Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 225–229.

Аналитические функции в радиальных трубчатых областях над конусами

Ларионова О. В.
1318319@bsuedu.ru

Аннотация. Цель данной работы – изучение аналитических функций многих комплексных переменных в радиальных трубчатых областях над выпуклыми острыми конусами. Основное внимание уделяется понятию конуса и аналитическим свойствам функций в соответствующей трубчатой области, а также построению и анализу интегральных представлений Бохнера.

Ключевые слова: конус, сопряженный конус, радиальная трубчатая область, аналитические (голоморфные) функции, интегральные представления, пространство Харди, остов, формула Коши, теорема Бохнера, ядро Бохнера

Для цитирования: Ларионова О. В. 2025. Аналитические функции в радиальных трубчатых областях над конусами. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 225–229.

---

1. Введение. Исследование аналитических функций в радиальных трубчатых областях над конусами составляет важный раздел многомерного комплексного анализа, объединяющий геометрические, алгебраические и функциональные методы. Изучение таких областей позволяет установить глубокие связи между свойствами конуса, интегральными представлениями и поведением аналитических функций. Целью данной работы является систематическое изложение теории аналитических функций в радиальных трубчатых областях с акцентом на аппарат интегрального представления Бохнера.

2. Конус в многомерном пространстве, сопряженный конус. Радиальная трубчатая область. Конусом $C \subset \mathbb{R}^n$ (с вершиной в нуле) называется множество точек, обладающее свойством: $\lambda y \in C$ для всех $y \in C$ и $\lambda > 0$. Проекция конуса C (обозначается пр C) – его пересечение с единичной сферой $|y| = 1$. Компактным подконусом конуса C является конус C', для которого пр $\overline{C'} \subset$ пр C.

Рассмотрим понятие сопряженного конуса [4]: $C^* = [\xi : \ \xi y \geqslant 0, \ y \in C]$. Конус C^* является замкнутым и выпуклым. Обозначим через $O(C)$ выпуклую оболочку конуса C. Выполняются равенства

$$C^* = \overline{C^*} = O(C)^* \text{ и } C^{**} = \overline{O(C)}.$$

Из этого следует, что для выполнения равенства $\overline{O(C)} = \overline{O(C_1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $C^* = C_1^*$.

Конус C называется самосопряженным, если $C^* = \overline{C}$.

Функция $\mu_C(\xi) = \sup\limits_{y \in \text{пр} C} (-\xi y)$ называется индикатрисой конуса C. При этом индикатриса – выпуклая (и, следовательно, непрерывная) однородная функция степени 1, которая удовлетворяет неравенствам:

$$|\mu_C(\xi)| \leqslant |\xi|, \quad \mu_C(\xi_1 + \xi_2) \leqslant \mu_C(\xi_1) + \mu_C(\xi_2).$$

Утверждение 1. *Для выполнения $\overline{C} = \overline{C_1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_C(\xi) \equiv \mu_{C_1}(\xi)$.*

Если выполняется $\xi \bar{\in} C^*$, то $\mu_C(\xi) > 0$, в то время как: если $\xi \in C^*$, то $\mu_C(\xi) \leqslant 0$; справедливы следующие формулы:

$$C^* = [\xi : \ \mu_C(\xi) \leqslant 0]; \ C_* = \mathbb{R}^n \backslash C^* = [\xi : \ \mu_C(\xi) > 0];$$
$$\forall \xi : \ \mu_C(\xi) \leqslant \mu_{O(C)}(\xi).$$

Введем в рассмотрение число

$$\rho_C = \sup_{\xi \in C_*} \frac{\mu_{O(C)}(\xi)}{\mu_C(\xi)},$$

оно характеризует невыпуклость конуса C.

Утверждение 2. *Для выпуклости конуса $\overline{C}$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_C = 1$.*

Утверждение 3. *Рассмотрим открытый конус C, состоящий из конечного числа связных компонентов, тогда справедливо $\rho_C < +\infty$.*

Примеры.

1. $C = \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbb{R}^{n*} = \{0\}$, $\quad \mu_{\mathbb{R}^n}(\xi) = |\xi|$, $\quad \rho_{\mathbb{R}^n} = 1$.

2. $C = \Gamma^+$. Тогда $\Gamma^{+*} = \overline{\Gamma}$, $\rho_{\Gamma^+} = 1$ и

$$\mu_{\Gamma^+}(\xi) = \begin{cases} |\xi|, & \xi \in -\Gamma^+, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{\xi}| - \xi_1\right), & \xi \bar{\in} -\Gamma^+. \end{cases}$$

3. $C = \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- = \left[y : y_1^2 > |\tilde{y}|^2\right]$ - световой конус. Тогда $O(\Gamma) = \mathbb{R}^n$, $\Gamma^* = \{0\}$, $\rho_\Gamma = \sqrt{2}$, $\mu_{O(\Gamma)}(\xi) = |\xi|$ и

$$\mu_\Gamma(\xi) = \begin{cases} |\xi|, & \xi \in \Gamma, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{\xi}| + |\xi_1|\right), & \xi \bar{\in} \Gamma. \end{cases}$$

Множество вида $T^c = \mathbb{R}^n + iC$, где $C \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, называется трубчатым конусом. Если конус C является связным, то T^C называют трубчатой радиальной областью [3].

Пусть связный открытый конус C таков, что замыкание его оболочки $\overline{O(C)}$ не содержит целых прямых, то есть

$$\nexists \text{ прямая } l \subset \mathbb{R}^n \text{ такая, что } l \subset \overline{O(C)}.$$

В этом случае трубчатая радиальная область T^C эквивалентна ограниченной области [5]. Выполняется: вн. $C^* \neq \varnothing$.

Утверждение 4. *Для того, чтобы конус $\overline{O(C)}$ содержал целую прямую, необходимо и достаточно, чтобы конус C^* лежал в некоторой $(n\text{-}1)$-мерной плоскости.*

Утверждение 5. *Рассмотрим открытый конус C и конус C', который является компактным в $O(C)$. Тогда существуют: $\sigma = \sigma(C') > 0$ и открытый конус $C'' = C''(C')$, который содержит конус C^*, и выполняется*

$$\xi y \geqslant \sigma |y||\xi|, \quad y \in C', \quad \xi \in C''. \tag{*}$$

Примеры радиальных трубчатых областей.

1. Одномерный случай (n=1). Рассмотрим конус $C = \mathbb{R}^+ = \{y > 0\}$ (положительная полуось), трубчатая область будет верхней полуплоскостью в $\mathbb{C}$: $T^{\mathbb{R}^+} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$. Нижняя полуплоскость – это трубчатая область над конусом $C = \mathbb{R}^- = \{y < 0\}$.

2. Случай n=2. Конус $C = \mathbb{R}^2_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \ y_1 > 0, \ y_2 > 0\}$ (первый квадрант). Трубчатой областью будет являться произведение двух верхних полуплоскостей: $T^{\mathbb{R}^2_+} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Im} z_1 > 0, \ \mathrm{Im} z_2 > 0\}$.

3. Трубчатая область над круговым конусом ($n \geqslant 2$). Световой конус будущего (открытый выпуклый острый конус): $C = \Gamma^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y_n > \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2}\}$. Трубчатая область:

$$T^{\Gamma^+} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid y \in \Gamma^+\}.$$

4. Трубчатая область над вырожденным конусом ($n = 3$). Конус $C = \{(y_1, y_2, y_3) : \ y_1 > 0\}$ (полупространство, не острый конус). Трубчатая область: $T^C = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Im} z_1 > 0\}$. Здесь мнимые части z_2, z_3 могут быть любыми вещественными числами. Область вырождена в направлениях $\mathrm{Im} z_2$, $\mathrm{Im} z_3$.

5. Вся комплексная плоскость. Конус $C = \mathbb{R}^n$ (несобственный конус, совпадает со всем пространством). Трубчатая область: $T^{\mathbb{R}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im} z \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{C}^n$. Это вырожденный случай – область совпадает со всем $\mathbb{C}^n$.

3. Аналитические функции. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Из теории функций комплексного переменного известно, что функция f называется аналитической в Ω, если она дифференцируема в каждой точке этой области [6].

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}, g : \Omega \to \mathbb{C}$ – аналитические функции. Тогда $(f+g)(z), f \cdot g(z), \ \frac{f}{g}(z)$ – аналитические функции и выполняются свойства:

1) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2) $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$;
4) $C' = 0$;
5) $(C \cdot f)'(z) = Cf'(z)$;
6) $z' = 1$.

Определение. *Функцией, голоморфной (аналитической) в трубчатой области T^C, является комплексно-значная функция $F(z)$, дифференцируемая по каждому комплексному переменному z_k в области T^C.*

Термин «голоморфная функция» (от греч. holos – целый, и morph? – форма) подчеркивает глобальное свойство: функция дифференцируема во всей области (а не только в точке). Чаще используется в многомерном комплексном анализе и алгебраической геометрии. Понятие «аналитическая функция» подчеркивает локальное свойство: функция в окрестности каждой точки представляется сходящимся степенным рядом (рядом Тейлора). Этот термин старше и используется также для вещественных функций.

Определение. *Пространство Харди $H^p(T^C)$ – класс функций F, голоморфных в T^C, для которых выполняется неравенство:*

$$\sup_{y \in C} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx < \infty.$$

Теорема (о голоморфности интеграла). *Пусть μ – комплексная мера (или обобщённая функция умеренного роста) с носителем в C^*. Тогда функция*

$$F(z) = \int\limits_{C^*} e^{i\langle z, \xi \rangle} d\mu(\xi)$$

является голоморфной в T^C.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в трубчатой радиальной области T^C, и положим, что для всех y из конуса C', компактного в C, $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|f(x+iy)\| \leqslant M_{\varepsilon,f}\,(C')\,e^{\varepsilon|y|} \tag{1}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Функция

$$g_y(\xi) = (2\pi)^{-n}e^{\xi y}\int f(x+iy)e^{-i\xi x}dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{z=x+iy} f(z)e^{-i\xi z}dz_1\dots dz_n \tag{2}$$

не зависит от $y \in C$. Обозначим функцию $g_y(\xi)$ через $g(\xi)$. Функция $g(\xi)$ измерима и, в силу (2), обладает свойствами

$$\begin{array}{ll} g(\xi)e^{-\xi y} \in L_2 & \text{при всех } y \in C; \\ f(z) = \int g(\xi)e^{iz\xi}d\xi & \text{при всех } z \in T^C. \end{array}$$

$g(\xi) = 0$ почти всюду в конусе C_*. Если конус $O(C)$ содержит целую прямую, то $g(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, любая функция $f(z)$, которая является голоморфной в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяет условию (1), имеет граничное значение

$$f(x+i0) = \lim_{y\to 0,\, y\in C} f(x+iy),$$

которое не зависит от последовательности $y \to 0,\ y \in C$. Сходимость здесь понимается в смысле L_2. При этом, если конус $O(C)$ содержит целую прямую, то $f(z) \equiv 0$. В работе [7] содержится информация о классе функций, который удовлетворяет более строгому ограничению, чем (1): $\|f(x+iy)\| \leqslant M_f$, при этом конус C является выпуклым, а $\overline{C}$ не содержит ни одной целой прямой.

4. Интегральные представления. Интегральные представления составляют фундаментальный аппарат теории голоморфных функций. Они позволяют восстановить значения аналитической функции во всей области G по её граничным значениям на ∂G либо на некотором подмножестве границы, имеющем меньшую размерность (остове области). Классическим и наиболее простым примером такого представления служит формула Коши.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в области $G = G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$, при этом G_j является областью в плоскости z_j с кусочно-гладкой границей ∂G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, и непрерывную в $\overline{G}$. Для функции $f(z)$ справедлива формула Коши:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial G_1\times\partial G_2\times\ldots\times\partial G_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^I} = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G, \\ 0, & \text{если } z \overline{\in} \overline{G}, \end{cases}$$

где положительное направление на ∂G_j – то направление, при котором область G_j остается слева. Формула Коши выражает значения $f(z)$ в $2n$-мерной области $G = G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ через ее значения на n-мерном ориентированном многообразии $\partial G_1\times\partial G_2\times\ldots\times\partial G_n$ – остове области G. Остов составляет часть границы ∂G области G. Ядро в формуле Коши не зависит от конкретного вида областей G_j.

Ряд интегральных представлений, являющихся обобщениями формулы Коши, был разработан для анализа голоморфных функций в областях со сложной геометрией. В рамках данной работы основное внимание уделяется представлению Бохнера, применимому к радиальным трубчатым областям. Данные области являются неограниченными, поэтому это представление справедливо не для всех голоморфных функций, а только для тех из них, которые достаточно быстро убывают на бесконечности.

5. Ядро и формула Бохнера. Введем ядро $K(z)$ для трубчатой радиальной области T^C по формуле:

$$K(z) = \int\limits_{C^*} e^{iz\xi}d\xi. \tag{3}$$

$K(z)$ называется ядром Бохнера для трубчатой радиальной области T^C.

$K(z)$ – функция голоморфная в $T^{O(c)}$, для любых y из компактного в $O(C)$ конуса C' $K(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|K(x+iy)\|^2 \leqslant M\,(C')\,|y|^{-n}. \tag{4}$$

Пусть A – некоторое множество. Обозначим $e_A(x)$ как характеристическую функцию множества A, при этом: $e_A(x) = 1,\ x \in A;\ e_A(x) = 0,\ x \overline{\in} A$.

Функция $K(x+iy)$ при любом фиксированном $y \in O(C)$ является преобразованием Фурье функции $e^{-y\xi}e_{C^*}(\xi)$, где $e_{C^*}(\xi)$ – характеристическая функция конуса C^*. Поэтому справедливо равенство Парсеваля

$$\int |K(x+iy)|^2 dx = (2\pi)^n \int_{C^*} e^{-2\xi y} d\xi.$$

Из этого равенства и из неравенства (*) для всех $y \in C'$ вытекает оценка (4),

$$\|K(x+iy)\|^2 = (2\pi)^n \sigma_n \int_0^\infty e^{-2\sigma r|y|} r^{n-1} dr \leqslant M(C')\,|y|^{-n}.$$

Примеры.

1. Пусть $C = \Gamma^0 = \left[y: \ y_j > 0, \ j = 1, 2, \ldots, n\right]$. Тогда $\Gamma^{0^*} = \Gamma^0$ и

$$K(z) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{i\sum\limits_j z_j\xi_j} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \frac{i^n}{z_1 z_2 \ldots z_n}.$$

2. Пусть $C = \Gamma^+$. Тогда $\Gamma^{+*} = \overline{\Gamma}^+$ и

$$K(z) = \int_{\overline{\Gamma}^+} e^{iz\xi} d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(-z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2\right)^{n/2}}.$$

При $n = 1$ эти ядра превращаются в ядро Коши.

3. Следующий пример был рассмотрен в работе [2]:

$$C^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > \sum_{j=1}^{n-1} a_j |x_j|, \ a_j > 0, \ j = 1, \ldots, n-1\right\}.$$

$$\int_{C^*} e^{i(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1}) + iz_n\xi_n} d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j|\xi_j|} e^{iz_n\xi_n} \Bigg) e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' =$$

$$[z_n = x_n + iy_n, \ y_n > 0]$$

$$= \frac{1}{iz_n} \prod_{j=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j\xi_j} e^{ia_j|\xi_j|z_n} = \frac{i^{n-1} a_1 \ldots a_{n-1} z_n^{n-2} 2^{n-1}}{(x_1^2 - a_1^2 z_n^2) \ldots (x_{n-1}^2 - a_{n-1}^2 z_{n-1}^2)},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j\xi_j} e^{ia_j|\xi_j|z_n} d\xi_j = \int_{-\infty}^{0} e^{i\xi_j(x_j + a_j z_n)} d\xi_j + \int_0^{+\infty} e^{i\xi_j(x_j - a_j z_n)} d\xi_j = \frac{1}{i(x_j + a_j z_n)} - \frac{1}{i(x_j - a_j z_n)} = \frac{2a_j z_n i}{x_j^2 - a_j^2 z_n^2}.$$

Следовательно, ядро Бохнера:

$$K(z) = (2i)^{n-1} z_n^{n-2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{z_j^2 - a_j^2 z_n^2}.$$

Теорема Бохнера. *Любая голоморфная в трубчатой области $T_B = B + i\mathbb{R}^n$ функция $f(z)$ голоморфна в ее выпуклой оболочке $O(T_B) = O(B) + i\mathbb{R}^n$, то есть $O(T_B)$ есть голоморфное расширение T_B* [1].

Любую функцию $f(z)$, которая голоморфна в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяет оценке (1), можно представить в виде интеграла

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int K(z - x') f(x' + i0)\, dx', \tag{5}$$

где $K(z)$ – ядро области T^C, $f(x + i0)$ – граничное значение функции $f(z)$ при $y \to 0, \ y \in C$.

Доказательство. □ Так как $g(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n \backslash C^*$, то формулу

$$f(z) = \int g(\xi) e^{iz\xi} d\xi \text{ при всех } z \in T^C$$

можно переписать в виде

$$f(z) = \int g(\xi) e_{C^*}(\xi) e^{-\xi y + ix\xi} d\xi. \tag{6}$$

Применим к интегралу (6) теорему о свертке и учтем формулу (3) и формулу:

$$f(x + i0) = \int_{C^*} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \; \in L_2$$

получим формулу (5). ■

Из этого следует, что любая функция $f(z)$, голоморфная в трубчатой радиальной области T^C и удовлетворяющая оценке (1), голоморфна в выпуклой оболочке $O\left(T^C\right) = T^{O(C)}$. При этом для всех y из компактного в $O(C)$ конуса C' функция $f(z)$ удовлетворяет оценке вида

$$\|f(x + iy)\| \leqslant N\left(C'\right)|y|^{-\frac{n}{2}} \|f(x + i0)\|, \tag{7}$$

где число $N\left(C'\right)$ не зависит от $f(z)$. При этом если конус $\overline{O(C)}$ содержит целую прямую, то $f(z) \equiv 0$.

Голоморфность $f(z)$ вытекает из представления (6), из свойств ядра $K(z)$ и из теоремы Бохнера. Оценка (7) вытекает из представления (5), из оценки (4) и из неравенства Буняковского Шварца,

$$\begin{aligned}
&\|f(x + iy)\| \leqslant (2\pi)^{-n} \left\|K\left(x + iy - x'\right)\right\| \left\|f\left(x' + i0\right)\right\| = (2\pi)^{-n} \|K(x + iy)\| \|f(x + i0)\| \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \sqrt{M\left(C'\right)} |y|^{-\frac{n}{2}} \|f(x + i0)\|.
\end{aligned}$$

Интегрирование в формуле (5) происходит по «острию» $\mathbb{R}^n$ «клина» T^C – остову области T^C. Ориентации остова $\mathbb{R}^n$ и конуса T^C должны быть согласованы.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе были рассмотрены основные понятия и определения, связанные с конусами, радиальными трубчатыми областями и аналитическими функциями. Ключевым результатом является демонстрация интегрального представления, формулы Бохнера, которая позволяет восстановить функцию по ее граничным значениям. Проведённый анализ позволяет утверждать, что аппарат интегральных представлений служит основным инструментом для изучения аналитических функций в радиальных трубчатых областях над конусами.

Список литературы

1. Бохнер С., Мартин У. Т. 1951. Функции многих комплексных переменных. ИИЛ, 301 с.
2. Васильев В. Б. 1998. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях. Тр. Моск. мат. о-ва, С. 73–105.
3. Владимиров В. С. 1964. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 414 с.
4. Владимиров В. С. 1979. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 320 с.
5. Гриндикин С. Г. 1962. Аналитические функции в трубчатых областях. ДАН СССР, С. 1205-1208.
6. Натанзон С. М. 2018. Комплексный анализ, римановы поверхности и интегрируемые системы. МЦНМО, 139 с.
7. Bochner S. 1944. Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Annals of Math., С. 686-707.

Поступила в редакцию 08.12.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ларионова Ольга Викторовна – аспирант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

vasilyev_v@bsuedu.ru

К содержанию