Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 2. С. 193–202.

Решение краевой задачи Гильберта

Токарев Д. А.
1469493@bsuedu.ru

Аннотация. В этой работе будет поставлена краевая задача Гильберта для односвязной области. Целью работы является емко дать все сопутствующие определения необходимые для постановки этой задачи, а также показать взаимосвязь между ней и задачей Римана. Основное внимание уделено конкретным примерам, которые подробно разобраны и решены.

Ключевые слова: аналитическая функция, задача Гильберта, оператор Шварца, формулы Гильберта

Для цитирования: Токарев Д. А. 2025. Решение краевой задачи Гильберта. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(2): 193–202.

---

1. Введение. Краевая задача Гильберта является одной из основных наряду с задачей Римана краевых задач аналитических функций. Исторически, начало постановки задачи Гильберта можно проследить в работе Римана «Основы общей теории функций» 1851 года, как отмечает Гахов [1], поэтому иногда ее называют задачей Римана – Гильберта. Однако полное решение краевой задачи, которую мы рассмотрим ниже, дал именно Гильберт в 1905 году. Для постановки этой задачи рассматриваются специальные интегралы с ядром Гильберта, которые также будут описаны в статье.

Краевая задача Гильберта имеет фундаментальное значение в теории аналитических функций и находит многочисленные приложения в различных областях математической физики, теории упругости, гидродинамики и других прикладных дисциплинах [2, 5]. Изучение этой задачи остается актуальным и в настоящее время, о чем свидетельствуют недавно опубликованные работы [7]. Кроме того, разработаны эффективные численные методы решения данной задачи [3].

В настоящей статье автор ставит целью емко и сжато описать основные теоретические аспекты, показывающие возникновение краевой задачи Гильберта, а также ее взаимосвязь с задачей Римана. Особое внимание уделено конкретным примерам, относящимся как к интегралам с ядром Гильберта, так и к одноименной краевой задаче. Статья может быть полезна студентам и исследователям, интересующимся теорией краевых задач аналитических функций.

2. Общие сведения. В этом пункте дадим основные сведения из теории функций комплексных переменных при помощи книг [1, 6].

Определение 1.1. *Индексом функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении.*

Теперь при помощи [1] дадим определение порядку аналитической функции

Определение 1.2. *В некоторой точке z_0 порядком аналитической функции $\Phi(z)$ будем называть показатель низшей степени в разложении $\Phi(z)$ в ряд по степеням $(z - z_0)$.*

Индекс функции обладает следующими важными свойствами:

1. Индекс произведения двух функций равен сумме индексов этих функций:
$$\operatorname{ind}_L[G_1(t)G_2(t)] = \operatorname{ind}_L[G_1(t)] + \operatorname{ind}_L[G_2(t)].$$
2. Индекс отношения двух функций равен разности индексов этих функций:
$$\operatorname{ind}_L\left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)}\right] = \operatorname{ind}_L[G_1(t)] - \operatorname{ind}_L[G_2(t)].$$
3. Индекс постоянной функции (отличной от нуля) равен нулю.
4. Индекс функции t^n (где n – целое число) по окружности $|t| = 1$ равен n.
5. Индекс комплексно-сопряженной функции $\overline{G(t)}$ равен $-\operatorname{ind}_L[G(t)]$.

При помощи этой же книги дадим определение интеграла типа Коши

Определение 1.3. *Пусть L замкнутый гладкий контур или незамкнутый, целиком расположенный в конечной части плоскости, τ – комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ – непрерывная функция точек контура, тогда интеграл*
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{1}$$
называется интегралом типа Коши.

Функцию $\varphi(\tau)$ из (1) принято называть плотностью, а $\frac{1}{\tau - z}$ ядром. Очевидно, что интеграл из нашего определения представляет собой функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек самого контура L [6]. Скажем еще пару слов про главное значение интеграла.

Определение 1.4. *Пусть функция $\varphi(\tau)$, которая удовлетворяет условию Гельдера задана на гладком контуре L, а τ, t – комплексные координаты точек контура, тогда особый интеграл $\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ для функции $\varphi(\tau)$ существует в смысле главного значения по Коши и во всех точках гладкости его можно представить в двух видах*

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \left[\ln \frac{b - t}{a - t} + \pi i\right], \tag{2}$$

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b - t}{t - a}.$$

Все выводы этих формул, а также вспомогательные определения и обозначения можно посмотреть например у Гахова [1] или Мусхелишвили [6]. Отметим также, что мы не будем использовать как и в [1] специальные обозначения для того чтобы показать, что интеграл понимается в смысле главного значения по тем же умозаключениям, что и Гахов.

3. Формулы Гильберта. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в единичном круге. Обозначим через s и σ длины дуг окружности, отсчитываемых от точки пересечения ее с положительным направлением оси абсцисс и пусть $u(s)$ непрерывная функция, которая является предельным значением действительной части функции $f(z)$ на контуре круга тогда справедлива формула приведенная ниже в виде определения [1].

Определение 1.5. *Формула*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + iv_0, \tag{3}$$

которая дает возможность выразить аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$ через значение ее действительной части на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого iv называется формулой Шварца.

Если в (3) взять $z = 0$, тогда пользуюсь теоремой о среднем [1], получим

$$v_0 = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(\sigma) d\sigma.$$

В (3) выражение $\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}$ называется ядром Шварца. Покажем его взаимосвязь с ядром Коши из (1). Для этого обозначим через $\tau = e^{i\sigma}$ комплексную координату точки окружности, тогда

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \left(-1 + \frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z}\right) d\sigma = \frac{2}{i} \frac{d\tau}{\tau - z} - d\sigma,$$

окончательно имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma, \tag{4}$$

формула (4) и показывает взаимосвязь ядра Коши и ядра Шварца. Выведем теперь сами формулы Гильберта, для этого перейдем в (3) и (4) к пределу, когда z стремится к точке единичной окружности $t = e^{is}$, и воспользуемся формулой Сохоцкого из [6] следующего вида

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

тогда получим

$$u(s) + iv(s) = \frac{1}{2} 2u(s) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma + iv_0,$$

объедим два интеграла и сделаем все возможные сокращения, получим

$$v(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}d\sigma + v_0, \tag{6}$$

произведем некоторые преобразования в (6) у ядра, а именно:

$$\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}} = \frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}\cdot\frac{e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}}{e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}+e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}-e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}} = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2},$$

подставляя это в (6) получим

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + v_0, \tag{7}$$

то есть получили формулу для выражения мнимой части аналитической функции через действительную, для того чтобы выразить $u(s)$ через $v(s)$, заметим, что для функции

$$if(z) = v - iu,$$

действительной частью является v, а мнимой $-u$, тогда применим формулу (7), получим

$$u(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + u_0 \qquad (u_0 = u(0,0)). \tag{8}$$

Определение 1.6. *Симметричные формулы* (7) *и* (8) *называются формулами обращения Гильберта, а ядром Гильберта называется выражение* $\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$.

Заметим, что при $\sigma = s$ ядро обращается в бесконечность первого порядка, так что интегралы, входящие в формулы Гильберта, являются особыми и их нужно понимать в смысле главного значения [2, 8].

Приведем примеры вычисления особых интегралов с ядрами Гильберта.

Пример 1. Вычислить

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta,$$

сравним с формулой (7) видим, что в нашем случае $u(\sigma) = \cos(n\theta)$, то есть из сказанного выше следует, что в ответе мы должны получить мнимую часть функции аналитичной в единичном круге у которой значение ее действительной части на окружности равна $\cos(n\theta)$, вспоминая тригонометрическое представление комплексного числа получим, что

$$z^n = |z|\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

так как мы рассматриваем единичную окружность, то на ней $|z| = 1$, то есть по (7) получаем ответ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta = -\sin(n\theta),$$

заметим, что $v_0 = v(0) = \sin(0) = 0$, также отметим, что при $n = 0$ мы получим ответ 0, его можно получить непосредственным вычислением данного интеграла, но уже без косинуса в смысле главного значения [1].

Пример 2. Вычислить

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta,$$

рассмотрим функцию $\operatorname{Ln}\left(1-e^{i\theta}\right)$, тогда по определению логарифма для комплексной функции [1]

$$-\operatorname{Ln}(1-z) = -\operatorname{Ln}\left(1-e^{i\theta}\right) = -\ln\left|1-e^{i\theta}\right| - i\arg(1-e^{i\theta}),$$

рассмотрим

$$\left|1-e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})\right| = \left|-e^{i\theta/2}2i\sin(\theta/2)\right| = 2\left|\sin(\theta/2)\right|,$$

таким образом, стоящие под интегралом выражение, является действительной частью функции $-\operatorname{Ln}(1-z)$, в ответе мы должны получить ее мнимую часть плюс v_0, тогда имеем

$$-\arg(1-e^{i\theta})+v_0=\frac{\pi-\theta}{2},$$

так как $v_0\equiv 0$, тогда переходя от θ ка φ, получим окончательный ответ $\dfrac{\pi-\varphi}{2}$.

4. Задача Римана. Более подробно и все выкладки про задачу Римана можно посмотреть например в [1, 6], мы же остановимся на случае односвязной области.

Определение 1.7. *Пусть дан простой гладкий контур L делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю области D^+ и внешнюю D^-, и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, которые удовлетворяют условию Гельдера причем $G(t)\neq 0$, тогда задачей Римана называется поиск двух функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, которые аналитические каждая в соответствующей области D^+ и D^-, причем $\Phi^-(z)$ и в $z=\infty$, а также они удовлетворяют на контуре L линейному соотношению*

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{9}$$

при $g(t)\equiv 0$, задача называется однородной, иначе неоднородной.

Функцию $g(t)$ называют свободным членом, а $G(t)$ коэффициентом задачи Римана. Индекс коэффициента, также называется и индексом задачи. Решаются задача при помощи формулы (5) и канонической функции, но мы не будем в этой статье выводить решение для нее, а лишь укажем при каких условиях задача Римана разрешима.

Утверждение 1.1.*Если индекс $\varkappa$ краевой задачи неотрицательный, то однородная задача* (9) *разрешима и имеет $\varkappa+1$ линейно независимых решений, при отрицательном индексе задача неразрешима.*

Утверждение 1.2. *Если индекс $\varkappa$ краевой задачи неотрицательный, то неоднородная задача* (9) *разрешима при любом свободном члене, при отрицательном индексе задача вообще говоря неразрешима, в случае $\varkappa<-1$, чтобы задача была разрешима необходимо, чтобы свободный член удовлетворял условиям вида*

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0 \qquad (k=1,2,\dots,\varkappa-1),$$

при $\varkappa=-1$ задача разрешима и имеет единственное решение.

Под $X^+(\tau)$ мы имеем ввиду предельное значение канонической функции для исходной задачи, в [1, 6] можно посмотреть строгого определение этой функции для задачи Римана, а также доказательство этих утверждений. Отметим, лишь что под неразрешимостью мы понимаем, что задача имеет только тривиальное решения.

5. Задача Гильберта. Итак, перейдем к основному теоретическому пункту нашей работы, а именно поставим задачу Гильберта, для этого напомним, что L – это простой замкнутый контур, и пусть даны действительные функции дуги s контура $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, которые удовлетворяют условию Гельдера.

Определение 1.6. *Пусть требуется найди аналитическую функцию*

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

в области D^+ и непрерывную на контуре, предельные значения действительной и мнимой части которой удовлетворяют на контуре линейному соотношению

$$a(s)u(s)+b(s)v(s)=c(s), \tag{10}$$

такая задача называется краевой задачей Гильберта.

В определение и в дальнейшем мы будем придерживаться обозначениями для функций, полученной заменой координат функциями дуги s, как и Гахов в своей монографии [1], то есть например $u\left[x(s),y(s)\right]=u(s)$. Очевидно, как и в задаче Римана, если правая часть (10) всюду равна нулю, то задача называется однородной, иначе неоднородной. Для построения решения этой задачи, обсудим оператор Шварца для односвязной области, так как он необходим для построения решения [1, 6].

Определение 1.8. *Оператором Шварца* называется оператор, восстанавливающий аналитическую функцию $F=u+iv$ по граничным значениям её действительной части.

Обозначим этот оператор через S. Пусть на гладком контуре L задана действительная функция $u(s)$, удовлетворяющая условию Гёльдера. Тогда оператор S ставит в соответствие функции $u(s)$ аналитическую функцию $F(z)$, предельные значения действительной части которой на L совпадают с $u(s)$, а мнимая часть обращается в нуль в некоторой фиксированной точке z_0. Символически это записывается как:

$$F(z)=u(x,y)+iv(x,y)=S[u].$$

Если в качестве контура L выбрана единичная окружность, то оператор S задаётся интегральной формулой Шварца (3). Отметим, что в данном случае прослеживается связь между задачей Гильберта и задачей Римана, поскольку для контура в виде действительной оси оператор Шварца совпадает с удвоенным интегралом Коши [1, 6]. Для произвольного контура выражение для оператора Шварца определяется через функцию Грина (подробнее см. [1]). В настоящей работе рассматривается случай единичной окружности.

Используя введённое определение, сформулируем вспомогательную задачу, результаты решения которой будут применяться при выводе решения краевой задачи Гильберта (в [1] она обозначена как задача A). Пусть L — единичная окружность, а D^+ — её внутренняя область. Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D^+, за исключением точки z_0, где она может иметь полюс порядка не выше n, действительная часть которой на контуре L совпадает с заданной функцией $u(s)$.

Вначале рассмотрим решение однородной задачи ($u(s) \equiv 0$). Искомую функцию в этом случае обозначим через $Q(z)$. Выпишем её разложение в окрестности начала координат:

$$Q(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k,$$

по условию

$$\Re \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k = 0,$$

тогда, пусть $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, имеем

$$\sum_{k=-n}^{\infty} (\alpha_k \cos ks - \beta_k \sin ks) = 0.$$

Так как разложение в ряд Фурье единственно, то

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{-k} = -\alpha_{-k}, \quad \beta_{-k} = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
$$\alpha_k = \beta_k = 0, \quad k > n,$$

то есть окончательно

$$c_0 = i\beta_0, \quad c_{-k} = -\bar{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad c_k = 0 \quad (k > n).$$

Теперь можем записать ответ для нашей искомой функции $Q(z)$:

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k}). \tag{11}$$

Отметим, что решить эту задачу можно и для произвольной области при помощи комформного отображения, подробнее про это можно посмотреть в [1]. Мы же перейдем теперь к неоднородной задаче, по определению оператора S, Su – это аналитическая в области D^+ функция, действительная часть которой на контуре равна $u(s)$, тогда рассмотрим разность $F(z) - Su$, которая очевидно будет функцией удовлетворяющей условиям однородной задачи, то есть

$$F(z) - Su = Q(z),$$

отсюда выражая $F(z)$ и получим решение неоднородной задачи

$$F(z) = Su + Q(z), \tag{12}$$

где оператор Шварца определяется по формуле (3), $Q(z)$ по формуле (11).

Теперь при помощи [1] введем понятие регуляризующего множителя

Определение 1.9. *Функция $R(t)$, которая является функцией точек контура, а также удовлетворяет улсловию Гельдера и умножив на которую функцию $G(t)$, получим краевое значение функции $\Phi^+(z)$, аналитической в D^+ называется регуляризующим множителем.*

То есть выполняется условие вида

$$G(t)R(t) = \Phi^+(z), \tag{13}$$

отметим, что задача в такой постановке не является определенной, так как если она допускает какое-нибудь решение, то она очевидно, допускает и бесчисленное множество решений, получается из данного умножения его на краевое значение любой функции аналитической в D^+, поэтому на множитель обычно накладывают дополнительные условия. Если взять однородную задачу Римана, то таким множителем выступает функция $\Phi^-(z)$, решение задачи Римана устанавливает существование такого множителя для $\varkappa \geq 0$.

Выделим еще два вида, а именно первый это с постоянным аргументом, а второй с постоянным множителем.

Пусть $R(t)$, то есть регуляризующий множитель действительная функция, обозначим его как $p(s)$, тогда имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = \Phi^+(t).$$

Возьмем индекс от обеих частей, тогда получим

$$\varkappa = \mathrm{Ind}[a(s) + ib(s)] = \mathrm{Ind}\Phi^+(t),$$

так как индекс $p(s)$ равен нулю, это следует из свойств индекса описанных в пункте 1, так же с помощью этих свойств можно сделать следующие вывод:

- Функция $\Phi^+(z)$ не имеет нулей в области D^+, если $\varkappa = 0$.
- Функция $\Phi^+(z)$ имеет $\varkappa$ нулей в области D^+, если $\varkappa > 0$.
- Функция $\Phi^+(z)$ имеет не менее $-\varkappa$ полюсов в области D^+, если $\varkappa < 0$, то есть не является аналитической.

Дадим несколько иное определение понятию регуляризующего множителя, допустим возможность наличия полюса у искомой функции в области D^+, будем считать что эта область содержит начало координат.

Определение 1.10.*Регуляризующий множитель функции $a(s) + ib(s)$, заданной на контуре L, будем называть такую действительную положительную функцию точек контура $p(s)$, что произведение $p(s)[a(s) + ib(s)]$ есть краевое значение функции $\eta^+(z)$, аналитической и имеющей нулевой порядок всюду в области D^+, за исключением разве что начала координат, где ее порядок равен индексу $\varkappa$ функции $a(s)+ib(s)$.*

Итак, теперь учитывая это определение разберем наши три случая, пусть $\varkappa = 0$, тогда так как функция $\eta^+(z)$ не имеет нулей в области, то можно представить нее в виде показательной функции

$$\eta^+(z) = e^{i\gamma(z)}, \quad \gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y).$$

Тогда по определению 1.10 имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = e^{i\gamma(t)} = e^{i\omega(s)}e^{-\omega_1(s)},$$

приравняем модули и аргументы обеих частей равенства выше, имеем

$$p(s)\sqrt{a(s) + b(s)} = e^{-\omega_1(s)}, \quad \omega(s) = \operatorname{arctg}\frac{b(s)}{a(s)}. \tag{14}$$

Проще всего выразить результаты при помощи оператора Шварца, потому что (14) определяет краевое значение гармонической функции $\omega(x, y)$, сама функция $\omega(x, y)$ определяется решением задачи Дирихле, затем из уравнений Коши-Римана определяется сопряженная гармоническая функция $\omega_1(x, y)$, через краевое значения которой выражается искомый регуляризирующий множитель $p(s)$.

Тогда по (14) получим

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = S\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \tag{15}$$

для определенности будем считать, что

$$\Im\gamma(z_0) = \omega_1(z_0) = 0.$$

Тогда регуляризующий множитель определяется формулой

$$p(s) = \frac{e^{-\omega(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}.$$

Остается рассмотреть вопрос единственности, пусть существует два различных множителя $p(s)$, и $p_1(s)$, тогда будем иметь равенства

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = \eta^+(s), \quad p_1(s)[a(s) + ib(s)] = \eta_1^+(s),$$

тогда разделим почленно

$$\frac{p_1(s)}{p(s)} = \psi(s),$$

где $\psi(s) = \dfrac{\eta_1^+(s)}{\eta^+(s)}$, так как мнимая часть $\psi(z)$ на контуре равна нулю, то в силу единственности решения задачи Дирихле $\Im\psi(z) = 0$ всюду в D^+, то есть $\psi(z) = const$.

Отсюда можно сделать вывод, что регуляризующий множитель определяется с точностью до постоянного множителя, где этот множитель определят условие на мнимую часть для $\gamma(z_0)$.

Теперь разберем случай при $\varkappa \neq 0$, по определению имеем

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)} = t^{\varkappa} e^{-\omega_1(s)} e^{i\omega(s)}.$$

Рассуждая аналогично получим

$$p(s) = \frac{|t|^{\varkappa} e^{-\omega(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}},$$
$$\omega(s) = \arg\{t^{-\varkappa}[a(s) + ib(s)]\} = \operatorname{arctg}\tfrac{b}{a} - \varkappa \arg t, \tag{16}$$

из последнего имеем

$$\gamma(z) = S\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \varkappa \arg t\right].$$

Множитель из (16) единственный это вытекает из предшествующего.

Теперь разберем регуляризующий множитель с постоянным модулем. Будем искать его в виде

$$R(t) = e^{i\theta(s)}. \tag{17}$$

Заданную комплексную функцию представим в полярных координатах $a + ib = re^{i\alpha}$, тогда все по тому же определению 1.10 получаем

$$re^{i(\alpha+\theta)} = \Phi^+(t),$$

условимся, что искомая функция θ при обходе контура L приобретает приращение $2\pi\nu$, где ν – заданное целое число, тогда возьмем индекс обеих частей равенства выше

$$\varkappa + \nu = n,$$

где за n мы будем считать число нулей функции $\Phi^+(z)$ в области D^+, то есть отличие от предыдущего случая в том, что у нас число нулей функции зависит не только от индекса заданной функции, но и от индекса самого регуляризующего множителя, который может быть в отличие от случая когда мы искали чисто действительный регуляризующий множитель не равен нулю.

Итак, пусть искомая функция $\Phi^+(z)$ имеет порядок n в начале координат, тогда представим ее в виде $z^n e^{\gamma(z)}$ и получим

$$re^{i(\theta+\alpha)} = t^n e^{\gamma(t)} = t^n e^{\omega(s)} e^{i\omega_1(s)},$$

если приравняем модули и аргументы, то получим

$$\omega = \ln(r|t|^{-n}),$$

$$\omega_1 = \theta + \alpha - n \arg t.$$

Рассуждая аналогично как и в предыдущем случае, а именно из равенств выше вытекает, что краевое значение действительной части ω искомой аналитической функции $\gamma(z)$ известно, решив задачу Дирихле найдем гармоническую функцию $\omega(x, y)$, после отыскав сопряженную гармоническую функцию ω_1, определим θ по формуле выше, через которую по самой (17) выражается сам регуляризующий множитель.

Запишем окончательный результат при помощи опять таки оператора Шварца

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = S\ln(r|t|^{-n}),$$

и опять для определенности будем полагать, что

$$\Im\gamma(z_0) = 0,$$

тогда регуляризующий множитель определяется по формуле вида

$$R(t) = e^{i(\omega_1 - \alpha + n\arg t)}.$$

В дальнейшем мы будем активно пользоваться первым типом регуляризующего множителя, более подробно про вывод и свойства множителей можно посмотреть в [1, 6].

6. Решение задачи Гильберта. Разберем сначала однородную задачу вида (10), мы будем считать, что коэффициенты задачи удовлетворяют условию $a^2(s) + b^2(s) = 1$. Тогда

$$\frac{u + iv}{a + ib} = (a - ib)(u + iv) = au + bv + i(av - bu).$$

Перепишем краевое условие (10) в двух равносильных формах:

$$\begin{gathered}\Re\left[\frac{F(t)}{a + ib}\right] = 0,\\ \Re\left[(a - ib)F(t)\right] = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ искомая функция. Индексом задачи Гильберта будем называть индекс функции $a(s) + ib(s)$. Разделим обе части (18) на регуляризующий множитель для функции $a + ib$, который представлен в виде формулы (16), тогда получим

$$\Re\left[\frac{F(z)}{t^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}}\right] = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим три случая.

1°. $\varkappa = 0$, то есть индекс функции $a(s) + ib(s)$ равен нулю, тогда получаем условие в области D^+:

$$\Re\left[\frac{F(z)}{e^{i\gamma(z)}}\right] = 0,$$

то есть имеем задачу Шварца, тогда по формуле (12) получаем

$$F(z) = e^{i\gamma(z)} i\beta_0, \tag{20}$$

где β_0 некоторая постоянная.

2°. $\varkappa > 0$. Тогда наше условие (19) есть ничто иное, как однородная задача, которую обсуждали в пункте 5, на основании результатов этого пункта, имеем

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)} Q(z), \tag{21}$$

где $Q(z)$ находится по формуле (11), то есть задача в этом случае имеет $2\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

3°. $\varkappa < 0$. Тогда решение задачи в аналитических функциях не существует. Задача имела бы решение, если в качестве допустимых брать функции, имеющие в области D^+ не менее $-\varkappa$ полюсов.

Теперь перейдем к неоднородной задаче (10), точно также как и для однородной получим задачу вида

$$\Re\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)}}\right] = |t|^{-\varkappa} e^{\omega_1(s)} c(s),$$

рассматривая как и выше три случая и при помощи формул (20), (21), получим для первого случая, то есть когда индекс нуль решение в виде

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[S(e^{\omega_1(s)} c(s)) + i\beta_0\right].$$

Для случая когда индекс строго больше нуля получим неоднородную вспомогательную задачу из пункта 5 и тогда ответ будет в виде

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa} e^{\omega_1(s) c(s)}) + Q(z)],$$

при отрицательном индексе получим

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa} e^{\omega_1(s) c(s)}) + iC],$$

так как у последней функции есть множитель $z^{\varkappa}$, то она может иметь полюс порядка $-\varkappa$, чтобы получить аналитическое решение нужно потребовать нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат у функции из квадратных скобок.

Так как мы рассматриваем контур L в виде единичного круга, то как уже говорилось в этом случае оператор Шварца совпадает с интегралом Шварца, и тогда учитывая что $|t| = 1$, а $\gamma(z) =$

$= \omega(x,y) + i\omega_1(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - \varkappa\sigma\right]\dfrac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma$, можно записать решение задачи Гильберта в следующих формах. При $\varkappa = 0$,

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} + i\beta_0\right],$$

при $\varkappa > 0$

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} + Q(z)\right],$$

и наконец $\varkappa < 0$

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z},$$

в последнем случае для разрешимости задачи функция $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\dfrac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}$ должна иметь нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат.

7. Решение задачи Гильберта на единичном круге. Итак, пусть требуется решить задачу Гильберта для единичного круга вида

$$e^{-\sin 2s}\cos(\cos 2s)u(s) - e^{-\sin 2s}\sin(\cos 2s)v(s) = e^{\cos s}\cos(\sin s),$$

преобразуем:

$$e^{-\sin 2s}(\cos(\cos 2s)u(s) - \sin(\cos 2s)v(s)) = e^{\cos s}\cos(\sin s),$$

рассмотрим функцию $G(z) = e^{iz^2}$, где $z = e^{is}$, то есть на единичном круге, тогда имеем:

$$z^2 = e^{i2s} = \cos 2s + i\sin 2s,$$

домножим на мнимую единицу

$$iz^2 = i\cos 2s - \sin 2s,$$

тогда

$$G(z) = e^{i\cos 2s - \sin 2s} = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s) + i\sin(\cos 2s)\right],$$

мы все это делаем, чтобы свести задачу к виду (18), итак рассмотрим произведение получившиеся функции на $F(z) = u(s) + iv(s)$,

$$G(s)F(s) = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s) + i\sin(\cos 2s)\right]\left[u(s) + iv(s)\right] = e^{-2\sin 2s}\left[\cos(\cos 2s)u(s) - \sin(\cos 2s)v(s) + i\left[\sin(\cos 2s)u(s) + c\right.\right.$$

то есть мы можем исходное уравнение теперь записать в виде (18),

$$\Re\left[G(z)F(z)\right] = \Re\left[e^z\right],$$

или

$$\Re\left[e^{iz^2}F(z) - e^z\right],$$

эта функция аналитическая в круге, тогда получается что это случай, когда индекс равен нулю и имеем по (20),

$$e^{iz^2}F(z) - e^z = i\beta_0,$$

откуда окончательно

$$F(z) = e^{-iz^2}\left[e^z + i\beta_0\right],$$

отметим, что мы не искали тут регуляризующий множитель по формулам, так как легче при решении этой задачи было воспользоваться формулами из курса теории функций комплексной переменной, но очевидно, что регуляризующий множитель для нашей задачи является функция вида $R(t) = e^{-it^2}$.

Заключение. В данной статье была рассмотрена краевая задача Гильберта для односвязной области. Были приведены необходимые определения из теории функций комплексного переменного, включая определение индекса функции и его свойства, интеграла типа Коши и его главного значения. Подробно описаны формулы Гильберта, устанавливающие связь между действительной и мнимой частями аналитической функции на границе области.

Показана тесная взаимосвязь задачи Гильберта с задачей Римана, которая проявляется как в постановке задач, так и в методах их решения. Особое внимание уделено оператору Шварца, который играет ключевую роль в решении задачи Гильберта. Приведено решение задачи Гильберта для различных значений индекса, а также рассмотрен конкретный пример решения задачи на единичном круге.

Результаты работы демонстрируют эффективность сведения задачи Гильберта к задаче Римана, что позволяет использовать хорошо разработанный аппарат факторизации и теории интегралов типа Коши. Приведенные примеры вычисления интегралов с ядром Гильберта и решения краевой задачи могут быть полезны для понимания теории.

Важно отметить, что задача Гильберта не только имеет самостоятельное значение в теории аналитических функций, но и служит мощным инструментом для решения прикладных задач математической физики. Ее применение распространяется на такие области, как теория упругости, гидродинамика, электродинамика и квантовая механика, где краевые задачи для аналитических функций возникают естественным образом при математическом моделировании физических процессов. Дальнейшее развитие методов решения задачи Гильберта и их обобщений остается актуальным направлением исследований в современной математике и ее приложениях.

Перспективы дальнейших исследований могут быть связаны с обобщением задачи Гильберта на многосвязные области, а также с разработкой эффективных численных методов решения для случаев сложных контуров и коэффициентов.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоценимое внимание и поддержку, за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов - 3-е изд., переработ. и доп. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи / В.Д. Кулиев - Москва: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 720 с.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. Москва: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа 2-е изд., переработ. и доп. - Москва: Наука, 1988. – 512 с.
5. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин - Москва: ОГИЗ, 1947. – 304 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике./ Н.И. Мусхелишвили - 3-е изд., переработ. и доп. - Москва, 1968. – 512 с.
7. Сетуха А.В. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта в классе обобщенных функций / А.В. Сетуха // Дифференциальные уравнения, т. 42, № 9, Изд-во ФГБУ «Наука», М., 2006 – 1233–1242 с.
8. Прездорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Прездорф / перевод Е.Д. Соломенцов – Москва: Мир, 1979. – 493 с.

Поступила в редакцию 07.11.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Токарев Денис Алексеевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию