Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 237–244.

Преобразование Фурье, свойства и применение

Науменко Н. Н.
nikakort704@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются интеграл Фурье и преобразование Фурье в контексте функционального анализа. Представлены основные определения интеграла Фурье, прямого и обратного преобразований Фурье, а также их частных случаев: косинус- и синус-преобразований. Рассмотрены ключевые свойства преобразования Фурье, включая линейность, непрерывность, формулу обращения, связь с дифференцированием оригинала и образа, свойство сдвига и преобразование интеграла. Решены практические задачи по вычислению преобразования Фурье. Представлены доказательства свойств преобразования сдвинутой функции и связи преобразования функции с преобразованием её интеграла.

Ключевые слова: интеграл Фурье, преобразование Фурье, косинус-преобразование, синус-преобразование, спектральный анализ, свойства преобразования Фурье

Для цитирования:Науменко Н. Н. 2025. Преобразование Фурье, свойства и применение. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 237–244.

---

1. Введение. Преобразование Фурье занимает важное место в математическом анализе. Изучение гармонического анализа начинается с рядов Фурье, где функция раскладывается в ряд гармонических колебаний. Для функций, заданных на всей числовой оси, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

В данной работе рассматриваются интеграл Фурье и преобразование Фурье. Работа опирается на теоретические основы интегральных преобразований. Проанализирована связь между прямым и обратным преобразованиями Фурье. Представлен процесс вычисления преобразования Фурье для конкретных функций. Рассмотрены примеры использования свойств преобразования Фурье для решения практических задач.

2. Интеграл Фурье. Изучение гармонического анализа начинается с рядов Фурье, где кусочно- гладкая функция, определенная на конечном интервале, раскладывается в ряд, состоящий из дискретных гармонических колебаний. Функция называется кусочно- гладкой, если она в каждой точке имеет конечные пределы слева и справа, а также конечные значения левой и правой производных. Гармонические колебания — это те колебания, в которых колеблющаяся величина меняет своё значение во времени строго по закону синуса или косинуса.

Однако при анализе непериодических явлений, где функция задана на всей числовой оси, происходит качественный переход. Ряд Фурье трансформируется в интеграл Фурье, который представляет собой сумму тех же гармонических колебаний, но частоты которых теперь непрерывно заполняют действительную полуось. Мы рассмотрим основы этого интегрального представления, которое является важным для дальнейшего изучения преобразования Фурье.

«Пусть $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье мы можем для любого $l > 0$ разложить f в ряд Фурье в промежутке $[-l, l]$:» [1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$\cos \frac{n\pi x}{l}$ и $\sin \frac{n\pi x}{l}$ называют гармониками, а коэффициенты a_n и b_n — амплитуды гармоники. Коэффициенты гармоники $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, они образуют бесконечно большую последовательность. Разность двух соседних частот $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}$ тем меньше, чем больше l, с увеличением l соседние частоты становятся все ближе друг к другу. В пределе при $l \to \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до $+\infty$, а ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right) dt, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) dt.$$

Подставим выражение для a_n и b_n в $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(t - x)\right) dt \right] \Delta\lambda$$

Считаем, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ сходится. Предел при $l \to \infty$ первого слагаемого равен нулю:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x)) dt$$

Мы получили представление функции $f(x)$. Самая правая часть называется интегралом Фурье. Записав $\cos(\lambda(t-x))$ в виде $\cos\lambda t\cos\lambda x+\sin\lambda t\sin\lambda x$, получим:

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda$$

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t dt \quad \text{и} \quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t dt$$

Разложение функции $f(x)$ по гармоникам $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, а амплитудами $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ служат интегралы.

Полученное интегральное представление можно конкретизировать для функций с определённой чётностью. Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является чётной, справедливо равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(y)\cos xy\,dy, \quad \text{где} \quad a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt.$$

в случае, когда f — нечётная функция, выполняется равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(y)\sin xy\,dy, \quad \text{где} \quad b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

Для чётной функции разложение содержит только косинусы, а для нечётной — только синусы, что полностью аналогично случаю тригонометрических рядов Фурье.

«Произведение двух чётных или двух нечётных функций есть чётная функция. Произведение чётной и нечётной функций есть нечётная функция»[5].

Общую формулу интеграла Фурье можно записать в более компактной комплексной форме. Используя формулу Эйлера $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, получили следующее:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iy(x-t)}\,dt,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

3. Преобразование Фурье. Согласно теореме Фурье, «если непериодическая функция $f(x)$, определённая на $(-\infty,+\infty)$, является оригиналом по Фурье, то во всех точках её непрерывности справедливо интегральное представление»[2]

«Преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ новую функцию

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}dx, \tag{1}$$

называется прямым преобразованием Фурье и обозначается через F_+. При этом функция $\hat{f}=F_+[f]$ называется прямым преобразованием Фурье функции f» [1].

Обратным преобразованием Фурье для $f(x)$ называют интеграл

$$\check{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ixy}dx, \tag{2}$$

обозначаемый $\mathcal{F}_-[f]$. Таким образом, $\check{f}=\mathcal{F}_-[f]$.

Эти определения можно также записать в форме, используемой в теории интеграла Фурье. Пусть функция $f(x)$, определённая на всей числовой оси, является кусочно-гладкой в каждом конечном интервале и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty;+\infty)$. Тогда она представима интегралом Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}dt\right]e^{iyx}dy.$$

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}dt, \tag{3}$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \tag{4}$$

Функция $\hat{f}(y)$, полученная по формуле (3), называется прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула (4), восстанавливающая $f(x)$ по $\hat{f}(y)$, называется обратным преобразованием Фурье.

При этом интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$ понимаются в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{+n} f(u)du.$$

Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то интегралы (1) и (2) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

Функция f называется абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, если сходится интеграл от её модуля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Это условие является достаточным для существования преобразования Фурье и обеспечивает равномерную сходимость интеграла, определяющего $\hat{f}(y)$.

4. Формула обращения и спектральная интерпретация. Для функций, удовлетворяющих условиям абсолютной интегрируемости как самой функции f, так и её образа Фурье $\hat{f}$, выполняется важное свойство: последовательное применение прямого и обратного преобразований Фурье к кусочно-гладкой непрерывной функции приводит к исходной функции. То же самое справедливо, если сначала применить обратное преобразование, а затем прямое. Символически это записывается в виде:

$$f = \mathcal{F}_{-}[\mathcal{F}_{+}[f]] = \mathcal{F}_{+}[\mathcal{F}_{-}[f]],$$

что называют формулами обращения преобразования Фурье. Если непрерывная функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]](x) = f(x). \tag{5}$$

«Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ называют образом Фурье или спектральной характеристикой функции $f(x)$. В физических приложениях функция $\hat{f}(y)$ называется спектральной плотностью сигнала $f(x)$» [1].

Её модуль $|\hat{f}(y)|$ называется амплитудным спектром, а аргумент $\arg \hat{f}(y)$ — фазовым спектром функции $f(x)$.

Преобразование Фурье раскладывает исходную функцию на частотные составляющие, представляя её в виде интеграла синусоид различной частоты, амплитуды и фазы.

Если $f(x)$ интерпретируется как сигнал во временной области, то $\hat{f}(y)$ описывает его спектр в частотной области. Модуль $|\hat{f}(y)|$ определяет амплитуды гармоник с частотой y, а фаза $\arg \hat{f}(y)$ — их сдвиги.

Формулы обращения показывают, что функции f и $\hat{f}$ в определённом смысле равноправны: каждая из них может быть восстановлена по другой. Заметим, что даже для вещественнозначной функции $f(x)$ её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$, является комплекснозначной функцией.

5. Свойства преобразования Фурье.Широкие возможности применения преобразования Фурье основываются на нескольких полезных свойствах этого преобразования.

Отметим следующие свойства преобразования Фурье и обратного преобразования:

1. Формула обращения. Уже была приведена выше (5).

2. Линейность. Преобразование Фурье является линейным оператором: для любых комплексных чисел α, β и функций f, g, для которых определены $\mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}[g]$, выполняется

   $$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g].$$

   Аналогичное свойство имеет и обратное преобразование Фурье.

3. Непрерывность. «Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ есть непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, причём» [4]

   $$\lim_{y\to+\infty} \hat{f}(y) = \lim_{y\to-\infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{6}$$

4. Преобразование Фурье производной. «Если f абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f' \in L_1(-\infty, \infty)$, то имеет место равенство» [2]

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Если функция f такова, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $f, \dots, f^{(k)} \in L_1(-\infty, \infty)$, то с помощью таких же рассуждений получим

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f], \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

5. «Производная преобразования Фурье. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, функции $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f]$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до n-го порядка включительно, причём» [4]

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k \mathcal{F}[x^k f(x)](y), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

6. Частные случаи: косинус- и синус-преобразования. Для чётных и нечётных функций общая формула преобразования Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ — чётная. Перепишем равенство для интеграла Фурье в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt \right] \cos(yx)dy.$$

$$\hat{f_c}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt. \tag{9}$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f_c}(y)\cos(yx)dy. \tag{10}$$

Функция $\hat{f_c}(y)$ называется косинус-преобразованием функции $f(t)$.

Пусть функция $f(x)$ — нечётная. Тогда равенство для интеграла Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt \right] \sin(yx)dy.$$

$$\hat{f_s}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt, \tag{11}$$

тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f_s}(y)\sin(yx)dy. \tag{12}$$

Функция $\hat{f_s}(y)$ называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Пары соотношений (9),(10) и (11),(12) демонстрируют важное свойство симметрии, называемое законом взаимности косинус- и синус-преобразований Фурье: если $\hat{f_c}(y)$ является косинус-преобразованием чётной функции $f(x)$, то сама $f(x)$ оказывается косинус-преобразованием функции $\hat{f_c}(y)$; аналогично, если $\hat{f_s}(y)$ — синус-преобразование нечётной функции $f(x)$, то $f(x)$ является синус-преобразованием функции $\hat{f_s}(y)$.

Это означает, что прямое и обратное косинус- (или синус-) преобразования Фурье имеют одинаковый вид, что упрощает их практическое использование.

7. Решение задач.

Задача 2.1. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

1. $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$;
2. $f(x) = x^2 e^{-|x|}$;

3. $f(x) = \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

Решение.

1. Функция $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ является чётной и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ при $\alpha > 0$. Поэтому её преобразование Фурье можно вычислять как косинус-преобразование:
$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ixy}\, dx.$$
В силу чётности подынтегральной функции мнимая часть (содержащая $\sin(xy)$) обращается в ноль, и интеграл сводится к:
$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(xy)\, dx.$$
Используя табличный интеграл
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0,$$
получаем:
$$\mathcal{F}[e^{-\alpha|x|}](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}, \quad \alpha > 0.$$

2. Для нахождения преобразования Фурье функции $x^2 e^{-|x|}$ воспользуемся свойством дифференцирования образа (8):
$$\frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}[e^{-|x|}](y) = (-i)^2 \mathcal{F}[x^2 e^{-|x|}](y).$$
Согласно полученному реультату из 1 пункта при $\alpha = 1$:
$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}.$$
Дважды дифференцируя эту функцию по y, находим:
$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y}{(1+y^2)^2},$$
$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2(3y^2-1)}{(1+y^2)^3}.$$
Тогда
$$\mathcal{F}[x^2 e^{-|x|}](y) = (-1)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2(3y^2-1)}{(1+y^2)^3} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}.$$

3. Воспользуемся свойством преобразования производной (формула (7)):
$$\mathcal{F}\left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right](y) = (iy)^3\, \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y).$$
Найдём преобразование Фурье функции $\dfrac{1}{1+x^2}$. Эта функция чётная, поэтому:
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\, dx.$$
Используем табличный интеграл Лапласа:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\beta|}.$$
Следовательно,
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}.$$
Окончательно получаем:
$$\mathcal{F}[f](y) = (iy)^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y^3 e^{-|y|}.$$

Задача 2.2. Доказать, что преобразование Фурье сдвинутой функции имеет вид:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y}\,\hat{f}(y), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y)$.

Доказательство. По определению прямого преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha)e^{-ixy}\,dx.$$

Выполним замену переменной $t = x - \alpha$. Тогда $x = t + \alpha$, $dx = dt$, и пределы интегрирования не изменяются:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(t+\alpha)y}\,dt.$$

Разложим экспоненту на множители:

$$e^{-i(t+\alpha)y} = e^{-ity} \cdot e^{-i\alpha y}.$$

Множитель $e^{-i\alpha y}$ не зависит от переменной интегрирования t, поэтому его можно вынести за знак интеграла:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\,dt.$$

Оставшийся интеграл в точности равен преобразованию Фурье исходной функции $\hat{f}(y)$. Следовательно,

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha)](y) = e^{-i\alpha y}\,\hat{f}(y).$$

Замечание. Данное свойство показывает, что сдвиг сигнала во временной области на величину α приводит лишь к появлению фазового множителя $e^{-i\alpha y}$ в его спектре. При этом амплитудный спектр $|\hat{f}(y)|$ не изменяется.

Задача 2.3. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, и пусть функция

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

удовлетворяет условию $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Доказать, что

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = -\frac{i}{y}\,\hat{f}(y),$$

где $\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y)$.

Доказательство. 1. В силу основной теоремы анализа и непрерывности f, функция $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. Применим к функции $\varphi(x)$ свойство преобразования Фурье производной (7). Условия свойства выполнены: φ непрерывна и дифференцируема, а её производная f абсолютно интегрируема по условию. Получаем:

$$\mathcal{F}[\varphi'](y) = iy\,\mathcal{F}[\varphi](y).$$

Так как $\varphi'(x) = f(x)$, это равенство эквивалентно:

$$\hat{f}(y) = iy\,\mathcal{F}[\varphi](y).$$

3. Рассмотрим случай $y \neq 0$. Из равенства непосредственно выражаем искомое преобразование:

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = \frac{1}{iy}\,\hat{f}(y) = -\frac{i}{y}\,\hat{f}(y).$$

4. Рассмотрим случай $y = 0$. По определению:

$$\mathcal{F}[\varphi](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

В силу условия $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и абсолютной интегрируемости f, оба интеграла существуют. Формулу $-\frac{i}{y}\hat{f}(y)$ при $y = 0$ следует понимать в предельном смысле. Можно показать, что предел $\lim_{y\to 0} \mathcal{F}[\varphi](y)$, вычисленный по полученной формуле, согласуется с прямым значением $\mathcal{F}[\varphi](0)$, что завершает доказательство.

Таким образом, для всех $y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$\mathcal{F}[\varphi](y) = -\frac{i}{y}\hat{f}(y).$$

Задача 2.4. Найти преобразование Фурье функции (прямоугольного импульса):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. 1. Функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной, ограниченной и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 < +\infty.$$

Функция является чётной: $f(-x) = f(x)$.

2. По определению прямого преобразования Фурье (1):

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

В силу чётности $f(x)$ и нечётности функции $\sin(xy)$ (мнимой части экспоненты), интеграл от мнимой части по симметричному промежутку равен нулю. Поэтому преобразование сводится к косинус-преобразованию Фурье:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx.$$

3. Поскольку $f(x) = 0$ при $x > 1$, верхний предел интегрирования меняется:

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} \cos(xy)\,dx.$$

Вычисляем данный интеграл (при $y \neq 0$):

$$\int_{0}^{1} \cos(xy)\,dx = \left.\frac{\sin(xy)}{y}\right|_{0}^{1} = \frac{\sin y}{y}.$$

При $y = 0$ интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int_{0}^{1} \cos(0)\,dx = \int_{0}^{1} 1\,dx = 1.$$

Объединяя результаты, получаем:

$$\hat{f}(y) = \mathcal{F}[f](y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\sin y}{y}, & y \neq 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & y = 0. \end{cases}$$

Функция $\dfrac{\sin y}{y}$ (ядро Дирихле) доопределена по непрерывности в нуле: $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$, что согласуется с нашим результатом. Таким образом, преобразование Фурье можно записать в единой форме:

$$\mathcal{F}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin y}{y} \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}.$$

6. Заключение. В рамках представленной работы исследованы основные понятия и свойства преобразования Фурье, а также методы его применения для решения дифференциальных уравнений. В теоретической части рассмотрены определения интеграла Фурье, прямого и обратного преобразований, а также их частных случаев — косинус- и синус-преобразований. Особое внимание уделено свойствам преобразования Фурье: линейности, непрерывности, связи с дифференцированием, формуле обращения, свойству сдвига и преобразованию интеграла.

Практическая часть работы была направлена на применение полученных теоретических знаний для решения конкретных задач. Вычислены преобразования Фурье для функций. Доказаны свойства преобразования сдвинутой функции и связи преобразования функции с преобразованием её интеграла. Представленные примеры демонстрируют, как свойства преобразования Фурье используются для сведения дифференциальных операций к алгебраическим действиям в частотной области.

Полученные результаты подтверждают, что преобразование Фурье является эффективным методом для решения задач математической физики и анализа. Практическое применение рассмотренных методов показывает связь между теоретическими конструкциями функционального анализа и конкретными вычислительными процедурами решения прикладных задач.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Бельхеева Р. К. 2014. Преобразование Фурье в примерах и задачах. Новосибирск, РИЦ НГУ, 81.
2. Волков В. А. 2014. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона. Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 32.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 544.
4. Кудрявцев Л. Д. 2021. Курс математического анализа. Том 3. Москва, Юрайт, 351.
5. Романова Л. Д., Шаркунова Т. А., Елисеева Т. В. 2015. Интегральные преобразования. Пенза, Изд-во ПГУ, 76.

Поступила в редакцию 18.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Науменко Наталия Николаевна – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию