Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 216–224.

Решение дифференциального уравнения 3-го порядка в окрестности регулярной особой точки

Селезнев Е. А.
selezneve9@yandex.ru

Аннотация. Математические исследования физических процессов, происходящих в газовых системах, и создание математических моделей на основе этих исследований. В данной работе используется метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов и метод возмущений

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, решение краевой задачи для вязкой неизотермической газовой среды.

Для цитирования: Селезнев Е. А. 2025. Решение дифференциального уравнения 3-го порядка в окрестности регулярной особой точки. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 216–224.

---

1. Введение. По сей день все большее значение приобретают математические исследования физических и динамических свойств газовых сред [1, 3, 7], благодаря этому создаются математические модели и описывается их поведения. Спектр применения достаточно обширный: метеорологии, химической и нефтехимической, пищевой,энергетике, медицине.

Совокупность уравнений, описывающая движение газовых сред, выводится из закона сохранения веществ, закона изменения количества движения, закона сохранения энергии, уравнения термодинамического состояния и уравнения напряженного состояния. В результате получается нестационарная нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

К тому же , для решения такой системы уравнений следует задать краевые условия или условия однозначности . Краевые условия или условия однозначности содержат:

- граничные условия, характеризующие протекание процесса на границах;

- физические, характеризующие физические свойства газовой среды;

- временные условия, характеризующие особенности протекания процесса во времени; Краевые условия дают возможность выбрать одно решение из бесчисленного множества. При установившемся движении исходных условий отделяются, при нестационарном движении они представляют собой значение в начальный момент времени скорости, давления, температуры и т. д.

Относительная простота уравнений, очевидность экспериментов и ясная постановка математических задач дают надежду на получение полного количественного описания динамических явлений, происходящих в жидких и газообразных средах. В реальности все оказалось существенно сложнее. Уравнения Навье – Стокса являются одними из важнейших уравнений гидро- и газовой динамики и используются при математическом моделировании разнообразных природных процессов и технических применений. Потому это система дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывает исключительно движения вязких жидкостей, а где жидкостей там и газов. Если их дополнить уравнениями массовых сил, теплопередачи и перенос масс, то подобная система уравнений может описывать конвекцию, термическую диффузию , поведение многосоставных различных газов и жидкостей и т. д. Если мы используем силу Лоренца в качестве массовой силы и дополним систему уравнениями Максвелла для поля в сплошной среде, то полученная математическая модель сможет описывать явления электро- и магнитной гидродинамики. В частности, такие математические модели успешно применяются при моделировании поведения плазмы и межзвездного газа. газ. Различные вариации уравнений Навье – Стокса используются для описания движения атмосферных воздушных масс, в частности, при формировании прогнозов погоды и т. д.

Следовательно, уравнения Навье – Стокса являются главным уравнениями движения вязкой среды (газа, жидкости), являющим собой математическое выражение законов сохранения движения и массы.

2. Нахождение решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка в виде обобщенного степенного ряда. Доказательство теоремы о существовании единственности решения. При решении системы уравнений гидродинамики и теплопередачи мы использовали теорию возмущений, т. е. поля скорости, давления и температуры представлены в виде ряда по малому параметру. В задаче таким параметром является коэффициент Рейнольдса $\varepsilon = Re = UR\rho_e/\mu_e \ll 1$.

Решение задачи начинается с определения температурного поля вблизи нагреваемого тела. Граничное условие для температурного поля

$$\lim_{x\to 1} J_e\left(x,\theta\right) = J_S,\ \ \lim_{x\to\infty} J_e \to T_\infty$$

показывает, что температурное поле зависит только от радиальной координаты. $C_e(x,\theta) = J_{e0}(x)$. В сферической системе координат уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 Je0^{\alpha}\frac{\partial J_{e0}}{\partial x}\right) = 0,\ \ \alpha = 0.8. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1) дважды мы получаем следующее выражение для скалярного температурного поля:

$$q_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{x}\right)^{\dfrac{1}{1+\alpha}},\ \ \Gamma_0 = J_S^{1+\alpha} - 1,\ q_{e0} = T_{e0}/Q_\infty. \tag{2}$$

На основании краевых условий

$$\lim_{x\to\infty}\left(Y_r^{(e)}\,(y,\theta) - U\cos\theta\right) = 0,\ \lim_{x\to\infty}\left(U_\theta^{(e)}\,(x,\theta) + Y\sin\theta\right) = 0$$

$$Y_r^{(e)}\,(x,\theta) = UG(x)\cos\theta,\ Y_\theta^{(e)}\,(x,\theta) = -Ug(x)\sin\theta. \tag{3}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\rho_e U_r^{(e)}\right) + \frac{1}{x\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\rho_e U_\theta^{(e)}\right) = 0,$$

подставляя (3), у нас получается связь:

$$g(x) = C(x) + \frac{x}{2}\left(C^{'}(x) - f(x)C(x)\right),\ \ f(x) = \frac{1}{t_{e0}(x)}\frac{dt_{e0}(x)}{dx}. \tag{4}$$

Тут $C'(x)$ – первая производная от функции $C(x)$. Отсюда мы видим, что наша задача сводится к нахождению функции $C(x)$. Зависимость динамической вязкости от температуры, с учетом выражения (2) представляется в виде:

$$\mu_e(x,\theta) = \mu_\infty\left(1 + \frac{\Gamma_0}{x}\right)^{\beta/(1+\alpha)}. \tag{5}$$

Здесь β=0.693, α=0.821.

Подставляя полученные выше выражения в уравнения, и при этом первое продифференцируем по углу θ, а второе по y, вычитая первое из второго (тем самым мы избавляемся от давления). Затем перейдем к новой переменной $\iota = \dfrac{\Gamma_1}{x+\Gamma_1}$ и в конечном итоге получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для нахождения функции $C(\iota)$:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\iota^5 - \iota^6\right]\frac{d^3C(\iota)}{d\iota^3} + \left[2\iota^2 - \iota^3\,(10+\gamma_1) + 2\iota^4\,(7+\gamma_1) - \ell^5\,(6+\gamma_1)\right]\frac{d^2C(\iota)}{d\iota^2} -$$

$$-\left[6\iota - \iota^2\,(2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) - \iota^3\,(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \iota^4\,(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\right]\frac{dC(\iota)}{d\iota} +$$

$$+\gamma_3\iota^2\,(2-\iota)\,C(\iota) = \frac{d}{\Gamma_0}\iota\,(1-\iota)^{\gamma_4},\ \ \iota(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0}, \tag{6}$$

в котором

$$\gamma_1 = 0.1,\ \gamma_2 = 2.0,\ \gamma_3 = 0.9,\ \gamma_4 = -0.2,\ d = const,$$

$$1 < x < \infty,\ \ 0 < \ell < \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0},\ \Gamma_0 = const,$$

с краевым условием:

$$\lim_{x\to\infty} C\,(y) \to 1. \tag{7}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения [2] (6) суммируется из решения соответствующего однородного уравнения и частного решения.

Затем необходимо некоторые данные из теории решения однородных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов.

Точка y_0 называется *особой* точкой дифференциального уравнения

$$x^{''} + b(x)x^{'} + r(y) = 0, \tag{8}$$

$$x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{9}$$

где ρ – заданное число, а степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_ky^k$ сходится в некоторой области $|y| < R$ называется *обобщенным степенным рядом.*

Если ρ – целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (9) видоизменится в обычный степенной ряд. В таком случае точка $y = 0$ есть особая (8), если коэффициенты $p(y)$ и $q(y)$ уравнения возможны в виде

$$p(y) = \frac{1}{y}\sum_{k=0}^{\infty}a_ky^k, \quad q(y) = \frac{1}{y^2}\sum_{k=0}^{\infty}b_ky^k,$$

где ряды в числителях сходятся в некоторой области $|y| < R$, а коэффициенты o_0, b_0 и b_1 не равны нулю одновременно. В этом случае уравнение имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_ky^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{10}$$

который сходится, по крайней мере, в той же области $|y| < R$.

Для определения показателя ρ и коэффициентов c_k необходимо будет подставить ряд (9) в уравнение (8), сократить на y^{ρ} и приравнять 0 коэффициенты при всех степенях y. При этом число ρ находится из так называемого определяющего уравнения.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка и пусть ρ_1 и ρ_2 – корни определяющего уравнения. Здесь следует различать три случая.

1. Если разность корней $\rho_1 - \rho_2$ не равна целому числу или нулю, то можно построить два решения вида (11)

$$x_1 = x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}{}_ky^k \quad ({}_0 \neq 0), \quad x_2 = x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}A_ky^k \quad (A_0 \neq 0). \tag{11}$$

2. Если разность корней $\rho_1 - \rho_2$ есть целое положительное число, то можно построить два линейно независимых решения вида (12)

$$x_1 = y^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}G_ky^k \quad (G_0 \neq 0), \quad x_2 = By_1(y)\ln(y) + y^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}A_ky^k \quad (A_0 \neq 0). \tag{12}$$

3. Если определяющее уравнение имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2$, то второе решение имеет вид (13)

$$x_2 = By_1(y)\ln(y) + y^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}O_ky^k \quad (O_0 \neq 0). \tag{13}$$

Используем уже описанную теорию решения линейных однородных уравнений в виде обобщенных степенных рядов к нашему уравнению.

Найдём сначала решение однородного уравнения, которое представляется в следующем виде:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\iota^5 - \iota^6\right]\frac{d^3C(\iota)}{d\iota^3} + \left[2\iota^2 - \iota^3(10+\gamma_1) + 2\iota^4(7+\gamma_1) - \ell^5(6+\gamma_1)\right]\frac{d^2C(\iota)}{d\iota^2} -$$
$$-\left[6\iota - \iota^2(2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) - \iota^3(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \iota^4(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\right]\frac{dC(\iota)}{d\iota} +$$
$$+\gamma_3\iota^2(2-\iota)C(\iota) = 0. \tag{14}$$

Заметим, что точка $\iota = 0$ для уравнения (14) является особой точкой и его решение будем отыскивать в виде обобщенного степенного ряда [4, 5, 6]

$$C(\iota) = \iota^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty}o_m\iota^n, \quad o_0 \neq 0. \tag{15}$$

Тут число ρ находится из конститутивного уравнения и для его определения сделаем следующее .

Найдём производные от выражения (15):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \ell^{m+\rho}\Big[o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+2o_m(m+\rho)(m+\rho-1)-$$

$$-6o_m(m+\rho)\Big]-\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+1}\Big[3o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+$$

$$+10.169o_m(m+\rho)(m+\rho-1)+2o_m(m+\rho)\Big]+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+2}\Big[3o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+14o_m(m+\rho)(m+\rho-1)+$$

$$+28o_m(m+\rho)+3o_m(m+\rho)\Big]-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty} \iota^{m+\rho+3}\Big[o_m(m+\rho)(m+\rho-1)(m+\rho-2)+6a_m(m+\rho)(m+\rho-1)+$$

$$+8o_m(m+\rho)+1.5o_m(m+\rho)\Big]=0.$$

Беря в расчет, что $o_0 \neq 0$, получаем уравнение $\rho(\rho-3)(\rho+2)=0$, корни которого равны: $\rho_1=-2$, $\rho_2=3$, $\rho_3=0$. Наибольшему из корней отвечает решение

$$C_1\left(\iota\right)=\iota^3\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^m,\ o_0^{(1)}\neq 0. \tag{16}$$

Найдем первую, вторую и третью производные от функции $C_1\left(\iota\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{dC_1(\iota)}{d\iota}&=\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)\iota^{m+2},\\ \frac{d^2C_1(\iota)}{d\iota^2}&=\sum_{n=0}^{\infty} a_m^{(1)}(m+3)(m+2)\iota^{m+1},\\ \frac{d^3C_1(\iota)}{d\iota^3}&=\sum_{n=0}^{\infty} a_m^{(1)}(m+3)(m+2)(m+1)\iota^{m}.\end{aligned} \tag{17}$$

получаем следующее:

$$\Big[\iota^3-3\ell^4+3\ell^5-\ell^6\Big]\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)(m+2)(m+1)\iota^m+$$

$$+\Big[2\iota^2-\iota^3\left(10+\gamma_1\right)+2\iota^4\left(7+\gamma_1\right)-\iota^5\left(6+\gamma_1\right)\Big]\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}(m+3)(m+2)\iota^{m+1}-$$

$$-\Big[6\iota-\iota^2\left(2-2\gamma_1-\gamma_2\right)-\iota^3\left(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\right)+\iota^4\left(6+2\gamma_1+\gamma_3\right)\Big]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(m+3)\ell^{m+2}+\gamma_3\ell^2\left(2-\iota\right)\iota^3\sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^m=0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{3+m}\Big[(3+m)(2+m)(1+m)+2((3+m)(2+n)-6n+18))\Big]+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{m+4}\Big[-3(m+3)(m+2)(m+1)-(m+3)(m+2)(10+\gamma_1)+(m+3)(2-2\gamma_1-\gamma_3)\Big]+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{m+5}\Big[3(m+3)(m+2)(m+1)+2(m+3)(m+2)(7+\gamma_1)+(m+3)(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+$$

$$+2\gamma_3\Big]+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)}\iota^{6+m}\Big[-(3+m)(m+2)(m+1)-(m+3)(m+2)(6+\gamma_1)--(m+3)(6+2\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_3\Big]=0.$$

Приводя подобные, выражение примет вид:

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+3} m(m+3)(m+5) - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4}(m+3)\Big[3(m+2)(m+1) + (m+2)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_3)\Big] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5}\Big[(m+3)\Big(3(m+2)(m+1) + 2(m+2)(7+\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Big) +$$

$$+2\gamma_3\Big] - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6}\Big[(m+3)\Big((m+2)(m+1) + (m+2)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big) + \gamma_3\Big] = 0.$$

Используем свойства степенного ряда, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \iota^{n+3}\Big\{m(m+3)(m+5)o_m^{(1)} - (n+2)\Big[3m(m+1) + (m+1)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(1)}\Big[(m+1)\Big(3m(m-1) + 2m(7+\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 +$$

$$+\gamma_3\Big) + 2\gamma_3\Big] o_{m-2}^{(1)} - \Big[n\Big((m-1)(m-2) + (m-1)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big) + \gamma_3\Big] o_{m-3}^{(1)} = 0.$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+3}\Big[(m+3)(m+2)(m+1) + 2(m+3)(m+2) - 6(m+3)\Big] +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4}\Big[-3(m+3)(m+2)(m+1) - (m+3)(m+2)(10+\gamma_1) + (m+3)(2 - 2\gamma_1 - \gamma_3)\Big] +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5}\Big[3(m+3)(m+2)(m+1) + 2(m+3)(m+2)(7+\gamma_1) + (m+3)(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) +$$

$$+2\gamma_3\Big] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6}\Big[-(m+3)(m+2)(m+1) - (m+3)(m+2)(6+\gamma_1) - (m+3)(6 + 2\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3\Big] = 0.$$

Полученное выше выражение обязано быть нулю при любом ι^m, а возможно тогда и только, когда выражение стоящее в круглых скобках равно нулю. В результате получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $o_m^{(1)}$ $(m \geq 1)$

$$o_m^{(1)} = \frac{1}{m(m+3)(m+5)}\Big\{(m+2)\Big[(m+1)(3n + 10 + \gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(1)} -$$

$$-\Big[(n+1)\Big(m(3m + 11 + 2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Big) + 2\gamma_3\Big] a_{m-2}^{(1)} +$$

$$+\Big[m\Big((m-1)(m + 4 + \gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1\Big) + \gamma_3\Big] o_{m-3}^{(1)}\Big\}.$$

Найдем второе решение однородного уравнения (14). Видим, что разность корней определяющего уравнения равно целому числу, т.е. это есть второй случай согласно общей теории решения линейных однородных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (см. выше).

Следовательно, второе решение однородного уравнения (14) $C_3(\iota)$, отвечающего корню $\rho_2 = 0$ имеет вид

$$C_3(\iota) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(3)} \iota^n + \omega_3^* C_1(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \quad o_0^{(3)} \neq 0, \ \iota_0 = \iota(y=1). \tag{18}$$

Найдем первую, вторую и третью производные от функции $C_3\ (\ell)$:

$$\begin{aligned} C_3'(\iota) &= \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m\iota^{m-1} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+2} + \omega_3^* C_1'(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \\ C_3''(\iota) &= \sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)\iota^{m-2} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} (2m+5)\iota^{m+1} + \omega_3^* C_1''(\ell) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \\ C_3'''(\iota) &= \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)(m-2)\iota^{m-3} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} (3m^2 + 12m + 11)\iota^m + \omega_3^* C_1'''(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя (18) – (21) в (14), получаем:

$$\left[\iota^3 - 3\iota^4 + 3\ell^5 - \iota^6\right]\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1)(m-2)\iota^{m-3} + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^n \times\right.$$

$$\left.\times(3m^2 + 12m + 11)\right\} + \left[2\iota^2 - \iota^3(10+\gamma_1) + 2\iota^4(7+\gamma_1) - \iota^5(6+\gamma_1)\right]\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} m(m-1) + \omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+1}(2m+5)\right\} -$$

$$-\left[6\iota - \iota^2(2-2\gamma_1-\gamma_2) - 2\iota^3(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) + \iota^4(6+2\gamma_1+\gamma_3)\right]\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} n\iota^{m-1} + \omega_3^* \sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+2}\right\} + \left(2\gamma_3\iota^2 - \gamma_3\ell^3\right)\sum_{n=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^m = 0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^n \left[m(m-1)(m-2) + 2m(m-2) - 6m\right] +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{n+1}\left[-3(m-1)(m-2) - m(m-1)(10+\gamma_1) + n(2-2\gamma_1-\gamma_3)\right] +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{n+2}\left[3m(m-1)(m-2) + 2m(m-1)(7+\gamma_1) + 2n(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) +\right.$$

$$\left.+2\gamma_3\right] + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(3)} \iota^{m+3}\left[-m(m-1)(m-2) - m(m-2)(6+\gamma_1) -\right.$$

$$\left.-n(6+2\gamma_1+\gamma_3) - \gamma_3\right] + \omega_3^*\left\{\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{n+3}\left[3n^2 + 12n + 11 + 2(2n+5) - 6\right] +\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+4}\left[-3(3m^2+12m+11) - (2m+5)(10+\gamma_1) + 2 - 2\gamma_1 - \gamma_2\right] +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+5}\left[3(3m^2+12m+11) + 2(2m+5)(10+\gamma_1) + 2(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\right] -$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \iota^{n+6}\left[3(3n^2+12n+11) + 2(2n+5)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\right]\right\} = 0.$$

Далее группируя

$$\sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^m m(m+2)(m-3) - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(3)} \iota^{m+1} m\left[3(m-1)(m-2) + (n-1)(10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\right] +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} \ell^{n+2}\left[n\Big(3(n-1)(n-2) + 2(n-1)(7+\gamma_1) + 2(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\Big) + 2\gamma_3\right] -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} \ell^{n+3}\left[n\Big((n-1)(n-2) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3 + (n-1)(6+\gamma_1)\right] +$$

$$+\omega_3^*\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \ell^{n+3}(3n^2+16n+15) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \ell^{n+4}\times\right.$$

$$\times\left[3(3m^2+12m+11) + (2m+5)(10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\right] + \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{n+5}\left[3(3m^2+12m+11) +\right.$$

$$\left.\left.+2(2m+5)(7+\gamma_1) + (10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\right] - \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(1)} \iota^{m+6}\left[3m^2 + 12m + 11 + (2m+5)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\right]\right\} = 0.$$

Воспользуемся свойствами степенных рядов, получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \iota^m \Big\{ m(m+2)(m-3)o_m^{(3)} - (m-1)\Big[3(m-2)(m-3) + (m-2)(10+\gamma_1) -$$

$$-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(3)} + \Big[(m-2)\Big(3(m-3)(m-4) + 2(m-2)(7+\gamma_1) +$$

$$+(10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\Big) + 2\gamma_3\Big] o_{m-2}^{(3)} - \Big[(m-3)\Big((m-4)(m-5) + (m-4)(6+\gamma_1) + 6 + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big) + +\gamma_3\Big] o_{m-3}^{(3)}\Big\} +$$

$$+\omega_3^* \sum_{m=0}^{\infty} \ell^{n+3}\Big\{(3m^2 + 16m + 15)a_n^{(1)} - \Big[9m^2 + 18m + 4 + (2m+3)(10+\gamma_1) + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big] o_{m-1}^{(1)} +$$

$$+\Big[9m^2 + 7 + (2m+1)(14 + 2\gamma_1) + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\Big] o_{m-2}^{(1)} - \Big[3m^2 - 6m + 8 + (2n-1)(6+\gamma_1) + 2\gamma_1 + \gamma_3\Big] a_{n-3}^{(1)}\Big\} = 0.$$

Полученное выше выражение должно равняться нулю при любом ι^m, а возможно тогда и только, когда выражение стоящее в круглых скобках равно нулю. В результате мы получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $o_m^{(3)}$ $(n \geq 4)$

$$o_m^{(3)} = \frac{1}{m(m+2)(m-3)} \Big\{(m-1)\Big[(m-2)(3m + 1 + \gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] a_{m-1}^{(3)} -$$

$$-\Big[(m-2)((m-3)(3m + 2 + 2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2) + 2\gamma_3\Big] a_{m-2}^{(3)} +$$

$$+\Big[(n - 3((n-4)(n + 1 + \gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3\Big] a_{n-3}^{(3)} - \omega_3^* S_{n-3}^{(1)}\Big\},$$

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} = (3n^2 + 16n + 15)a_n^{(1)} - (9n^2 + 18n + 4 + (10+\gamma_1)(2n+3) + 2\gamma_1 + \\ +\gamma_2)a_{n-1}^{(1)} + (9n^2 + 7 + (14 + 2\gamma_1)(2n+1) + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)a_{n-2}^{(1)} - \\ -(3n^2 - 6n + 8 + (6+\gamma_1)(2n-1) + 2\gamma_1 + \gamma_3)a_{n-3}^{(1)}. \end{aligned}$$

Третье решение однородного уравнения (14) линейно независимое с решениями $C_1(\ell)$, $C_3(\ell)$ и соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_3 = -2$ мы не приводим, поскольку они не удовлетворяет краевому условию (7).

Найдем решение неоднородного уравнения (6). Исходя из выражения правой части неоднородного уравнения (6) видим, что его частное решение можно искать в виде

$$C_4(\iota) = A_2 C_2(\ell),\ C_2(\iota) = \iota \sum_{m=0}^{\infty} o_m^{(2)} \iota^n + \omega_2^* C_1(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\ \ \alpha_0^{(2)} \neq 0,\ O_2 = const. \tag{20}$$

Здесь первые, вторые и третьи производные от функции $C_2(\iota)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} C_2'(\iota) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)}(n+1)\iota^n + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \iota^{n+2} + \omega_2^* C_1'(\ell) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right), \\ C_2''(\iota) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} n(n+1)\ell^{n-1} + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(2n+5)\ell^{n+1} + \omega_2^* C_1''(\iota) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \\ C_2'''(\ell) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} n(n+1)(n-1)\ell^{n-3} + \omega_2^* \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(3n^2 + 12n + 11)\ell^n + \omega_2^* C_1'''(\iota) \ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Поступая аналогичным образом (как при определении рекуррентных формул для коэффициентов $o_m^{(1)}$ и $o_m^{(3)}$), имеем рекуррентные формулы для коэффициентов $o_m^{(2)}$ $(m \geq 3)$:

$$o_m^{(2)} = \frac{1}{(m+1)(m+3)(m-2)} \Big\{ n\Big[(m-1)(3m + 4 + \gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2\Big] o_{m-1}^{(2)} -$$

$$-\Big[(m-1)((m-2)(3m + 5 + 2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3\Big] o_{m-2}^{(2)} +$$

$$+\left[(n-2((n-3)(n+2+\gamma_1)+6+\gamma_3+2\gamma_1)+\gamma_3\right]a_{n-3}^{(2)}-\omega_2^* S_{n-2}^{(1)}+\frac{d}{\Gamma_0}(-1)^n\frac{\gamma_4!}{(\gamma_4-n)!n!}\Bigg\}.$$

При вычислении коэффициентов $o_m^{(1)}, o_m^{(2)}$ и $o_{nm}^{(3)}$ по рекуррентным формулам, необходимо учитывать, что

$$\omega_2^*=\frac{1}{15o_0^{(1)}}\left[(16+6\gamma_1+2\gamma_2)o_1^{(2)}-(10+4\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1))o_0^{(2)}\right],$$

$$\frac{d}{\Gamma_0}=-6o_0^{(2)},\ o_1^{(2)}=-\frac{a_0^{(2)}}{6}(-2+2\gamma_1+\gamma_2+6\gamma_4^*),\ o_2^{(2)}=1,\ o_1^{(3)}=0,\ o_3^{(3)}=1,$$

$$\omega_3^*=\frac{\gamma_3}{15o_0^{(1)}}\left[(16+6\gamma_1+2\gamma_2)o_1^{(2)}-(10+4\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1))a_0^{(2)}\right],$$

$$o_2^{(3)}=\frac{\gamma_3}{4}o_0^{(3)},\ o_n^{(k)}=0,\quad \text{если } n<0\ (k=1,2,3).$$

Таким образом, общее решение уравнения (6), удовлетворяющее краевому условию (7) имеет вид:

$$C(\iota)=A_1C_1(\iota)+A_2C_2(\ell)+C_3(\iota), \tag{22}$$

$$C_1(\iota)=\iota^3\sum_{m=0}^{\infty}o_m^{(1)}\iota^m,\ C_2(\iota)=\iota\sum_{m=0}^{\infty}o_m^{(2)}\iota^m+\omega_2^*C_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),$$

$$C_3(\iota)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}\iota^n+\omega_3^*C_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right).$$

Заметим, что функция $C(\iota)$ удовлетворяет уравнению (6) по построению. Ряды определяющие функции $C_k(\iota)$, $k=1,2,3$ равномерно сходятся при всех $0\le y<\infty$ $(\iota(y)=\Gamma_0/(y+\Gamma_0))$ [4, 5, 6].

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема 1. Общее решение уравнения (6), удовлетворяющее краевому условию (7), имеет вид (22), где коэффициенты $A_1=1$, A_2, A_3 – произвольные постоянные, функции $C_1(\ell)$, $C_2(\ell)$, $C_3(\ell)$ задаются формулами (16), (18), (20).

Следует отметить, что выбор постоянных $o_0^{(1)}$, $o_0^{(2)}$, $o_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы выполнялся предельный переход к аналогичной задаче при малых относительных перепадах температуры в окрестности твердого тела, т.е. когда мы не учитываем зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности воздуха от температуры.

Зная общее решение уравнения (6) и связь между функциями $C(y)$ и $g(y)$ (см. ())

$$g(y)=C(y)+\frac{y}{2}\left(G'(y)-f(y)C(y)\right),\quad f(y)=\frac{1}{t_{e0}(y)}\frac{dt_{e0}(y)}{dy},$$

где $C'(y)$– первая производная от функции $C(y)$, получаем следующие выражения для компонент векторного поля скорости $\mathbf{U}_e(x)$ и величину массовой скорости в окрестности нагретого твердого тела (т. е. можно построить профиль скорости, как это делается, например, при плоскопараллельном обтекании твердой сферы в задаче Стокса):

$$U_r^{(e)}(y,\theta)=U\cos\theta\Big[A_1C_1(y)+A_2C_2(y)+C_3(y)\Big], \tag{23}$$

$$U_\theta^{(e)}(y,\theta)=-U\sin\theta\Big[A_1G_4(y)+A_2G_5(y)+C_6(y)\Big], \tag{24}$$

$$U_e(y,\theta)=\sqrt{\left(U_r^{(e)}(y,\theta)\right)^2+\left(U_\theta^{(e)}(y,\theta)\right)^2}, \tag{25}$$

где

$$C_1(\ell)=\iota^3\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}\iota^n,\quad C_2(\ell)=\iota\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}\iota^n+\omega_2^*G_1(\iota)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\quad C_3(\iota)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}\ell^n+\omega_3^*G_1(\ell)\ln\left(\frac{\iota}{\iota_0}\right),\ \ell=\frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0}.$$

$$C_k(y)\left(1+\frac{\iota}{2(1+\alpha)}\right)C_{k-3}(y)+\frac{y}{2}C'_{k-3}(y)\quad(k=4,5,6).$$

Заключение. Полученные в статье формулы носят наиболее общий характер, т. е. они справедливы, как при значительных (когда средняя температура поверхности обтекаемого тела сферической формы воздухом по величине много больше температуры воздуха вдали от тела. В этом случае необходимо учитывать степенной вид зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и плотности воздуха от температуры), так и при малых относительных перепадах температурах. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса и плотность можно приблизительно считать постоянными величинами, что существенно упрощает решение уравнений гидродинамики и теплопереноса.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоцененимое внимание и поддержку;за очень полезные рекомендации и совет во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 2003.
3. ЛандауЛ.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ИТТЛ, 1954.
4. Малай Н.В., ЛиманскаяА.В., Щукин Е.Р. Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье – Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1328 – 1338.
5. Малай Н.В., Глушак А.В., Лиманская А.В. Решение краевой задачи медленного обтекания сферы неизотермическим газом // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 12. С. 54 – 65
6. Малай Н.В., ЛиманскаяА.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. № 10. С. 42 – 49.
7. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах. Рейнольдсa. М.: Мир. 1960.

Поступила в редакцию 11.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Селезнев Егор Андреевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию