Метод стрельбы. Численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Агафонов Д. А.
1854428@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка - метод стрельбы. Описана математическая постановка задачи, приведён алгоритм метода, включая переход к задаче Коши и использование метода Рунге – Кутты четвёртого порядка. Для численного подбора начального условия применяется метод секущих. Проведена реализация алгоритма на языке Python и выполнено сравнение численного решения с аналитическим. Показано, что метод стрельбы обеспечивает высокую точность и сходимость при решении линейных краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, метод стрельбы, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, метод Рунге – Кутты, метод секущих, Python, сходимость, точность, численное моделирование

Для цитирования: Агафонов Д. А. 2025. Метод стрельбы. Численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 210–215.

---

1. Введение. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) играют важную роль в прикладной математике, физике, инженерии и других областях науки. Они возникают при моделировании различных процессов – от распространения тепла и колебаний струны до движения жидкости и электромагнитных полей. В отличие от задачи Коши, где начальные условия заданы в одной точке, в краевых задачах значения функции или её производной фиксируются на концах некоторого интервала, что делает их решение более сложным, поэтому решение таких задач аналитическим методом возможно только для ограниченного круга задач.В большинстве практических случаев необходимо прибегать к численным методам. Среди множества численных методов, применяемых для решения краевых задач, метод стрельбы занимает особое место благодаря своей простоте, наглядности и эффективности. Данный метод основан на сведении краевой задачи к задаче Коши с последующей корректировкой начальных условий до тех пор, пока решение не будет удовлетворять граничным условиям. Он получил своё название по аналогии со стрельбой в мишень: корректируя направление (начальное значение производной), мы стремимся «попасть» в заданное граничное условие.

2. Теоретические основы краевых задач. Метод стрельбы. Во многих задачах физики, механики, электротехники и инженерных наук поведение систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Если в задаче значения функции или её производной заданы в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Если же условия задаются в разных точках области определения, то мы имеем дело с краевой задачей [4].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0. \tag{2}$$

В простейшем случае краевая задача имеет вид:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{3}$$

где α, β – известные числа. Необходимо найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению и заданным условиям на концах отрезка.

Для наглядности сравним постановку задачи Коши и краевой задачи:

- Задача Коши: заданы начальные условия в одной точке $x = a$: $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$.
- Краевая задача: условия заданы в разных точках: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

В отличие от задачи Коши, где решение строится прямым интегрированием с известными начальными условиями, в краевой задаче одно из начальных условий неизвестно и должно быть подобрано таким образом, чтобы выполнялось граничное условие в другой точке. Важным аспектом при исследовании краевых задач является вопрос о том, при каких условиях решение задачи существует и является единственным. Эти свойства определяют корректность постановки задачи и возможность применения численных методов [11].

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b], \tag{4}$$

с граничными условиями

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{5}$$

Пусть функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда решение такой задачи существует и единственно, если соответствующая однородная задача

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Если же однородная задача допускает нетривиальные решения, то неоднородная задача может:

- не иметь решений (быть несовместной);
- иметь бесконечно много решений (если правая часть $r(x)$ ортогональна решению сопряжённой задачи).

Для нелинейных уравнений строгие теоремы существования и единственности применимы реже. Рассмотрим задачу:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{7}$$

Если функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y'$ непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, то для достаточно малой длины отрезка $(b - a)$ задача имеет хотя бы одно решение. Однако доказать единственность решения в общем случае невозможно, и приходится использовать численные методы (например, метод стрельбы или конечных разностей) для приближённого поиска решения.

Задача считается корректно поставленной (в смысле Адамара), если выполняются три условия [3]:

- решение существует;
- решение единственно;
- решение непрерывно зависит от исходных данных (начальных и граничных условий).

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, задача называется некорректной. Некорректные задачи требуют специальных подходов к решению, например, методов регуляризации.

Существует несколько численных методов для решения краевых задач [2]:

- Метод стрельбы – сведение задачи к задаче Коши с подбором начального значения. Метод основан на интегрировании уравнения с различными начальными условиями до тех пор, пока не будет удовлетворено граничное условие в конце отрезка.
- Метод конечных разностей – дискретизация дифференциального уравнения и замена производных их разностными аналогами. В результате получается система линейных (или нелинейных) алгебраических уравнений, которую можно решить стандартными методами линейной алгебры.
- Метод конечных элементов – аппроксимация решения с помощью базисных функций и минимизация невязки в слабой форме. Особенно эффективен при решении задач в областях сложной геометрии и многомерных случаях.
- Метод коллокаций – приближение решения линейной комбинацией базисных функций и требование точного выполнения уравнения в конечном числе коллокационных точек.

Каждый из методов имеет свои преимущества и ограничения. Метод стрельбы отличается относительной простотой реализации и высокой эффективностью при решении задач второго порядка с двумя условиями на концах отрезка.

Определение. *Метод стрельбы – численный метод, заключающийся в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши для той же системы дифференциальных уравнений* [8, 4].

Суть метода заключается в том, чтобы «стрелять» из начальной точки, подбирая начальное значение производной таким образом, чтобы решение достигло требуемого значения в конечной точке. Это напоминает процесс стрельбы по мишени: мы корректируем начальное направление (значение производной), чтобы попасть точно в цель (второе граничное условие)[5].

Метод особенно удобен для задач второго порядка с двумя граничными условиями:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \tag{8}$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{9}$$

Для применения метода стрельбы введём параметр s, обозначающий предполагаемое значение производной в начальной точке:

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s. \tag{10}$$

Теперь исходная краевая задача сводится к *задаче Коши*:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = s. \end{cases} \tag{11}$$

После численного решения этой задачи на отрезке $[a, b]$ получаем значение $y_s(b)$, которое зависит от выбранного параметра s. Чтобы решение удовлетворяло требуемому граничному условию $y(b) = \beta$, необходимо подобрать такое значение s, при котором:

$$\varphi(s) = y_s(b) - \beta = 0. \tag{12}$$

Основная идея заключается в следующем: одно из граничных условий (например, $y'(a) = s$) считается неизвестным параметром, который подбирается так, чтобы при решении задачи Коши результат удовлетворял второму граничному условию $y(b) = \beta$.

Обобщенный алгоритм применения метода стрельбы можно представить в следующем виде [9]:

1. Преобразовать краевую задачу к задаче Коши с параметром s, подлежащим подбору.

2. Выбрать начальное приближение s_0 и задать численный метод для решения ОДУ (например, метод Рунге – Кутты четвёртого порядка).

3. Решить задачу Коши при $s = s_0$ и вычислить значение $y_{s_0}(b)$.

4. Оценить отклонение от целевого значения:
$$\varphi(s_0) = y_{s_0}(b) - \beta. \tag{13}$$

5. Подкорректировать значение s с помощью выбранного метода (например, метода Ньютона или секущих):
$$s_{k+1} = s_k - \frac{\varphi(s_k)}{\varphi'(s_k)}. \tag{14}$$

6. Повторять шаги 3-5 до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости:
$$|\varphi(s)| < \varepsilon, \tag{15}$$
где ε - заданная точность вычислений.

3. Реализация метода стрельбы. Рассмотрим конкретную краевую задачу:

$$y''(x) = -y(x), \quad x \in [0, \pi], \tag{16}$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{17}$$

Это простая линейная задача, которую удобно использовать для численной реализации метода стрельбы, поскольку её аналитическое решение известно:

$$y(x) = C \sin x. \tag{18}$$

При этом, для любого $C \in \mathbb{R}$, выполняются условия $y(0) = 0$ и $y(\pi) = 0$, то есть задача имеет бесконечно много решений. Тем не менее, метод стрельбы позволяет найти конкретное решение при задании начальной производной $y'(0)$ [10].

Чтобы решить задачу Коши, возникающую при применении метода стрельбы, перепишем исходное уравнение в виде системы первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases} , \quad \text{где} \quad y_1 = y, \quad y_2 = y'. \tag{19}$$

Начальные условия имеют вид:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = s, \tag{20}$$

где s – подбираемая производная в начале интервала.

Для численного интегрирования воспользуемся классическим методом Рунге – Кутты четвёртого порядка (RK4). Пусть шаг интегрирования равен h. Тогда переход от точки x_n к $x_{n+1} = x_n + h$ осуществляется по формулам:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{21}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \tag{22}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \tag{23}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3), \tag{24}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{25}$$

Приведем пример простого кода, который демонстрирует численную реализацию метода стрельбы для решения краевой задачи на языке программирования Python.[12].

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
def runge_kutta(f, x0, y0, h, n):
y = np.zeros((n+1, len(y0)))
x = np.linspace(x0, x0 + n*h, n+1)
y[0] = y0
for i in range(n):
k1 = f(x[i], y[i])
k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + h*k1/2)
k3 = f(x[i] + h/2, y[i] + h*k2/2)
k4 = f(x[i] + h, y[i] + h*k3)
y[i+1] = y[i] + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
return x, y

# Система ОДУ
def ode_system(x, Y):
y1, y2 = Y
return np.array([y2, -y1])

# Метод стрельбы
def shooting(s, h, n):
x0 = 0
y0 = [0, s]  # y(0) = 0, y'(0) = s
x, y = runge_kutta(ode_system, x0, y0, h, n)
return x, y

# Метод секущих для подбора s
def find_s(s0, s1, h, n, beta, tol=1e-6, max_iter=50):
for _ in range(max_iter):
_, y0 = shooting(s0, h, n)
_, y1 = shooting(s1, h, n)
F0 = y0[-1][0] - beta
F1 = y1[-1][0] - beta
if abs(F1) < tol:
return s1
s_new = s1 - F1 * (s1 - s0) / (F1 - F0)
s0, s1 = s1, s_new
return s1

# Параметры
a, b = 0, np.pi
n = 100
h = (b - a) / n
```

```
    beta = 0

    # Поиск нужной производной
    s_opt = find_s(1.0, 2.0, h, n, beta)
    x, y = shooting(s_opt, h, n)

    # Построение графика
    plt.plot(x, y[:, 0], label='Численное решение')
    plt.title('Метод стрельбы для y\'\' = -y, y(0)=0, y(?)=0')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y(x)')
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()
```

При запуске приведённого кода метод стрельбы подбирает значение $s \approx 1.0$, в результате чего получается приближённое решение, совпадающее с аналитическим: $y(x) = \sin(x)$, (при $C = 1$). Таким образом, численная реализация подтверждает корректность метода стрельбы и его способность находить решение, совпадающее с точным при правильно подобранном параметре s.

4. Анализ результатов и оценка точности. Чтобы проверить правильность численного решения краевой задачи, необходимо провести сравнение с его аналитическим решением.

Для задачи:

$$y''(x) = -y(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{26}$$

аналитическим решением является:

$$y(x) = C\sin(x), \tag{27}$$

где C – произвольная константа.

Метод стрельбы позволил найти одно из решений, соответствующее определённому начальному наклону $s = y'(0) \approx 1$, то есть:

$$y(x) \approx \sin(x). \tag{28}$$

Сравнение показывает, что численное решение совпадает с аналитическим с высокой точностью, особенно при достаточно малом шаге интегрирования h.

Шаг интегрирования h (или, соответственно, количество узлов n) оказывает существенное влияние на точность решения[6]:

- При уменьшении h точность повышается.
- Слишком большой шаг может привести к заметным отклонениям от точного решения.
- Чрезмерно малый шаг увеличивает вычислительную нагрузку и может привести к накоплению численных ошибок.

Выбирать шаг h, обеспечивающий компромисс между точностью и вычислительной эффективностью. Для гладких функций обычно достаточно $n = 100 - 200$ узлов.

Метод стрельбы обладает хорошей сходимостью, если выполняются следующие условия [1]:

- правая часть $f(x, y, y')$ непрерывна и гладкая;
- начальное приближение производной выбрано разумно;
- численный метод интегрирования обладает достаточной точностью (например, метод Рунге – Кутты 4-го порядка).

Сходимость также обеспечивается, если функция

$$\varphi(s) = y_s(b) - \beta \tag{29}$$

монотонна и имеет единственный корень. В рассматриваемом примере наблюдается быстрая сходимость метода секущих – уже через 4-6 итераций достигается высокая точность.

В нелинейных задачах или задачах с чувствительной зависимостью решения от начальных условий метод стрельбы может проявлять следующие особенности:

- расходимость при неудачном выборе начального приближения;
- неустойчивость интегрирования (особенно при экспоненциально растущих решениях);

- необходимость применения методов подбора s, например, метода Ньютона с численной аппроксимацией производной $\varphi'(s)$.

Для линейных задач, подобных рассматриваемой, таких трудностей, как правило, не возникает.

5. Заключение. В данной курсовой работе была рассмотрена краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и реализован метод её численного решения - метод стрельбы. Этот метод является одним из наиболее наглядных и универсальных численных способов для решения краевых задач с двумя граничными условиями. В рамках работы были последовательно рассмотрены: теоретические основы краевых задач, их физическая интерпретация и математическая формализация; алгоритм метода стрельбы, включающий приведение задачи к задаче Коши, интегрирование методом Рунге – Кутты и подбор начального условия с помощью метода секущих; численная реализация на языке Python с визуализацией полученного решения; анализ полученного результата, который показал хорошее соответствие с аналитическим решением, высокую точность и быструю сходимость при разумном выборе шага.

Метод стрельбы продемонстрировал себя как эффективный численный инструмент, особенно в задачах с линейной или слабо нелинейной правой частью. Однако в более сложных задачах с чувствительной зависимостью от начальных условий, множеством решений или разрывными функциями, метод требует аккуратного подхода, либо замены на более устойчивые методы, такие как конечно-разностные или вариационные.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие для вузов. - М. : БИНОМ.-Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
2. Беляев И. М. Методы численного решения дифференциальных уравнений. - СПб. : Питер, 2003. - 256 с.
3. Виноградов А. Ю. Численные методы решения жестких и нежестких краевых задач : монография. - [М.] : [б. и.], 2017. – 112 с.
4. Ильин В. А. Дифференциальные уравнения и их численные методы. - М. : Физматлит, 2002. - 368 с.
5. Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. – Томск, 2016. - 44 с.
6. Косинов А. М. Численные методы решения краевых задач. - М. : Высшая школа, 2005. – 200 с.
7. Кудрявцев В. М. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. - М. : Физматлит, 2007. – 144 с.
8. Кузнецов В. В. Метод стрельбы решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Наука и современность. 2016. №45. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-strelby-resheniya-kraevoy-zadachi-dlya-obyknovennyh-differentsialnyh-uravneniy-vtorogo-poryadka (дата обращения: 12.06.2025).
9. Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Численное решение краевых задач для ОДУ : практикум. - Ростов н/Д : [б. и.], 2007. – 40 с.
10. Залипаев В. В., Гулевич Д. Р. Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие. - СПб. : Изд-во «Лань», 2015. – 448 с.
11. Хакимзянов М. М., Черный П. А. Численные методы. Часть 2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. – Новосибирск : [б. и.], 2013. - 260 с.
12. Официальная документация Python [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://docs.python.org (дата обращения: 12.06.2025).

Поступила в редакцию 07.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Агафонов Дмитрий Алексеевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию