Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование

Рудофилов И. М.
iheljabkjd@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается понятие двойного интеграла как одного из основных объектов математического анализа функций нескольких переменных. Изложены геометрический и физический смысл двойного интеграла, его основные свойства и методы вычисления. Показана связь теоретических конструкций с практическими задачами, возникающими в физике, механике и численном моделировании. Особое внимание уделено практической реализации контроля знаний: представлена концепция теста, направленного на проверку понимания ключевых понятий, анализа области интегрирования и выбора порядка интегрирования. Описана интерактивная реализация теста с использованием связки LuaLaTeX и HTML, позволяющая автоматизировать процесс проверки знаний. Работа демонстрирует междисциплинарный подход, соединяющий математическую теорию, методику преподавания и веб-технологии.

Ключевые слова: двойной интеграл, геометрический смысл, физическая интерпретация, область интегрирования, полярные координаты, тестирование, LuaLaTeX, HTML, MathJax переменных

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2025. Двойные интегралы: теория и интерактивное тестирование. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 245–248.

---

1. Введение. Двойные интегралы являются одним из ключевых понятий математического анализа функций нескольких переменных и находят широкое применение в различных разделах математики и прикладных наук. Они используются при вычислении площадей и объёмов, определении массы и центра тяжести пластин с переменной плотностью, а также при моделировании физических процессов в механике, теплопередаче и электродинамике.

Важной особенностью двойного интеграла является его геометрическая и физическая интерпретация, позволяющая связать абстрактные математические выражения с наглядными образами и прикладными задачами [4]. Существенную роль при вычислении двойных интегралов играет корректное описание области интегрирования, выбор порядка интегрирования и, при необходимости, переход к другим системам координат, в частности к полярным координатам [2].

Несмотря на формальную строгость определения двойного интеграла, на практике наибольшие затруднения у обучающихся вызывает не сам процесс вычисления, а понимание смысла интеграла и анализ области интегрирования. В связи с этим особую актуальность приобретает использование интерактивных и тестовых форм контроля знаний, позволяющих оценить глубину понимания теоретического материала и способность применять его в стандартных и нестандартных ситуациях. Данная статья представляет собой попытку системного изложения теории двойных интегралов и демонстрации практического инструмента для проверки их усвоения.

2. Основные понятия и свойства двойных интегралов.

Пусть на плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана функция $f(x,y)$, интегрируемая по Риману. Двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области D называется предел интегральных сумм, если он существует, и обозначается

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в вычислении объёма тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и по бокам цилиндрической поверхностью, построенной над областью D, при условии, что $f(x,y) \ge 0$ на D. В случае, когда функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, интеграл интерпретируется как алгебраическая сумма соответствующих объёмов.

Если рассматривать физическую интерпретацию, то при заданной плотности $\rho(x,y)$ двойной интеграл

$$\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$

описывает массу плоской пластины, занимающей область D [3]. Аналогичным образом двойные интегралы применяются для нахождения координат центра тяжести, моментов инерции и других физических характеристик.

Важным частным случаем является интеграл от единицы:

$$\iint\limits_D 1\,dx\,dy,$$

который равен площади области D [4]. Это свойство подчёркивает связь двойного интеграла с геометрическими характеристиками плоских фигур.

На практике вычисление двойных интегралов сводится к вычислению повторных интегралов. Если область D имеет вид $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

При этом порядок интегрирования может быть изменён при выполнении соответствующих условий существования интеграла [5].

Существенную роль при вычислении двойных интегралов играет корректное описание области интегрирования. В более сложных случаях область D задаётся неравенствами, зависящими от переменных, что требует анализа её геометрической структуры и осознанного выбора порядка интегрирования [1].

Для областей, обладающих круговой симметрией, целесообразно использовать переход к полярным координатам, при котором двойной интеграл принимает вид

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_0^{R(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Появление множителя r связано с якобианом перехода к новой системе координат [2].

Таким образом, теория двойных интегралов объединяет строгие аналитические определения с наглядными геометрическими и физическими интерпретациями, а также требует внимательного анализа области интегрирования и выбора оптимального метода вычисления [3, 5].

3. Методика и инструмент для контроля знаний. Практическая часть работы посвящена применению теоретических положений, связанных с двойными интегралами, в форме интерактивного тестирования. Основной целью теста является проверка не механического запоминания формул, а глубины понимания смысла интеграла, умения анализировать область и выбирать метод решения.

Тест состоит из 10 вопросов, охватывающих следующие темы: геометрическая и физическая интерпретация, свойства, вычисление повторных интегралов, описание области, переход к полярным координатам. Ниже приведён полный перечень вопросов теста в текстовой форме, сопровождаемый скриншотами их реализации в интерактивном HTML-интерфейсе.

1. Дана функция $f(x,y) = x + y$. Что геометрически выражает двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, если $f(x,y) \ge 0$ на области D?

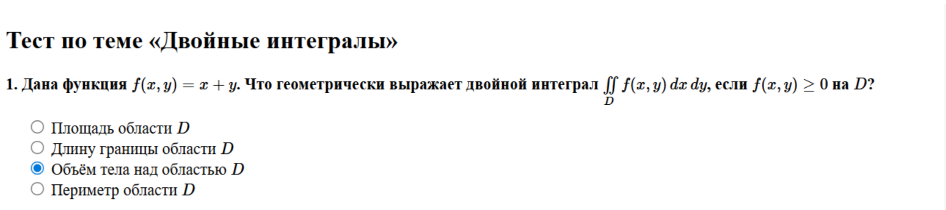


Рис. 1. Вопрос 1 в интерактивном тесте.

2. Какая из записей корректно задаёт повторный интеграл для вычисления $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, если область D задана условиями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$?

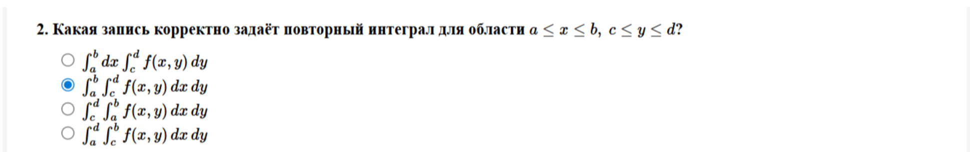


Рис. 2. Вопрос 2 в интерактивном тесте.

3. Пусть область D ограничена линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$. Какой из интегралов соответствует вычислению $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$?

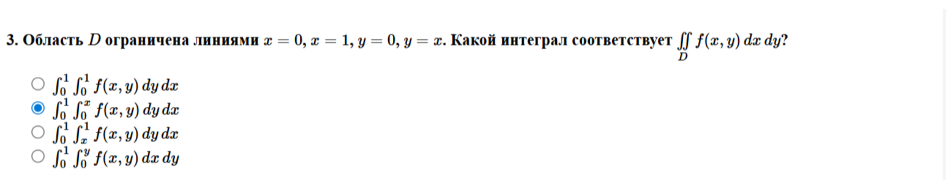
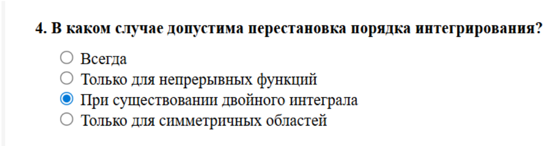


Рис. 3. Вопрос 3 в интерактивном тесте.

4. В каком случае допустима перестановка порядка интегрирования?


4. В каком случае допустима перестановка порядка интегрирования?

- ○ Всегда
- ○ Только для непрерывных функций
- ◉ При существовании двойного интеграла
- ○ Только для симметричных областей

Рис. 4. Вопрос 4 в интерактивном тесте.

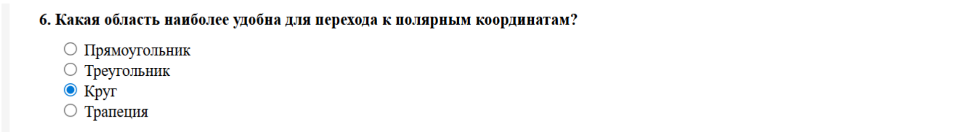
5. Чему равен двойной интеграл $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$, где D — плоская область?


5. Чему равен интеграл $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$?

- ○ Периметру области
- ◉ Площади области
- ○ Объёму тела
- ○ Диагонали области

Рис. 5. Вопрос 5 в интерактивном тесте.

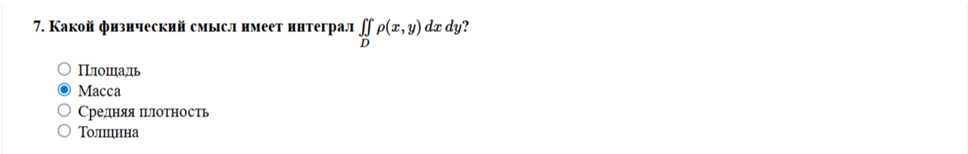
6. Какая область наиболее удобна для перехода к полярным координатам?


6. Какая область наиболее удобна для перехода к полярным координатам?

- ○ Прямоугольник
- ○ Треугольник
- ◉ Круг
- ○ Трапеция

Рис. 6. Вопрос 6 в интерактивном тесте.

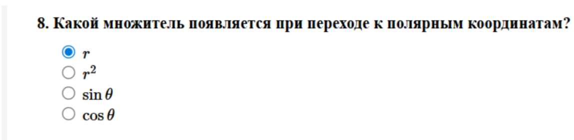
7. Пусть плотность пластины задана функцией $\rho(x, y)$. Какой физический смысл имеет интеграл $\iint\limits_D \rho(x, y)\,dx\,dy$?


7. Какой физический смысл имеет интеграл $\iint\limits_D \rho(x, y)\,dx\,dy$?

- ○ Площадь
- ◉ Масса
- ○ Средняя плотность
- ○ Толщина

Рис. 7. Вопрос 7 в интерактивном тесте.

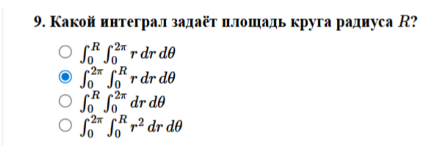
8. Какой множитель появляется при переходе к полярным координатам?


8. Какой множитель появляется при переходе к полярным координатам?

- ◉ r
- ○ r^2
- ○ $\sin\theta$
- ○ $\cos\theta$

Рис. 8. Вопрос 8 в интерактивном тесте.

9. Какой из интегралов соответствует вычислению площади круга радиуса R?


9. Какой интеграл задаёт площадь круга радиуса R?

- ○ $\int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta$
- ◉ $\int_0^{2\pi} \int_0^R r\,dr\,d\theta$
- ○ $\int_0^R \int_0^{2\pi} dr\,d\theta$
- ○ $\int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\,dr\,d\theta$

Рис. 9. Вопрос 9 в интерактивном тесте.

10. В чём заключается основная сложность вычисления двойных интегралов?

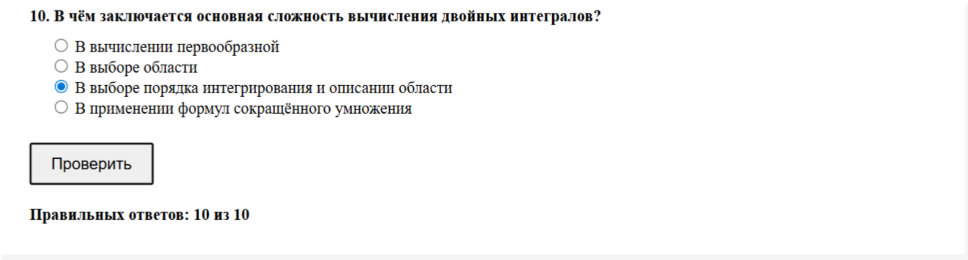


Рис. 10. Вопрос 10 в интерактивном тесте.

Для реализации интерактивной версии использована связка LuaLaTeX, Lua и HTML. В процессе компиляции основного документа Lua-скрипт генерирует HTML-файл, содержащий полный текст теста, варианты ответов в виде радиокнопок и JavaScript-код для мгновенной проверки. Математические формулы отображаются с помощью библиотеки MathJax, что обеспечивает их качественное представление в браузере, как показано на скриншотах.

4. Заключение. В статье рассмотрено понятие двойного интеграла, его геометрический и физический смысл, основные свойства и методы вычисления. Показано, что двойной интеграл служит мощным инструментом как для теоретических исследований, так и для решения прикладных задач в физике, механике и компьютерном моделировании.

Особое внимание уделено методическому аспекту: разработке теста, направленного на проверку понимания, а не формального воспроизведения материала. Предложенный тест позволяет диагностировать типичные ошибки, связанные с анализом области интегрирования и выбором порядка интегрирования.

Практическая реализация теста в виде интерактивного HTML-приложения, автоматически генерируемого из LaTeX-источника, демонстрирует современный подход к созданию электронных обучающих ресурсов. Использование LuaLaTeX и MathJax обеспечивает корректное отображение математических формул как в печатной статье, так и в веб-интерфейсе.

Таким образом, работа вносит вклад как в изложение теоретических основ двойных интегралов, так и в разработку практических инструментов для контроля знаний, что может быть полезно в учебном процессе при изучении курса математического анализа.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Демидович Б. П., Марон И. А. 1987. Основы вычислительной математики. М., Наука, 664 с.
2. Фихтенгольц Г. М. 2003. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., Физматлит, 864 с.
3. Кудрявцев Л. Д. 2006. Математический анализ. Т. 2. М., Физматлит, 720 с.
4. Никольский С. М. 1983. Курс математического анализа. М., Наука, 560 с.
5. Зорич В. А. 2019. Математический анализ. Ч. 2. М., МЦНМО, 704 с.

Поступила в редакцию 28.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудофилов Илья Максимович – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию