Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 249–254.

Немного о пространстве L_2

Короплясов К. Р.
korop.kir5@mail.ru

Аннотация. В работе вводятся основные понятия пространства L_2, необходимые для применения методов функционального анализа к задачам математической физики: скалярное произведение, норма, ортогональность и полнота. На примере одномерной задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями показано построение решения методом разделения переменных. Решение представлено в виде ряда по ортогональной системе собственных функций, доказана его принадлежность пространству L_2 и приведены аналитическая и численная проверки, а также графическое представление приближённого решения

Ключевые слова: метод разделения переменных, норма, ортогональность, полнота, пространство L_2, скалярное произведение, уравнение теплопроводности,

Для цитирования: Короплясов К. Р. 2025. Немного о пространстве L_2. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 249–254.

---

1. Введение. Во многих физических задачах нас интересуют не отдельные числа, а функции. Например, как распределяется температура вдоль стержня или как она меняется со временем. Пространство L_2 вводится для того, чтобы с такими функциями можно было работать строго и удобно. В этом пространстве функции можно складывать, умножать на число и сравнивать между собой, оценивая, насколько они близки. Именно поэтому пространство L_2 широко используется при решении задач теплопроводности и других задач математической физики.

2. Пространство L_2 и используемые в задаче понятия

При решении задачи теплопроводности методом разделения переменных возникает необходимость работать с функциями, заданными на отрезке, и рассматривать их разложения по ортогональным системам. Для этого используется пространство L_2, а также связанные с ним понятия скалярного произведения, нормы и ортогональности.

2.1 Определение пространства L_2

Определение 2.1.[2] *Пусть X — множество, на котором задана мера μ. Функция f, определённая на X, называется функцией с интегрируемым квадратом на X, если существует (конечен) интеграл*

$$\int_X |f(x)|^2\, d\mu.$$

Совокупность всех функций с интегрируемым квадратом на X обозначается $L_2(X, \mu)$ и называется пространством L_2.

Это определение означает, что пространство L_2 состоит из функций, у которых существует интеграл от квадрата функции. В таком случае, суммарная энергия, связанная с такой функцией, конечна. Поэтому функции из L_2 используются для описания реальных физических процессов, в которых энергия также должна быть конечна, иначе сам процесс не может существовать.

2.2 Скалярное произведение и норма в L_2

Определение 2.2.[2] *В пространстве $L_2(X, \mu)$ скалярным произведением функций f и g называется число*

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu.$$

При этом для любых функций $f, g, h \in L_2(X, \mu)$ и любого числа α выполняются следующие свойства:

1. $(f, g) = (g, f)$;
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
3. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$;
4. $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$.

По смыслу скалярное произведение функций в пространстве L_2 полностью аналогично скалярному произведению векторов: оно показывает, насколько два объекта направлены в одну сторону. В задачах теплопроводности оно используется для нахождения коэффициентов разложения решения по собственным функциям. Именно с его помощью определяется, какой вклад каждая синусоида вносит в общее распределение температуры.

Определение 2.3.[2] *Норма функции $f \in L_2(X, \mu)$ определяется формулой*

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu \right)^{1/2}.$$

Норма функции в пространстве L_2 — это расстояние от этой функции до нулевой функции. То есть норма показывает, насколько функция отличается от нуля на всём отрезке.

В задачах теплопроводности норма позволяет понять, насколько велика температура на стержне. Если норма со временем уменьшается, значит распределение температуры затухает и стержень охлаждается.

2.3 Ортогональность функций

Определение 2.4.[2] *Функции f и g из пространства $L_2(X, \mu)$ называются ортогональными, если*

$$(f, g) = 0.$$

Ортогональность является аналогом перпендикулярности в геометрии. Так же как перпендикулярные векторы в евклидовом пространстве не имеют общей направленности, ортогональные функции в пространстве L_2 не содержат общих компонент. Ортогональная система функций представляет собой набор функций, которые взаимно независимы друг от друга в смысле скалярного произведения.

2.4 Полнота пространства L_2

Теорема 2.1.[2] *Пространство $L_2(X, \mu)$ полно.*

Полнота пространства L_2 означает, что если последовательность функций из L_2 сходится по норме L_2, то существует функция, являющаяся её пределом, и эта функция также принадлежит пространству L_2. Здесь сходимость по норме означает, что расстояние между функциями последовательности и их пределом стремится к нулю.

Расстояние между двумя функциями в пространстве L_2 показывает, насколько сильно значения одной функции отличаются от значений другой на рассматриваемом отрезке. Если расстояние мало, то значения функций близки, если расстояние велико — различие между ними существенно.

В задаче теплопроводности решение строится как предел частичных сумм ряда по собственным функциям. Полнота пространства L_2 гарантирует, что этот предел существует и задаёт корректное решение задачи.

3. Пример решения задачи теплопроводности в L_2

Рассмотрим задачу теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \tag{1}$$

на отрезке $0 < x < 1$ при $t > 0$ с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \qquad u_x(1, t) = 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Начальная функция $u(x, 0) = x$ принадлежит пространству $L_2(0, 1)$, так как

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} < \infty.$$

Значит, решение корректно искать в виде ряда по ортогональной системе собственных функций в $L_2(0, 1)$ (см. определение).

Решение. Ищем решение задачи теплопроводности методом разделения переменных, предполагая, что

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{3}$$

Подставим (3) в уравнение (1):

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Разделим переменные:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{4}$$

Тогда получаем две задачи:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

а из граничных условий (2) следует

$$X(0) = 0, \qquad X'(1) = 0.$$

Положим $\lambda = k^2$, $k > 0$. Тогда общее решение имеет вид

$$X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

Из условия $X(0) = 0$ получаем $B = 0$, значит

$$X(x) = A\sin(kx).$$

Тогда

$$X'(x) = Ak\cos(kx),$$

и условие $X'(1) = 0$ даёт

$$\cos(k) = 0.$$

Следовательно,

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и собственные функции можно взять в виде

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

В силу ортогональности собственных функций в пространстве $L_2(0,1)$ (см. определение) решение представляется в виде ряда по $\{X_n(x)\}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k_n^2 t} X_n(x).$$

Коэффициенты a_n находятся как проекции начальной функции $f(x) = x$ на собственные функции относительно скалярного произведения (см. определение). Поскольку

$$\int_0^1 X_n^2(x)\,dx = \int_0^1 \sin^2(k_n x)\,dx = \frac{1}{2},$$

получаем

$$a_n = 2\int_0^1 x\sin(k_n x)\,dx.$$

Вычисляя интеграл, окончательно находим

$$a_n = \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Полнота пространства L_2 (см. теорему) гарантирует, что полученный ряд задаёт корректное решение задачи.

Ответ.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}\,\exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right). \tag{5}$$

Проверка. Покажем, что при каждом фиксированном $t > 0$ найденное решение принадлежит пространству $L_2(0,1)$, то есть имеет конечную норму (см. определение):

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx < \infty.$$

Решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k_n^2 t}\sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2},$$

где

$$a_n = \frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Обозначим коэффициенты ряда:

$$b_n(t) = a_n e^{-k_n^2 t}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(k_n x).$$

Система $\{\sin(k_n x)\}_{n\ge 1}$ ортогональна (см. определение) в $L_2(0,1)$ и удовлетворяет

$$\int_0^1 \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ \dfrac{1}{2}, & n = m. \end{cases}$$

По формуле Парсеваля получаем

$$\int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(t)|^2.$$

С учётом определения коэффициентов имеем

$$|b_n(t)|^2 = |a_n|^2 e^{-2k_n^2 t},$$

и, следовательно,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2k_n^2 t}.$$

При $t > 0$ выполнено $0 < e^{-2k_n^2 t} \le 1$, поэтому

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Подставляя a_n, получаем

$$|a_n|^2 = \frac{64}{(2n-1)^4\pi^4},$$

и оценку

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} \le \frac{32}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ сходится, сходится и ряд по нечётным индексам, следовательно, правая часть конечна. Значит, $\|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,1)} < \infty$ при всех $t > 0$, то есть

$$u(\cdot,t) \in L_2(0,1) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Численная проверка в Maple. Для подтверждения результата вычислим квадрат L_2-нормы по формуле Парсеваля в системе Maple и выведем значения в виде таблицы при различных N. Скриншот результата вычислений приведён на рисунке 1.

```
restart :
with(LinearAlgebra) :

# Пример 2: k_n = (2n-1)Pi/2, a_n = 8(-1)^(n-1)/((2n-1)^2 Pi^2)
# По Парсевалю:
# ||u||^2_{L2} = (1/2) * sum_{n=1..infty} |a_n|^2 * exp(-2 k_n^2 t)
# Частичная сумма по n=1..N даёт численную проверку.

k := n → (2*n−1)*Pi/2 :
a := n → 8*(−1)^(n−1)/(((2*n−1)^2)*Pi^2) :

L2sq_par2 := proc(t, N)
local n;
return (1/2)*add( (a(n))^2*exp(−2*(k(n))^2*t), n = 1 ..N);
end proc:

t0 := 0.1 :
Ns := [5, 10, 20, 50, 100, 200] :

# Таблица: N и значение ||u||^2_{L2}
Tab := Matrix( nops(Ns), 2 ) :
for i to nops(Ns) do
Tab[i, 1] := Ns[i];
Tab[i, 2] := evalf( L2sq_par2(t0, Ns[i]) );
end do:

Tab;

# Дополнительно можно посмотреть значение при t=0 (должно стремиться к ||f||^2 = int_0^1 x^2 dx = 1/3)
evalf( L2sq_par2(0, 500) );
```

5	0.2006033603
10	0.2006033603
20	0.2006033603
50	0.2006033603
100	0.2006033603
200	0.2006033603

0.3333333332

Рис. 1. Табличный вывод в Maple значений квадрата L_2-нормы по формуле Парсеваля при различных N.

Графическое представление решения

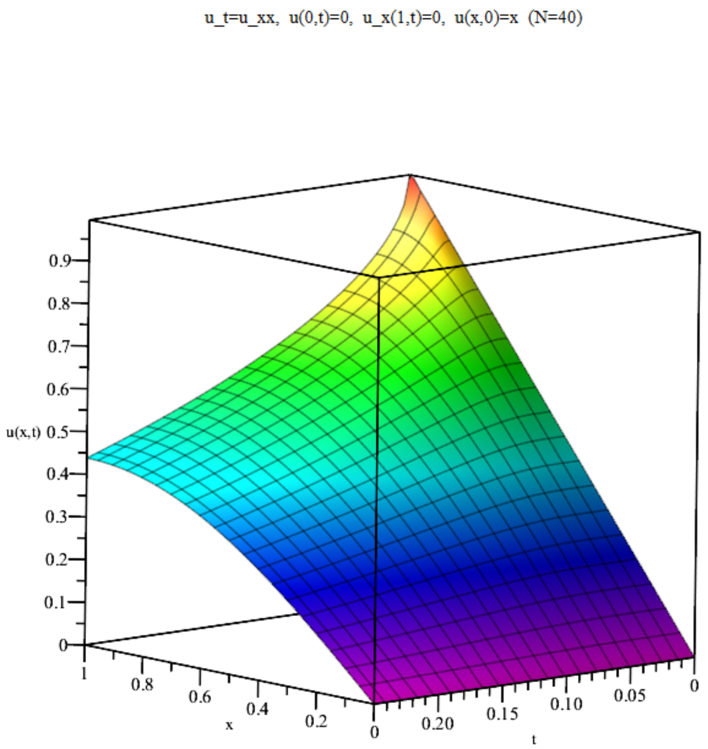

Рис. 2. Графическое представление решения задачи теплопроводности (приближение с помощью конечного числа слагаемых).

На рисунке показано приближённое решение задачи теплопроводности, полученное по формуле (5) как сумма конечного числа членов ряда. Иными словами, точное решение заменяется более простым, состоящим из нескольких синусоид.

Каждая синусоида описывает простое распределение температуры вдоль стержня. При сложении нескольких таких функций получается приближение реального распределения температуры во времени.

Поскольку используется не бесконечная сумма, а лишь конечное число слагаемых, решение совпадает с точным не полностью. Из-за этого при малых значениях времени и вблизи концов стержня на графике видны небольшие неровности.

Если мы будем увеличивать число слагаемых, то погрешность совпадения с точным решением уменьшится, график будет становиться более гладким, и станет лучше отображать процесс охлаждения.

6. Заключение. В работе введены основные понятия пространства L_2, необходимые для анализа решений задач математической физики. На примере задачи теплопроводности показано применение скалярного произведения, ортогональности и полноты пространства L_2 при построении решения методом разделения переменных.

Благодарность.

Список литературы

1. Дьяконов В. П. 2001. Maple 7. Учебный курс. СПб., Питер, 640 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1981. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 512 с.
3. Константинов М. Ю., Гаврилов С. А. 2010. Функциональный анализ. М., Физматлит, 256 с.
4. Красносельский М. А., Забарян М. М. 1975. Основы функционального анализа. М., Наука, 320 с.
5. Рудин У. 1974. Функциональный анализ / пер. с англ. М., Мир, 432 с.

Поступила в редакцию 30.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Короплясов Кирилл Романович – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию