k и l имеют место равенства:

$$e_{k+lN}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+lN)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi ln} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n] \quad (3)$$

Следовательно, множество из N периодических комплексных экспонент $e_0[n], e_1[n], \dots, e_{N-1}[n]$ содержит все комплексные экспоненты, частоты которых кратны $(2\pi)/N$. Таким образом, ряд Фурье периодической последовательности $\tilde{x}[n]$ состоит из линейной комбинации N экспонент:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (4)$$

Чтобы найти коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ряда Фурье последовательности $\tilde{x}[n]$, нужно воспользоваться попарной ортогональностью комплексных экспонент. Умножив равенство (4) на $e^{-j(2\pi/N)rn}$ и просуммировав результат по n от 0 до $N-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)(k-r)n}. \quad (5)$$

Поменяв порядок суммирования в правой части формулы (5), придем к выражению:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \quad (6)$$

Теперь нужно учесть ортогональность комплексных экспонент, которая означает, что

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

Значит, формулу (6) можно записать более коротко:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r]. \quad (8)$$

Таким образом, коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ряда (4) получаются из последовательности $\tilde{x}[n]$ по следующей формуле:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (9)$$

Заметим, что последовательность $\tilde{X}[k]$ тоже N -периодична, так как для любого целого k

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k].$$

Коэффициенты ряда Фурье можно рассматривать как конечную последовательность с ненулевыми отсчетами при $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, заданными формулой (9), или как бесконечную периодическую последовательность, отсчеты которой определяются той же формулой. Ясно, что обе точки зрения допустимы, поскольку для ряда Фурье нужны лишь члены $\tilde{X}[k]$ с номерами $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, составляющими один период. Преимущество интерпретирования коэффициентов как бесконечной периодической последовательности состоит в том, что при такой точке зрения возникает некая двойственность во временном и частотном представлении периодических последовательностей. Формулы (4) и (9) составляют пару анализа-синтеза и называются представлением периодической последовательности в виде дискретного преобразования Фурье. Для удобства эти формулы переписываются через комплексную величину следующим образом:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}, \quad (10)$$

уравнение анализа:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad (11)$$

уравнение синтеза:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}, \quad (12)$$

$\tilde{X}[k]$ и $\tilde{x}[n]$ – периодические последовательности [2].

Определение. Дискретный спектр – набор коэффициентов Фурье, определенных только для частот, кратных основной. Это следствие из периодичности сигнала во времени. Спектр, обладающий свойством дискретности, сосредоточен на конечном наборе частот $\omega_k = \frac{2\pi}{N} * k$, N – период сигнала. Такой спектр называют линейчатым.

Аппарат дискретного ряда Фурье является мощным инструментом для обработки сигналов, однако его область применения ограничена периодическими сигналами. А в реальной жизни мы встречаем сигналы непериодические и ограниченные по времени. И применение данного математического аппарата к таким сигналам приводит лишь к неправильной обработке информации и большому количеству искажений. В связи с этим возникла необходимость в математическом аппарате, который позволяет обрабатывать произвольные, непериодические и непостоянные сигналы.

3.2. Дискретно-временное преобразование Фурье. Разберем задачу о представлении произвольного сигнала $x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$. Многие из последовательностей выражаются через интеграл Фурье вида

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (13)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (e^{-j\omega n}). \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) называют представлением, или преобразованием Фурье, а саму функцию $X(e^{j\omega})$ часто называют Фурье-образом последовательности $x[n]$. Формула (13), обратное преобразование Фурье, представляет $x[n]$ как суперпозицию бесконечно малых комплексных синусоид

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

где ω принимает значения на интервале длины 2π , а $X(e^{j\omega})$ определяется тем, какой вклад в суперпозицию вносит каждая синусоидальная компонента. Хотя ω в соотношении (13) изменяется в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, его можно заменить на любой сегмент длины 2π . Преобразование Фурье (в данном пункте иногда мы будем называть формулу (14) дискретизованным по времени преобразованием Фурье, что является более точным термином) (14) задает правило, вычисляющее $X(e^{j\omega})$ по отсчетам последовательности $x[n]$, т.е. позволяет анализировать $x[n]$ с учетом вклада каждой частотной компоненты, формирующей последовательность посредством (13).

Фурье-образ – комплекснозначная функция от ω . Как и комплексная частотная характеристика (КЧХ), ее можно записать в алгебраической или показательной форме:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (15)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}. \quad (16)$$

Величины $|X(e^{j\omega})|$ и $\angle X(e^{j\omega})$ – соответственно модуль и фаза Фурье-образа. Первую из них называют иногда амплитудным спектром, а вторую – фазовым спектром. Фурье-образ часто также называют спектром Фурье или просто спектром. Левую часть формулы (14) в российской традиции называют спектральной функцией [2].

Равенство (16) неоднозначно определяет фазовый спектр, так как при любом ω к фазе можно добавить $2\pi k$ с $k \in \mathbb{Z}$, не меняя значений комплексной экспоненты. Если нам важна однозначность, то будем считать, что $\angle X(e^{j\omega})$ лежит между $-\pi$ и $+\pi$, и обозначать этот угол через главное значение аргумента комплексного числа $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. В том случае, когда нам предпочтительнее рассматривать фазу как непрерывную функцию от ω , определенную на промежутке $(0, 2\pi)$, мы будем обозначать ее через $\arg[X(e^{j\omega})]$ [2].

Сравнивая формулы $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$ и (14), можно увидеть, что КЧХ линейной стационарной системы не что иное, как Фурье-образ ее импульсной характеристики. Следовательно, импульсная характеристика восстанавливается из КЧХ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (17)$$

Как уже было отмечено, КЧХ является периодической функцией. Аналогично, ее Фурье-образ – тоже 2π -периодическая функция. Действительно, уравнение (14) записано в виде ряда Фурье непрерывной периодической функции $X(e^{j\omega})$, а соотношение (13), выражающее последовательность $[n]$ через периодическую функцию $X(e^{j\omega})$, является интегралом, который используется для определения коэффициентов ряда Фурье. Уравнения (13) и (14) фокусируют наше внимание на представлении последовательности $x[n]$. Тем не менее полезно знать о эквивалентности между рядом Фурье, представляющим непрерывную периодическую функцию, и преобразованием Фурье, представляющим дискретный сигнал, поскольку все известные свойства ряда Фурье можно легко переформулировать для Фурье-образа последовательности.

Мы пока еще не показали явным образом, что формулы (13) и (14) действительно взаимно обратны, но выяснили, что обширный класс сигналов может быть представлен в виде выражения (13). Чтобы продемонстрировать, что интеграл (13) действительно служит обратным преобразованием к сумме (14), мы можем найти $X(e^{j\omega})$, опираясь на определение (14), и подставить результат в формулу (13). Итак, рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n]. \quad (18)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}[n] = x[n]$, если $X(e^{j\omega})$ определена формулой (14). Заметим, что индекс суммирования был изменен на m , чтобы отличать его от переменной в уравнении (13). Если бесконечный ряд в формуле (18) сходится равномерно на множестве определения ω , то его можно почленно проинтегрировать, т. е.

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right). \quad (19)$$

Вычисляя интеграл в круглых скобках, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n],$$

что и нужно было доказать.

Вопрос о представимости сигнала формулой (13) равносильен вопросу о сходимости ряда (14), точнее, нас интересуют условия, при которых ряд (14) сходится, т. е.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \forall \omega,$$

где $X(e^{j\omega})$ – предел при $M \rightarrow \infty$ конечных сумм

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n} \quad (20)$$

Достаточное условие сходимости можно найти следующим образом:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $[n]$ Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ определен на всей числовой прямой. Более того, в этом случае по признаку Вейерштрасса можно показать, что соответствующий ряд равномерно сходится к непрерывной функции от ω . Поскольку устойчивые последовательности абсолютно суммируемы по определению, то для них преобразование Фурье имеет смысл. Кроме того, отсюда следует, что любая устойчивая система имеет конечную непрерывную КЧХ [2].

3.3. Определение понятия свертки. Рассмотрим ключевое свойство рассмотренных выше преобразований – теорему о свертке, которая лежит в основе частотной фильтрации. Особое значение имеет у системы наличие стационарности и линейности. Данные свойства позволяют работать с системами в удобном виде и существенны для приложений обработки сигналов. Класс линейных систем T определяется с помощью принципа суперпозиции уравнением

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \quad (21)$$

Благодаря свойству линейности и возможности представить последовательность в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов, поведение системы определяется ее реакциями на каждый из таких сдвинутых импульсов. Пусть $h_k[n]$ – реакция системы на $\delta[n - k]$. Тогда согласно тождеству

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$

Получаем

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]\right\}.$$

По принципу суперпозиции (21) можно записать

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]. \quad (22)$$

Итак, мы получили, что реакция линейной системы на любую входную последовательность выражается в терминах откликов системы на сигналы $\delta[n - k]$. Если система всего лишь линейна, то отсчеты $h_k[n]$ зависят как от k , так и от n , и помощь, оказываемая уравнением (22) при вычислениях, относительно невысока. Однако можно получить более полезный результат, если к свойству линейности добавить условие стационарности [2]. Свойство стационарности влечет, что если $h[n]$ – реакция системы на $\delta[n]$ (называемая импульсной характеристикой системы), то ее реакция на сигнал $\delta[n - k]$ равна $h[n - k]$. Опираясь на этот факт, уравнение (22) можно переписать в виде

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]. \quad (23)$$

Как следствие этой формулы, отметим, что линейная стационарная система (ЛС-система) полностью определяется своей импульсной характеристикой $h[n]$ в том смысле, что при известной последовательности $h[n]$, опираясь на (23), можно вычислить отклик $y[n]$ на любой поданный сигнал $x[n]$ [2]. Если отсчеты последовательности $y[n]$ зависят от отсчетов $h[n]$ и $x[n]$ по правилу (23), то последовательность $y[n]$ называют (дискретной) сверткой последовательностей $h[n]$ и $x[n]$ и употребляют обозначение:

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (24)$$

Операция дискретной свертки строит последовательность $y[n]$ по двум данным последовательности $h[n]$ и $x[n]$. Уравнение (23) выражает каждый отсчет выходной последовательности через все отсчеты входной последовательности и импульсную характеристику [2]. Дискретная свертка напоминает свертку функций из теории непрерывных линейных систем, определенную с помощью интеграла, однако ее не следует воспринимать как аппроксимацию интегральной свертки. Последняя свертка играет в основном теоретическую роль в непрерывных линейных системах, в то время как дискретная свертка, в дополнение к своей теоретической ценности, часто служит для явной реализации дискретных линейных систем. Поэтому очень важно наработать некоторую интуицию о свойствах дискретной свертки в реальных вычислениях [2].

Изложенная интерпретация уравнения (23) заключается в том, что дискретная свертка является прямым следствием линейности и стационарности системы. Однако несколько иной взгляд на эту формулу подводит нас к весьма важной вычислительной интерпретации. Когда мы смотрим на соотношение (23) как на формулу, вычисляющую отдельный отсчет выходной последовательности, замечаем, что $y[n]$ (т. е. n -ый член последовательности) получается в результате умножения входной последовательности (записанной как функция от k) на последовательность $h[n - k]$, $-\infty < k < +\infty$, а затем при каждом фиксированном n суммируются все произведения $x[k]h[n - k]$ с параметром k в качестве параметра суммирования.

Следовательно, при свертке двух последовательностей для вычисления n -го члена результата используются все отсчеты обеих последовательностей. Ключ к полному пониманию формулы (23) состоит в осознании процесса образования последовательности $h[n - k]$, $-\infty < k < +\infty$, для всех значений n , которые представляют интерес. Чтобы закончить это осмысление свертки, полезно заметить, что

$$h[n - k] = h[-(k - n)]. \quad (25)$$

Теорема о свертке. Пусть $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ и $h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$. Тогда если

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] = x[n] * h[n], \quad (26)$$

то

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (27)$$

Иначе говоря, Фурье-образ свертки последовательностей равен произведению Фурье-образов сворачиваемых компонент. Заметим, что утверждение о временном сдвиге является частным случаем теоремы о свертке, поскольку

$$\delta[n - n_d] \xrightarrow{F} (e^{-j\omega n_d}), \quad (28)$$

и, если $h[n] = \delta[n - n_d]$, то $y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d]$. Следовательно, $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$ и $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$.

Доказательство. Формальный вывод теоремы о свертке легко получается применением определения преобразование Фурье к $y[n]$ в формуле (26). Этот же результат можно интерпретировать как прямое следствие того факта, что комплексные экспоненты являются собственными функциями линейных стационарных систем. Напомним, что $H(e^{j\omega})$ – комплексная частотная характеристика линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$. Кроме того, если $x[n] = e^{j\omega n}$, то $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Иными словами, комплексные экспоненты – собственные функции линейных стационарных систем с собственным значением $H(e^{j\omega})$, совпадающим с Фурье-образом последовательности $h[n]$. По определению интеграла дискретизованное по времени преобразование Фурье, это представление последовательности $[n]$ в виде суперпозиции бесконечного числа комплексных экспонент, т. е.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} d\omega.$$

По определению собственных функций с учетом принципа суперпозиции, соответствующая реакция системы имеет вид

$$y[n] = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k H(e^{jk\Delta\omega}) X(e^{jk\Delta\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

откуда

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

что и утверждается в теореме.

Данная теорема имеет фундаментальное значение, так как она устанавливает, что ресурсоемкий процесс свертки можно представить в виде прохождения сигнала через фильтр или линейную систему, в частотной области все сводится к простому умножению спектров. Для более детального понимания практической значимости данной теоремы, обратимся к следующей интерпретации.

Свертка связывает входной сигнал, выходной сигнал, импульсный отклик. Отсюда важность более детального рассмотрения этого процесса [3].

На рисунке 1 мы видим представление линейной системы с помощью понятий «дельта-функция» и «импульсный отклик». Дельта функция $\delta[n]$ или единичный импульс – это импульс равный 1 при $n=0$, или равный 0 во всех остальных случаях. Далее импульсный отклик $h[n]$ – это отклик системы на единичный импульс. Если системы отличаются по каким-либо параметрам, то соответственно у них будет разный $h[n]$ [3].

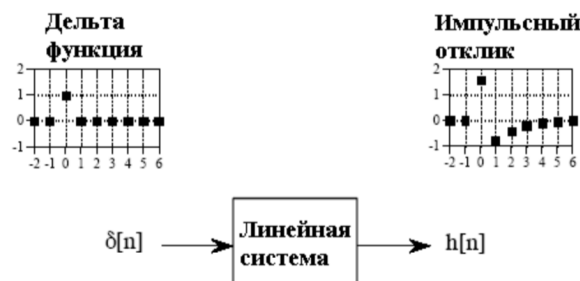


Рис. 1. Определение дельта функции и импульсного отклика

В зависимости от области применения импульсный отклик имеет различные названия. Если речь идет о фильтрации, то его называют ядром фильтра, ядром свертки или просто ядром; в обработке изображений – функцией размыва точки. Однако все перечисленные термины обозначают все то же: сигнал, который системы выдает при подаче на вход дельта функции [3].

Свертка – это математическая операция, преобразующая сигналы. Ее применение обосновано во многих областях математики, в рамках нашего рассмотрения, в линейных системах, где она описывает формируемые связи между сигналами [3].

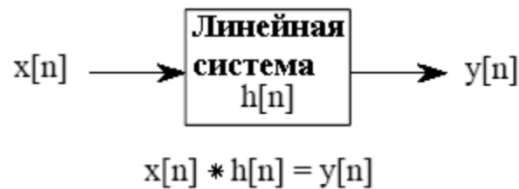


Рис. 2. Как свертка используется в цифровой обработке сигналов (ЦОС)

Рисунок 2 демонстрирует «работу» свертки следующим образом: $x[n] * h[n] = y[n]$. Операция $*$ не является операцией умножения, здесь идет речь как раз о том, что зафиксировано абзацем выше — об операции преобразования сигналов [3].

Перейдем к рассмотрению процессов реализации свертки для низкочастотной и высокочастотной фильтрации на рисунке 3. Мы видим, что на вход подана одна и та же «волна» с присутствием нижних частот, а далее картина разнится. Импульсный отклик и соответственно выходной сигнал уже демонстрируют разный вид полученных кривых [3].

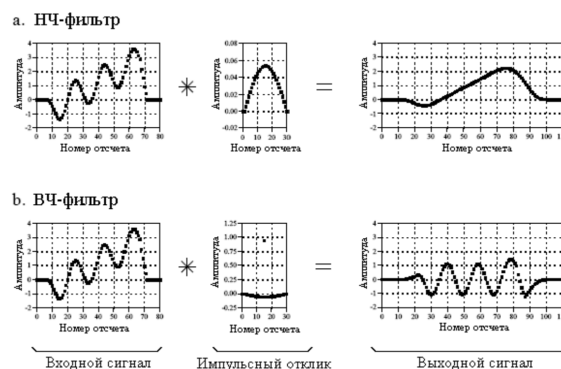


Рис. 3. Примеры высокочастотной и низкочастотной фильтрации использующей свертку

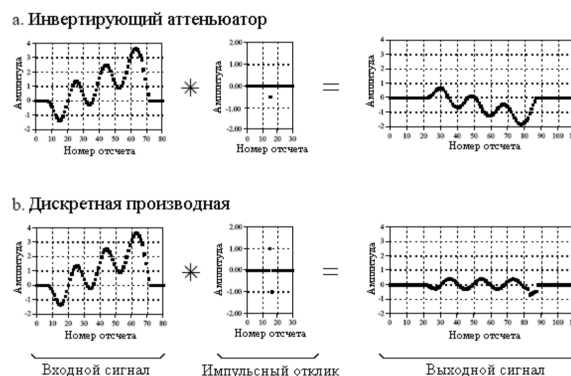


Рис. 4. Примеры сигналов обрабатываемых с помощью свертки

Рассмотрим дополнительные примеры преобразований свертки. Инвертирующий аттенюатор (Рис. 4а) уменьшает амплитуду сигнала, переворачивая его сверху вниз. Дискретная производная или первая разность (Рис. 4б) преобразует выходной сигнал, «удаляя» его наклон [3].

3.4. Дискретное преобразование Фурье. Непосредственное вычисление свертки, однако, редко используется на практике из-за высокой вычислительной стоимости. Гораздо более эффективной стратегией является выполнение этой операции в частотной области. Для этого необходим математический аппарат, осуществляющий переход между временным и частотным представлениями сигналов. Таким аппаратом служит преобразование Фурье. Его фундаментальное значение для задач фильтрации заключается в том, что оно преобразует свертку сигналов во временной области в поэлементное умножение их спектров в частотной области. Рассмотрим этот аппарат подробно.

Начнем с рассмотрения конечной последовательности $x[n]$, чьи отсчеты равны нулю, при $n \notin [0, N - 1]$. Во многих случаях нам хотелось бы считать, что длина последовательности равна именно N , даже если в действительности количество ее ненулевых членов меньше N . Но формально увеличить длину последовательности легко, продолжив ее нулем, что мы и будем делать при необходимости. С каждой

N -членной последовательностью можно связать периодическую последовательность

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN], \quad (29)$$

из которой исходная восстанавливается по правилу:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (30)$$

Коэффициенты дискретного ряда Фурье последовательности $\tilde{x}[n]$ интерпретируются как отсчеты (отстоящие друг от друга на $2\pi/N$ Фурье-образа последовательности $x[n]$). Так как $x[n]$ конечна (число ее членов - N), то ее сдвиги $x[n - rN]$ при разных r не перекрываются. Поэтому формулу (29) можно переписать как

$$\tilde{x}[n] = x[n(\text{mod}N)]. \quad (31)$$

Для сокращения записи вместо $n(\text{mod}N)$ мы будем использовать обозначение $((n))_N$, при котором выражение (31) приобретает вид:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (32)$$

Заметим, что формулы (32) и (29) эквивалентны тогда и только тогда, когда длина последовательности $x[n]$ меньше или равна N . Выделяя один период периодического продолжения $\tilde{x}[n]$ конечной последовательности $x[n]$ можно восстановить исходную последовательность [2].

Один неформальный, но полезный способ восприятия формулы (31) состоит в том, чтобы отметить отсчеты конечной последовательности $x[n]$ в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность, а затем, двигаясь вдоль окружности, считывать отсчеты последовательности $\tilde{x}[n]$. Пройдя полный круг, мы получим все отсчеты исходной последовательности, после чего начнется периодическое повторение. При такой интерпретации периодического продолжения для восстановления конечной последовательности по формуле (30) достаточно разрезать окружность и распрямить ее.

Последовательность $\tilde{X}[k]$ коэффициентов дискретного ряда Фурье последовательности $\tilde{x}[n]$ сама является N -периодической. Для сохранения двойственности между временной и частотной областями, мы выберем лишь конечное число коэффициентов ряда Фурье, ассоциированного с конечной последовательностью, соответствующих одному периоду $\tilde{X}[k]$. Получившуюся при этом конечную последовательность $X[k]$ будем называть дискретным преобразованием Фурье.

Таким образом, дискретное преобразование Фурье $X[k]$ связано с коэффициентами дискретного ряда Фурье $\tilde{X}[k]$ по формулам:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (33)$$

$$\tilde{X}[k] = X[k(\text{mod}N)] = X[((k))_N]. \quad (34)$$

С другой стороны,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad (35)$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (36)$$

Поскольку суммирование в (35) и (36) происходит по отрезку $[0; N-1]$, то формулы (30)-(36) влекут соотношения:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (37)$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (38)$$

Итак, формулы анализа и синтеза дискретного преобразования Фурье выглядят следующим образом: формула анализа:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad (39)$$

формула синтеза:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}. \quad (40)$$

Здесь подразумевается, что последовательности $X[k]$ и $x[n]$ равны нулю вне отрезка $[0; N - 1]$, но явно не указывается [2].

Трансформировав формулы (11) и (12) в соотношения (39) и (40) для конечных последовательностей, мы никак не повлияли на периодичность. Как и коэффициенты дискретного ряда Фурье, дискретного преобразования Фурье $X[k]$ совпадает с дискретизацией по частоте 2π -периодического Фурье-образа $X(e^{j\omega})$, если правую часть формулы (40) вычислять для чисел n , лежащих вне отрезка $[0; N - 1]$, то результат окажется ненулевым, но совпадет с соответствующими отсчетами периодического продолжения последовательности $x[n]$. Таким образом, периодичность присутствует и в дискретном преобразовании Фурье. Иногда это свойство создает дополнительные трудности, а иногда оказывается полезным, но игнорировать периодичность нельзя. При определении дискретного преобразования Фурье мы просто «объявили», что нас интересуют значения $x[n]$ только над отрезком $[0; N - 1]$ (поскольку ее отсчеты вне этого отрезка в действительности равны нулю) и члены последовательности $X[k]$ при $k \in [0; N - 1]$, поскольку именно они участвуют в формуле (40).

Заключение. В заключение можно утверждать, что математический аппарат обработки сигналов представляет собой стройную многоуровневую систему. На первом уровне определяются свойства объектов исследования. На втором создаются инструменты их представления – ряд и преобразование Фурье, отличия между которыми напрямую вытекают из классификации. Третий уровень раскрывает основное свойство этих инструментов – теорему о свёртке, переводящую их в разряд прикладных. Наконец, четвёртый уровень обеспечивает практическую реализацию.

Список литературы

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир; 1988. 488 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера; 2006. 856 с.
3. Смит Стивен В. Цифровая обработка сигналов: практическое руководство для инженеров и научных работников. М.: Додэка-XXI; 2008. 718 с.
4. Хуанг Т.С., Эклунд Дж.-О., Нуссбаумер Г.Дж., Зохар Ш., Юстуссон Б.И., Тянь Ш.-Г. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. М.: Радио и связь; 1984. 224 с.
5. Яне Б. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера; 2007. 584 с.

Поступила в редакцию 13.01.2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Тарасова Ангелина Сергеевна – аспирант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

vasilyev_v@bsuedu.ru

[К содержанию](#)