Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 255–261.

Сравнение интеграла Римана и Лебега. Примеры

Новиков И. А.
goga-novikov.10@inbox.ru

Аннотация. В данной работе проводится сравнительный анализ интегралов Римана и Лебега с акцентом на их определения, свойства и применимость. Рассматриваются ключевые различия в подходах к интегрированию, условия существования интегралов, а также примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману. Анализируются преимущества и недостатки каждого подхода и области их применения. Особое внимание уделяется концепции меры Лебега и ее роли в определении интеграла Лебега. Приводятся примеры, демонстрирующие преимущества интеграла Лебега, особенно в контексте функций с разрывами и пределами интегралов.

Ключевые слова: интеграл Римана, интеграл Лебега, мера Лебега, интегрируемость, функциональный анализ, теория меры, разрывные функции

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2025. Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 245–248.

---

1. Введение. Интегралы Римана и Лебега занимают важное место в математическом анализе и теории функций, предлагая различные подходы к определению и вычислению интеграла. Интеграл Римана исторически предшествовал интегралу Лебега и до сих пор широко используется благодаря своей наглядности и простоте применения к достаточно гладким функциям. Однако он имеет ограничения при работе с функциями, имеющими разрывы или сложную структуру.

Интеграл Лебега, в свою очередь, является более мощным инструментом, позволяющим интегрировать значительно более широкий класс функций, включая те, которые не интегрируемы по Риману. Он использует понятие меры, что позволяет корректно определять интеграл для функций, заданных на множествах со сложной структурой. Понимание различий и связей между этими двумя типами интегралов необходимо для глубокого изучения математического анализа и его приложений.

2. Интеграл Римана. Пусть дан отрезок $[a, b]$. Разбиением T этого отрезка называется упорядоченный набор точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, [4] таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим длину i-го отрезка разбиения как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Диаметром разбиения (или мелкостью разбиения) называется величина:

$$\lambda(T) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i.$$

Суммы Дарбу – верхняя и нижняя оценки.

Определение 1. *Для заданного разбиения T и ограниченной на $[a, b]$ функции $f(x)$ определяются верхняя (S) и нижняя (s) суммы Дарбу:*

$$S(f,T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad \text{где} \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$
$$s(f,T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i, \quad \text{где} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Здесь M_i и m_i – верхняя и нижняя границы функции f на соответствующем отрезке.

Интеграл Римана как предел.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если существует число I, такое что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любого разбиения T с $\lambda(T) < \delta$ выполняется:*

$$|S(f,T) - I| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |s(f,T) - I| < \varepsilon.$$

Это число I называется интегралом Римана[1] функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Критерий интегрируемости.

Определение 3. *Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, такое что:*

$$S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon.$$

Альтернативная формулировка связана с понятием колебания функции.

Колебание функции.

Определение 4. *Для каждого подотрезка* $[x_{i-1}, x_i]$ *определим:*

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Тогда функция f *интегрируема по Риману, если сумма*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно мелком разбиении.

3. Классы функций, интегрируемых по Риману. Непрерывность и интегрируемость.

Определение 5. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$*, то она обязательно интегрируема по Риману. Это связано с тем, что непрерывные функции равномерно непрерывны на замкнутом интервале, что позволяет сделать колебания* ω_i *сколь угодно малыми.*

Кусочно-непрерывные функции.

Определение 6. *Функция* $f(x)$ *называется кусочно-непрерывной на* $[a, b]$*, если она имеет конечное число точек разрыва первого рода, то есть точки, в которых существуют конечные левый и правый пределы функции. Такие функции также являются интегрируемыми по Риману.*

Монотонные функции и интегрируемость.

Определение 7. *Если функция* $f(x)$ *монотонна (возрастающая или убывающая) на* $[a, b]$*, то она обязательно интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Пример неинтегрируемой функции.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема по Риману на любом интервале, поскольку в любой окрестности точки содержатся как рациональные, так и иррациональные числа, и верхняя и нижняя суммы не совпадают.

4. Свойства интеграла Римана.

1. Линейность Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрирумы на $[a, b]$, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. Аддитивность Для $a < c < b$, при условии, что $f(x)$ интегрируема по Риману на каждом из интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$, выполняется:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

3. Интегрирование неравенств Если $f(x) \le g(x)$ на $[a, b]$ и обе функции интегрируемы, то:

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx.$$

4. Теорема о среднем значении Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$, такая что:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

5. Интегрирование по частям Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы, то:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

6. Абсолютная интегрируемость Если $f(x)$ интегрируема по Риману, то и $|f(x)|$ тоже является интегрируемой функцией. Обратное утверждение будет неверно.

5. Интеграл Лебега. Пусть $\phi(x)$ – простая функция, принимающая значения y_n на измеримых множествах A_n, где $n = 1, \ldots, N$. Тогда интеграл Лебега от ϕ по множеству A определяется следующим образом [3]:

$$\int_A \phi(x)\, d\mu = \sum_{i=1^n} y_n \mu(A_n)$$

где μ – мера Лебега.

Интеграл от неотрицательной функции.

Определение 8. *Для неотрицательной измеримой функции f, интеграл Лебега определяется как:*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sup\left\{\int_A \phi(x)\, d\mu : \phi - \text{простая функция, } 0 \le \phi(x) \le f(x) \text{ для всех } x \in A\right\}.$$

Альтернативно, можно представить f как предел возрастающей последовательности простых функций $\phi_n(x)$, где $\phi_n(x) \to f(x)$ поточечно. Тогда:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A \phi_n(x)\, d\mu$$

Общий случай.

Для произвольной измеримой функции f определяются её положительная и отрицательная части $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ и $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Если оба интеграла $\int_A f^+(x)\, d\mu$ и $\int_A f^-(x)\, d\mu$ конечны, то f называется интегрируемой по Лебегу на множестве A.

Интеграл Лебега тогда определяется как

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A f^+(x)\, d\mu - \int_A f^-(x) d\mu.$$

6. Свойства интеграла Лебега. Предположим, что все интегралы существуют и конечны.

1. Линейность: Для измеримых функций f, g, которые интегрируемы по Лебегу на множестве A, и для произвольных скаляров $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:

$$\int_A (af + bg)\, d\mu = a\int_A f\, d\mu + b\int_A g\, d\mu$$

2. Аддитивность по множествам: Если $A_1, A_2 \subseteq A$ – измеримые, попарно непересекающиеся множества, то:

$$\int_{A_1 \cup A_2} f\, d\mu = \int_{A_1} f\, d\mu + \int_{A_2} f\, d\mu$$

   В общем случае, при разбиении измеримого множества A на семейство измеримых подмножеств $\{A_k\}$:

$$\int_A f\, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f\, d\mu$$

3. Неравенства и теоремы сравнения: Пусть функции f, g – измеримые и почти всюду выполняется

$$f(x) \le g(x) \quad \text{для почти всех } x \in A,$$

   и обе функции интегрируемы по Лебегу [5]. Тогда:

$$\int_A f\, d\mu \le \int_A g\, d\mu$$

4. Теоремы монотонности и Леви о сходимости:

   - Монотонная сходимость: Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ возрастает почти всюду и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

- Теорема Леви о мажорированной сходимости: Пусть $f_n \to f$ почти всюду на A и существует интегрируемая функция g, такая что:

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \text{для всех } n \text{ и п.в. } x \in A,$$

тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

5. Совпадение интегралов по Лебегу и Риману: Если функция f – ограниченная и одновременно интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, то она также интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, и её интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f(x) \, dx.$$

6. Функции, интегрируемые по Лебегу, но не по Риману: Например, функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману на $[0, 1]$, поскольку она разрывна в каждой точке этого интервала. Однако она интегрируема по Лебегу и её интеграл равен нулю:

$$\int_{[0,1]} f(x) \, d\mu = 0.$$

7. Мера Лебега. Мера Лебега – это обобщение понятия длины (в $\mathbb{R}$), площади (в $\mathbb{R}^2$) и объема (в $\mathbb{R}^3$), позволяющее измерять "размер"более широкого класса множеств, чем просто интервалы, прямоугольники и параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$.

Основные свойства.

- Мера Лебега обнуляется на множествах меры ноль: если существует множество меры нуль $A' \supset A$, такое, что $\mu(A') = 0$, то $\mu(A) = 0$.
- Мера Лебега удовлетворяет аксиомам неотрицательности, счетной аддитивности и трансляционной инвариантности. Она также удовлетворяет аксиоме нулевой меры.
- Мера Лебега является мерой на всём пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть для измеримого пространства $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$: $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Пример вычисления меры Лебега.

Формула для измерения компактного прямоугольника:

Для прямоугольника (параллелепипеда) вида $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, мера Лебега равна

$$\mu(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

8. Сравнение интегралов Римана и Лебега: преимущества и недостатки.

- Интеграл Римана – дробит область по оси x, приближаясь к площади под графиком функции.
- Интеграл Лебега – дробит значения функции по оси y, суммируя меры множеств, где функция принимает определённые значения.

Примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не по Риману.

- Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Не интегрируема по Риману на любом интервале, но по Лебегу её интеграл равен 0, поскольку множество рациональных чисел имеет меру нуль [2].

- Функция на Канторовом множестве:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

где C – Канторово множество (меры нуль). Не интегрируема по Риману, но по Лебегу – да, её интеграл равен 0.

Интеграл Лебега является более общим, так как «игнорирует» редкие разрывы – если множество точек разрыва имеет меру нуль, функция всё равно интегрируема. Поскольку интеграл Лебега оперирует мерой подмножеств, а не значениями функции в отдельных точках, такие множества не влияют на результат интегрирования. В отличие от этого, интеграл Римана чувствителен даже к очень редким разрывам.

9. Предельные переходы под знаком интеграла: сила теорем Лебега. Проблема с предельным переходом в интеграле по Риману. Требуются очень сильные условия, например, равномерная сходимость, для обмена предела и интеграла.

Теорема Фату. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, и пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных измеримых функций на X, сходящаяся поточечно почти всюду к функции f. Тогда*

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. *Если $\{f_n(x)\}$ – последовательность измеримых функций, сходящаяся почти всюду к функции $f(x)$, и существует интегрируемая по Лебегу функция $g(x)$, такая что и $\forall n, \quad |f_n(x)| \leq g(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu.$$

Пример. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, а интеграл:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Здесь предел интеграла не равен интегралу предельной функции, так как условия равномерной сходимости не выполнены. Теорема Лебега помогает в случаях с мажорантой.

Теорема Фату – говорит о неравенстве, связывающем пределы и интегралы, в случаях, когда мажоранты нет.

Теорема Леви о монотонной сходимости – Обеспечивает равенство пределов и интегралов для монотонных последовательностей функций.

10. Геометрическая интерпретация интегралов.

Интеграл Римана.

Площадь под графиком $y = f(x)$, получаемая разбиением области по x, сумма площадей маленьких прямоугольников.

Интеграл Лебега.

Суммирование значений функции, основанное на мерах множеств:

- Разбиваем по значениям функции $f(x)$ (по оси y).
- Для каждого интервала значений находим меру множества $\{x : f(x) \in \text{интервал}\}$.
- Умножаем на соответствующее значение.

11. Преимущества и недостатки каждого подхода.

Интеграл Римана.

Преимущества: Простая и наглядная геометрическая интерпретация. Хорошо подходит для непрерывных и кусочно-непрерывных функций.

Недостатки: Ограничен по типам функций (редкие разрывы мешают интегрируемости). Меньшая универсальность.

Интеграл Лебега.

Преимущества: Более общий, расширяет класс интегрируемых функций. Мощные теоремы о пределе (ТЛМС, Фату, Леви).

Недостатки: Требуется теория меры.

12. Области применения интегралов.

Интеграл Римана.

- Физика и инженерия – расчет работы, центров масс, моментов инерции.
- Решение дифференциальных уравнений.
- Когда функции непрерывны или кусочно-непрерывны.

Интеграл Лебега.

- Теория вероятностей – математическое ожидание.
- Функциональный анализ – пространства L^p.
- Обработка сигналов и изображений, при необходимости интеграл с разрывами или сложной структурой.

13. Примеры.

- Пример 1 (преимущество интеграла Римана).

  Пусть $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$. Эта функция непрерывна на интервале и является классическим примером, который легко интегрировать по Риману. Интеграл равен

  $$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

  Для непрерывных функций на отрезке интеграл по Риману – очень удобен и просто вычисляется.

- Пример 2 (ограничение интеграла Римана).

  Рассмотрим функцию

  $$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рациональное,} \\ 0, & x \text{ – иррациональное.} \end{cases}$$

  Она разрывна на множестве $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, которое плотно в [0,1]. Поэтому она не является симман-интегрируемой . Функции, разрывные только на множестве меры ноль, остаются интегрируемыми по Риману, что удобно для анализа «пункторазрывных» функций с малым множеством разрывов.

- Пример 3 (преимущество интеграла Лебега).

  Пусть

  $$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

  Множество рациональных чисел имеет меру ноль, поэтому почти всюду функция равна 0, и её интеграл по Лебегу равен 0. В этом случае Лебег успешно справляется с функциями, разрывными на множестве меры ноль, где интеграл по Риману затруднителен.

- Пример 4 (сложность вычисления) интеграла Лебега.

  Рассмотрим функцию

  $$l(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

  Эта функция измерима по Лебегу на $[0,1]$. Ее интеграл Лебега существует и равен

  $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,d\mu = \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

  Хотя интеграл Лебега этой функции существует и конечен, этот пример демонстрирует, что измеримость и существование интеграла Лебега сами по себе не всегда упрощают аналитическое вычисление. В данном случае пришлось использовать знания из анализа (вычисление несобственного интеграла) чтобы получить результат. Кроме того, хотя интеграл и существует, функция не ограничена в окрестности нуля, что может создавать определенные трудности при анализе ее свойств.

Пример, где оба интеграла не справляются. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{иррациональный}, \\ 0, & x - \text{рациональный}. \end{cases}$$

Это функция, которая в точности совпадает с функцией $f(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. В этом случае:

Она разрывна на множестве $[0, 1]$, где разрывы расположены на множестве, которое имеет меру, отличную от нуля. Тогда она не является ни римман-интегрируемой, ни измеримой, поскольку она не может быть аппроксимирована простыми функциями с помощью интегральных методов в стандарте. Функция не интегрируема по Риману, так как множество ее точек разрыва (то есть весь отрезок [0, 1]) имеет меру 1, а не меру нуль.

Существование функций, для которых оба классических подхода не работают, подчёркивает необходимость расширения теории.

6. Заключение. В заключение, данная курсовая работа была посвящена детальному сравнительному анализу интегралов Римана и Лебега, с акцентом на практическое применение и понимание концепции меры Лебега. Исследование выявило ключевые различия, преимущества и недостатки каждого из подходов, а также продемонстрировало на конкретных примерах ситуации, в которых интеграл Лебега является более мощным и гибким инструментом. В частности, было установлено, что интеграл Римана хорошо подходит для функций с конечным числом точек разрыва, обеспечивая относительную простоту вычислений, но оказывается неприменимым к функциям с более сложной структурой разрывов, таким как функция Дирихле. В свою очередь, интеграл Лебега расширяет возможности интегрирования за счет использования меры Лебега, позволяя интегрировать более широкий класс функций, для которых интеграл Римана не существует, хотя и ограничивается измеримыми функциями. Примеры, рассмотренные в работе, подтверждают, что интеграл Лебега предоставляет осмысленные результаты для функций, вроде функции Дирихле. Особое внимание уделено пониманию концепции меры Лебега через процесс «суммирования» значений функции и подчеркнута важность теоремы о мажорируемой сходимости для упрощения вычисления пределов интегралов.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа. Ч. 1. Основные операции анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон ; пер. с англ. Д. Е. Меньшова. – 2-е изд. – Москва : Физматгиз, 1962. – 344 с.
2. Колмогоров, А. Н. Математический анализ / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Наука, 1976. – 512 с.
3. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 431 с.
4. Зорич, В. А. Математический анализ. Ч. 1 / В. А. Зорич. – Москва : МЦНМО, 2019. – 576 с.
5. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов. - Москва : Наука, 1974. - 656 с.

Поступила в редакцию 30.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Новиков Игорь Андреевич – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию