Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 230–236.

Метод приближений и теорема Пикара

Бекетов В. Ю.
1829310@bsuedu.ru

Аннотация. Данная статья преследует цель обобщения имеющихся результатов в области исследования равномерной сходимости функциональных рядов, функциональных последовательностей, а также в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основным результатом является метод приближений для интегрирования или численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого, разрешенных относительно производной.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, ряд, приближение Пикара, условие Липшица, функциональная последовательность

Для цитирования: Бекетов В. Ю. 2025. Метод приближений и теорема Пикара. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 230–236.

Введение. Обычно, курс обыкновенных дифференциальных уравнение (ОДУ или ДУ) начинается с ДУ, разрешенных относительно производной, а также с рассмотрения задача Коши, которая накладывает начальные условия на значение функции в некоторой точке. Для любой задачи рассматривают, когда она выполнена, то есть существование решения, а также могут рассматривать единственность данного решения. Геометрическая интерпретация существования и единственности решение задачи Коши данного ДУ означает, что через некоторую заданную точку, в некоторой малой окрестности, проходит только одна кривая, являющаяся решением этого ДУ.

Теоретическая часть.

Лемма. [см. [1, с. 6-7]] *Пусть f – непрерывная на прямоугольнике функция двух переменных. Функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши*

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$
$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда является решением интегрального уравнения

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{3}$$

где решением интегрального уравнения называется непрерывная функция $y = y(x)$, обращающая уравнение в тождество.

Доказательство. «$\Rightarrow$» : Пусть $y = y(x)$ – решение задачи (1)–(2). Проинтегрируем уравнение (1) на $[x_0; x]$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt \overset{(2)}{\Longrightarrow} y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(y))\, dt$$

Так как функция y – решение ДУ, то она дифференцируемая, а значит и непрерывная.

«$\Leftarrow$» : Пусть $y = y(x)$ – решение интегрального уравнения (3), значит y – непрерывная функция. Так как y и f непрерывные, то и $f(t, y(t))$ тоже непрерывная. Тогда, по теореме Барроу, производная от интеграла в правой части (3) по верхнему пределу равна $f(x, y(x))$, то есть непрерывная.
Дифференцируем уравнение (3) по x:

$$y' = f(x, y(x)),$$

значит y' непрерывная и удовлетворяет (1), а из (3) получаем выполнение (2), так как интеграл равен нулю при $x = x_0$. ■

Теперь, вместо доказательства существования и единственности решения задачи (1)–(2), можно рассматривать существование и единственность решения уравнения (3).

Определение. [см. [4, с. 58]] *Функция $f(x,y)$ называется липшицевой по y, если она удовлетворяет условию Липшица*[1] *относительно y, т. е.*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant L\cdot|y_1-y_2|, \tag{4}$$

где L – константа Липшица, для которой выполнено неравенство (4) *при всех возможных y_1 и y_2. При этом* (4) *не зависит от x.*

Будем обозначать множество липшицевых функции по переменной x_i на множестве D как $Lip_{x_i}(D)$. Например, липшицевость функции $f(x,y)$ по переменой y на множестве Π обозначают как $f\in Lip_y(\Pi)$.

Теорема. [см. [4, с. 57-64]] *Пусть $f(x,y)\in C(\Pi)\cap Lip_y(\Pi)$, где $\Pi=\{(x,y): |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$. Тогда решение задачи* (1)–(2)*, или* (3)*, существует и единственно на $[x_0-h;x_0+h]$, где $h=\min\left(a,b/M,L^{-1}\right)$, $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x,y)|$, L – констанста Липшица.*

Доказательство. Строим, так называемые, последовательные приближения Пикара:

$$\begin{aligned}
&y_0(x)\equiv y_0,\\
&y_1(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))\,dt,\\
&y_2(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\,dt,\\
&\dots\\
&y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Докажем, что $\forall n: |y_n-y_0|\leqslant b$, то есть $y_n\in[y_0-b;y_0+b]$.

Если $n=1$, то

$$|y_1-y_0|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))\,dt\right|\leqslant\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_0(t))|\,|dt|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant M\cdot\frac{b}{M}=b.$$

Пусть данное утверждение верно для $n-1$, тогда

$$|y_n-y_0|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))\,dt\right|\leqslant\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))|\,|dt|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant M\cdot\frac{b}{M}=b,$$

тогда $\forall n: (x,y_n)\in\Pi$. Индуктивное предположение важное, так как только при $(x,y_{n-1})\in\Pi$ имеем, что супремум $f(x,y_{n-1})$ равен M.

Нам нужно доказать равномерную сходимость функциональной последовательности y_n. Построим ряд с частичной суммой равной этой последовательности:

$$y_0(x)+(y_1(x)-y_0(x))+\ldots+(y_n(x)-y_{n-1}(x))=S_n(x)=y_n(x), \tag{5}$$

тогда, доказав равномерную сходимость ряда на $[x_0-h;x_0+h]$, получим равномерную сходимость y_n. Оценим модуль общего члена по индукции:

$$|y_1-y_0|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))\,dt\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh,$$

$$\begin{aligned}
|y_2-y_1|&=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))\,dt\right|\leqslant\\
&\leqslant\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t)-f(t,y_0(t)))|\,|dt|\overset{(4)}{\leqslant}L\int\limits_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0(t)|\,|dt|\leqslant\\
&\leqslant L\int\limits_{x_0}^{x}M|t-x_0|\,dt=LM\frac{|x-x_0|^2}{2}\leqslant\frac{LMh^2}{2},
\end{aligned}$$

[1] Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц – немецкий математик.

$$|y_3 - y_2| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\, dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t) - f(t, y_1(t)))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)|\, |dt| \leqslant$$
$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} LM \frac{|t - x_0|^2}{2}\, dt = L^2 M \frac{|x - x_0|^3}{3!} \leqslant \frac{L^2 M h^3}{3!}.$$

Пусть верно, что $|y_n - y_{n-1}| \leqslant \dfrac{L^{n-1} M |x - x_0|^n}{n!}$, покажем аналогичную оценку для $|y_{n+1} - y_n|$:

$$|y_{n+1} - y_n| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))\, dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t) - f(t, y_{n-1}(t)))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|\, |dt| \leqslant$$
$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} \frac{L^{n-1} M |t - x_0|^n}{n!}\, dt = L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{L^n M h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Мы поняли, что частичная сумма ряда (5) почленно мажорируется элементами некоторого числового ряда. Доказав сходимость этого числогого ряда, по критерию Вейерштрасса[1] получим абсолютную и равномерную сходимость (5).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M h^n}{n!}, \quad a_n = \frac{L^{n-1} M h^n}{n!},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n+1} = 0 < 1 \overset{\text{пр. Даламебра}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M h^n}{n!} < \infty,$$

значит частичная сумма (5) абсолютно и равномерно сходится на $[x_0 - h; x_0 + h]$, а так как все её слагаемые непрерывные, то $S_n \rightrightarrows \overline{y}$, где $\overline{y}$ непрерывная функция. По построению, $S_n = y_n$, тогда $y_n \rightrightarrows \overline{y}$. Кроме того, из замкнутости П следует, что $(x, \overline{y}) \in \Pi$.

Так как

$$y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt,$$

то, совершив предельный переход в левой и правой части этого равенства при $n \to \infty$ ($|x - x_0| \leqslant h$), мы хотим получить

$$\overline{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, t\overline{y}(x))\, dt.$$

Докажем возможность такого передельного перехода, т. е. что

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \to \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\, dt. \tag{6}$$

Равномерная сходимость $y_n \rightrightarrows \overline{y}$ на $|x - x_0| \leqslant h$ по определению означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N,\ \forall x : |x - x_0| \leqslant h\ :\ |y_n - \overline{y}| < \varepsilon.$$

[1]см. [5], с. 427

[2]По признаку Даламбера [см. [2], с. 93]

Тогда имеем, что

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\, dt \right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, \overline{y}(t))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} \int\limits_{x_0}^{x} L|y_{n-1} - \overline{y}||ds| < L\varepsilon|x - x_0| \leqslant L\varepsilon h.$$

Отсюда получаем возможность предельного перехода (6), а значит $\overline{y}$ – решение интегрального уравнения (3), т. е. решение задачи Коши (1)–(2).

Теперь покажем *единственность* решения. Пусть существует две функции $\overline{y}$ и $\tilde{y}$, удовлетворяющие уравнению (3). Тогда

$$\overline{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\, dt, \quad \tilde{y} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\, dt.$$

$$|\overline{y} - \tilde{y}| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \overline{y}(t)) - f(t, \tilde{y}(t))|\, |dt| \overset{(4)}{\leqslant} L \int\limits_{x_0}^{x} |\overline{y}(t) - \tilde{y}(t)||dt| \leqslant L \cdot \left(\sup_{|x - x_0| \leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \right) h. \tag{7}$$

При этом понятно, что $\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \geqslant 0$, так как выражение под супремумом неотрицательно всегда.

Если в (7) взять супремум от крайней левой и правой частей, то получим

$$\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant Lh \cdot \left(\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \right) \Rightarrow (1 - Lh) \cdot \left(\sup_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \right) \leqslant 0,$$

т. е. при $1 - Lh \geqslant 0$ получим $\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant h} |\overline{y}(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant 0$. Имеем, что супремум больше или равен нулю, а также меньше или равен нулю, при $h \leqslant L^{-1}$. Это означает, что $\overline{y} = \tilde{y}$ при $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\left(a, b/M, L^{-1}\right)$. ■

Данное доказательство теоремы показывает несколько важных замечаний:

1. Теорема носит исключительно локальный характер, т. е. мы можем утверждать существование и единственность решения задачи (1)–(2), или (3), только на определенном интервале;

2. Для существования решения, вообще, достаточно условие, что $h = \min(a, b/M)$. Константа Липшица, как ограничение для h, участвовала только в доказательстве единственности;

3. Во время доказательства был выстроен метод решения дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, с помощью последовательных приближений Пикара. Эти приближения, в предельном переходе, являются решением данного ДУ.

Практическая часть.

Задача 1. [3, с. 18] Проинтегрируйте уравнение $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y - 1| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = 1 \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 1$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)| = a + b + 1$, тогда $h = \min(a, b/(a + b + 1), 1)$. Построим приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 1,$$

$$y_1 = 1 + \int\limits_{0}^{x} (t + 1)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(t + 1 + t + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

$$y_3 = 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \right) dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x \left(t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4}\right) dt =$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Докажем по индукции общий вид формулы. База индукции: $n = 4$. Пусть для номера n верна формула

$$y_n = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{x^n}{3\cdot \ldots \cdot n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

покажем её верность для номера $n + 1$:

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^x (t + y_n(t))\, dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{3\cdot \ldots \cdot (n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Помним, что на $|x - x_0| \leqslant h$ имеем $y_n \rightrightarrows \overline{y}$, то есть

$$y_n = 1 + x + 2\cdot\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 + x + 2\cdot\left(-1 - x + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= -1 - x + 2\cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow y_n \rightrightarrows \overline{y} = -1 - x + 2e^x$$

Подстановкой легко убедиться, что $\overline{y}$ – решение задачи Коши для данного ДУ.

Задача 2. [3, с. 18] Проинтегрируйте уравнение $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y - 2| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2y_1 - 2x^2 - 3 - 2y_2 + 2x^2 + 3| = 2\cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)| = 2\cdot(2 + b) - 3 = 2b + 1$, тогда $h = \min(a, b/(2b+1), 1/2)$. Построим приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 2,$$
$$y_1 = 2 + \int_0^x (2\cdot 2 - 2t^2 - 3)\, dt = 2 + x - \frac{2x^3}{3},$$
$$y_2 = 2 + \int_0^x \left(2\cdot\left(2 + t - \frac{2t^3}{3}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^4}{3\cdot 4},$$
$$y_3 = 2 + \int_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{2t^3}{3} - \frac{4t^4}{3\cdot 4}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{4x^4}{3\cdot 4} - \frac{8x^5}{3\cdot 4\cdot 5},$$
$$y_4 = 2 + \int_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{4t^4}{3\cdot 4} - \frac{8t^5}{3\cdot 4\cdot 5}\right) - 2t^2 - 3\right) dt = 2 + x + x^2 - \frac{8x^5}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{16x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.$$

Докажем по индукции общий вид формулы. База индукции: $n = 4$. Пусть для номера n верна формула

$$y_n = 2 + x + x^2 - \frac{2^{n-1}x^{n+1}}{3\cdot \ldots \cdot (n+1)} - \frac{2^n x^{n+2}}{3\cdot \ldots \cdot (n+2)},$$

покажем её верность для номера $n + 1$:

$$y_{n+1} = 2 + \int_0^x (2y_n(t) - 2t^2 - 3)\, dt =$$
$$= 2 + \int_0^x \left(2\cdot\left(2 + t + t^2 - \frac{2^{n-1}t^{n+1}}{3\cdot \ldots \cdot (n+1)} - \frac{2^n t^{n+2}}{3\cdot \ldots \cdot (n+2)}\right) - 2t^2 - 3\right) dt =$$
$$= 2 + x + x^2 - \frac{2^n x^{n+2}}{3\cdot \ldots \cdot (n+2)} - \frac{2^{n+1}x^{n+3}}{3\cdot \ldots \cdot (n+3)}.$$

Помним, что на $|x - x_0| \leqslant h$ имеем $y_n \rightrightarrows \overline{y}$, то есть

$$y_n = 2 + x + x^2 - \frac{2^{n-1}x^{n+1}}{3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} - \frac{2^n x^{n+2}}{3 \cdot \ldots \cdot (n+2)} \rightrightarrows \overline{y} = 2 + x + x^2$$

Подстановкой легко убедиться, что $\overline{y}$ – решение задачи Коши для данного ДУ.
Задача 3. [3, с. 18] Найти три последовательных приближения уравнения $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.
Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать ДУ: $\Pi = \{|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x + y_1^2 - x - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant (b + b) \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2b$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)| = a + b$, тогда $h = \min\left(a, b/(a+b), 1/2b\right)$. Построим первые три приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 0, \quad y_1 = \int\limits_0^x (t + 0^2)\,dt = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \int\limits_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 5},$$

$$y_3 = \int\limits_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{4 \cdot 5}\right)^2\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^8}{4 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{x^{11}}{16 \cdot 25 \cdot 11}.$$

На рисунке 1 показано отличие первых трёх последовательных приближений от кривой, удовлетворяющей задаче Коши из условия.

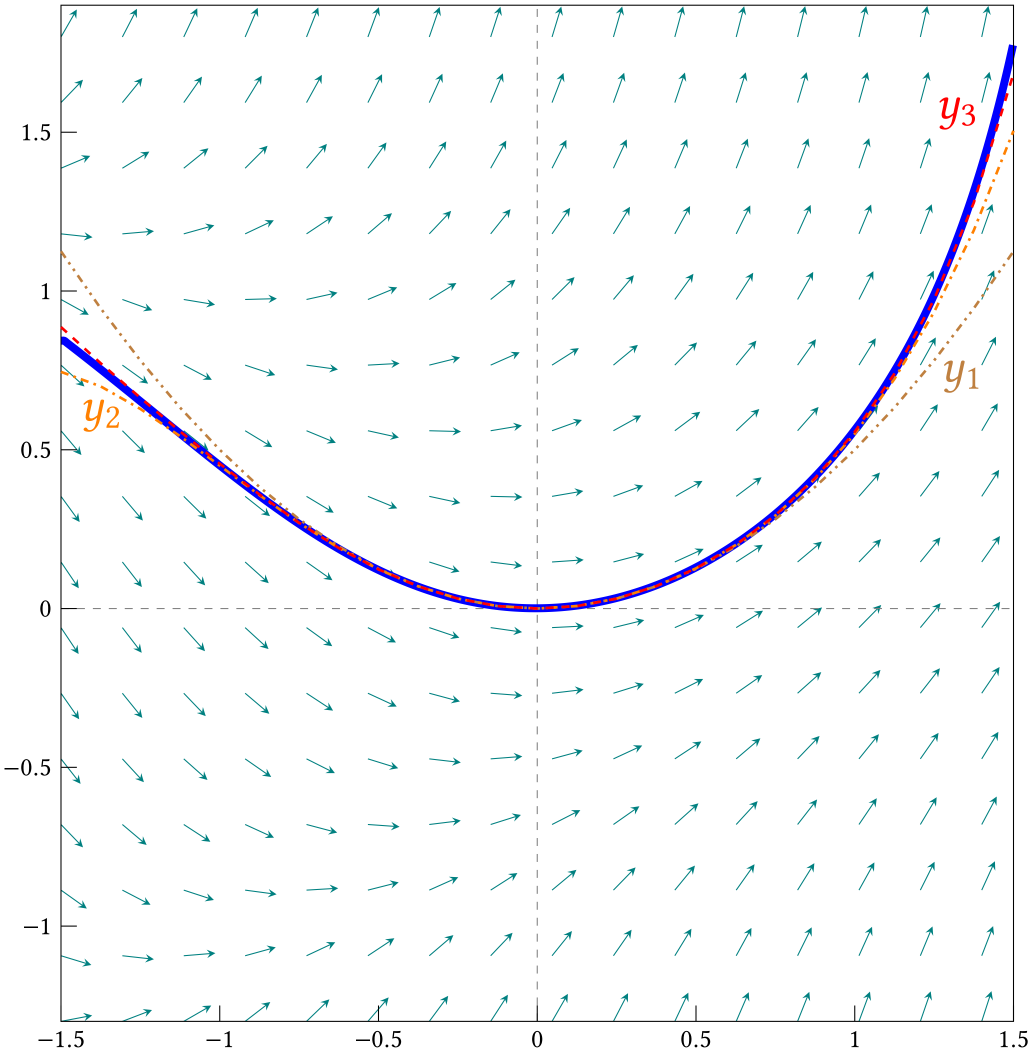

Рис. 1. поле направлений, интегральная кривая и приближения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$.

Задача 4. [3, с. 18] Найти три последовательных приближения уравнения $y' = x^2 - y^2$, $y(-1) = 0$.

Решение: Определим прямоугольник, на котором будем решать дифференциальное уравнение $\Pi = \{|x+1| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$. Понятно, что $f \in C(\Pi)$. Покажем липшицевость f:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x^2 - y_1^2 - x + y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant (b+b) \cdot |y_1 - y_2|,$$

тогда $f \in \mathrm{Lip}_y(\Pi)$, $L = 2b$. $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)| = a + b - 1$, тогда $h = \min(a, b/(a+b-1), 1/2b)$. Построим первые три приближения Пикара:

$$y_0 \equiv 0, \quad y_1 = \int\limits_{-1}^{x} (t^2 - 0^2)\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3},$$

$$y_2 = \int\limits_{-1}^{x} \left(t^2 - \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}\right)^2\right) dt = -\frac{x}{9} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{9 \cdot 2} - \frac{x^7}{9 \cdot 7} + \frac{11}{42},$$

$$y_3 = \int\limits_{-1}^{x} \left(t^2 - \left(-\frac{t}{9} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{9 \cdot 2} - \frac{t^7}{9 \cdot 7} + \frac{11}{42}\right)^2\right) dt =$$
$$= -\frac{121x}{1764} + \frac{11x^2}{378} + \frac{80x^3}{243} - \frac{11x^4}{252} + \frac{13x^5}{630} - \frac{x^6}{486} - \frac{x^7}{63} + \frac{5x^8}{882} + \frac{5x^9}{6804} + \frac{2x^{11}}{2079} - \frac{x^{12}}{6804} - \frac{x^{15}}{59535} + \frac{5177}{18711}.$$

Покажем графически отличие первых трёх последовательных приближений от кривой, удовлетворяющей задаче Коши из условия.

Заключение. В данной статье была разобрана задача Коши для ДУ, разрешенных относительно производной, а именно существование и единственность решения. Доказательство условий существования и единственности строилось на методе последовательных приближений Пикара, которые приближают решение ДУ в точке рассмотрения задачи Коши. Также были решены некоторые задачи: были найдены либо явные решения дифференциального уравнения, либо их приближения решения.

Список литературы

1. Бибиков Ю. Н. 1991. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. – М., Высш. шк., 303 с.
2. Краснов Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., МИР, 720 с.
3. Матвеев Н.М. 1967. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений – М., Высш. шк., 564 с.
4. Степанов В. В. 1950. Курс дифференциальных уравнений. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 486 с.
5. Хартман Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., МИР, 720 с.

Поступила в редакцию 14.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Бекетов Вадим Юрьевич – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию