Применение системы Maple при решение задач

Мироничева Е. Е.
kovaleva_l@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача, которая решена как классическим методом, так и с помощью системы компьютерной алгебры «Maple».

Ключевые слова: краевая задача, «Maple», метод Фурье

Для цитирования: Мироничева Е. Е. 2025. Применение системы Maple при решение задач. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 181–190.

---

1. Введение. Современное общество шагнуло далеко вперед в развитии компьютерных наук. Нашу жизнь уже не возможно представить без гаджетов и роботов. Не остается в стороне и применение программного обеспечения в научных исследованиях. Так, многие физические явления описываются сложными математическими моделями, аналитическое решение которых часто трудоемкое, а порой и не возможно. Иногда удается доказать только существование и единственность решения.

Современные компьютеры обладают высокой производительностью, что позволяет использовать численные алгоритмы при решении задач с большими данными. Полученные решения обладают высокой точностью, что важно при исследовании физических задач.

Использование специализированных программ, таких как «Maple», «MatLab», «Matematica» и др. позволяет оптимизировать рутинные вычисления, сокращая затраченное время. Графическое представление данных позволяет наглядно интерпретировать полученные результаты, легче выявлять закономерности, появляется возможность сосредоточиться на результатах, а не на вычислениях. Однако, полученные решения необходимо сравнивать с решением, полученным без использования программ, чтобы оценить сходимость решения. Таким образом, применение компьютерных технологий при решении математических проблем неотъемлемая часть современной науки, но не заменяет ее полностью.

2. Метод Фурье. Метод Фурье или метод разделения переменных, помогает решать задачи математической физики путем разделения переменных. Предложенный Ж. Фурье в начале XIX века для задач теплопроводности, он был обобщен М. В. Остроградским в 1828 г. Решение уравнения, удовлетворяющие заданным начальным и граничным условиям, представляется как сумма решений, удовлетворяющих граничным условиями имеющих вид произведения функции пространственных координат и функции времени. Поиск таких решений сводится к нахождению собственных функций и собственных значений дифференциальных операторов, а затем к разложению начальных условий по этим собственным функциям. Метод применим, например, к задачам о колебаниях струны и теплопроводности в стержне.

Приведем несколько определений и утверждение, подробнее можно найти в книгах [2], [3], [6].

Определение. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos x + b_n \sin x) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos x + b_n \sin x)$$

называется тригонометрическим рядом с коэффициентами a_n и b_n.

Пусть $f(t)$ периодическая функция с периодом 2π , непрерывная на симметричном относительно нуля отрезке $[-l, l]$ или имеет конечное число точек разрыва первого рода, тогда коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{nt}{l} dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad -l \leqslant t \leqslant l,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \frac{nt}{l} dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad -l \leqslant t \leqslant l$$

существуют и называются коэффициентами Фурье для функции $f(t)$.

Определение. Тригонометрический ряд с коэффициентами Фурье для функции $f(t)$ называется тригонометрическим рядом Фурье.

Определение. Пусть функция $f(t)$ определена на отрезке $[-l, l]$. Она называется четной, если

$$\forall \ t \in [-l, l] \ \ f(-t) = f(t).$$

© Мироничева Е. Е., 2025

Аналогично, функция называется нечетной, если

$$\forall\ t \in [-l, l]\ \ f(-t) = -f(t).$$

Утверждение. Для четных и нечетных функций справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $f(t)$ четная на отрезке $[-l, l]$. Тогда коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$b_n = 0, a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{nt}{l}dt,$$

   а сама функция представима в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nt}{l}.$$

2. Пусть $f(t)$ нечетная на отрезке $[-l, l]$. Тогда коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = 0, b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{nt}{l}dt,$$

   а сама функция представима в виде:.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nt}{l}.$$

Примерная схема метода Фурье.

1. Представляем частное решение в виде произведения двух функций. Подставляем это решение в исходное уравнение. Получаем два дифференциальных уравнения второго порядка.
2. Полученные уравнения вместе с краевыми условиями представляют собой две различные граничные задачи Штурма Лиувилля. Решаем одну из задач, находим собственные значения и собственные функции.
3. Теперь вторая задача может быть решена как дифференциальное уравнение первого порядка. Решение будет содержать константы.
4. Перемножив полученные решения в 3 и 4 пунктах получаем частное решение исходной задачи.
5. Нам остается найти константы, т. е. коэффициенты Фурье.

2. Задача Штурма Лиувилля. Одним из методов для решения эллиптических краевых задач является метод Фурье. Суть метода будет изложена в следующих параграфах. А в этом приведем необходимые нам предварительные сведения.

В методе Фурье используется разложение функций по собственным функциям, которые легко находятся при решении задачи Штурма – Лиувилля. В книгах [7]-[12] подробно описана данная задача.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) + \lambda p(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

с заданными краевыми условиями в граничных точках

$$\begin{cases} a_1x'(a) + a_2x(a) = 0, & \beta_1x'(b) + \beta_2x(b) = 0; \\ |a_1| + |a_2| \neq 0 & |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Функции $\varphi'(t), q(t), p(t)$ будем предполагать непрерывными на отрезке $[a, b]$. В дальнейшем будем считать $\varphi(t) > 0, q(t) > 0, p(t) > 0$. Число λ — параметр уравнения, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные постоянные.

Определение. «Задачу об определении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения $x_\lambda(t)$ уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), называют задачей Штурма – Лиувилля» [12].

Определение. «Значения параметра λ, при которых существуют решения задачи Штурма – Лиувилля (1), (2) называют собственными числами, или собственными значениями, а отвечающие им решения $x_\lambda(t)$ – собственными функциями этой задачи» [15].

Определение. Граничные условия (2) называются граничными условиями Штурма.

Определение. Совокупность всех собственных значений задачи Штурма – Лиувилля называется спектром.

Приведем некоторые свойства, которыми обладают собственные функции.

Свойство 1. «Все собственные значения задачи Штурма – Лиувилля 1- 2 положительны»[14].

Свойство 2. Существует последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}, n = \overline{1,\infty}$, и соответствующая им последовательность собственных функций $\{x_n(t)\}\}, n = \overline{1,\infty}$, задачи Штурма – Лиувилля (1), (2), причем все собственные значения можно перенумеровать в порядке возрастания их абсолютного значения

$$| \lambda_1 |\leqslant| \lambda_2 |\leqslant \ldots \leqslant| \lambda_n |\leqslant \ldots$$

Свойство 3. Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

Определение. Функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные и интегрируемые на интервале (a,b), называются ортогональными на этом интервале с весом $p(t)$, если

$$< x(t)|y(t) >_p = \int_a^b p(t)x(t)y(t)dt = 0,$$

где $p(t) > 0$ определена и интегрируема на (a, b).

В дальнейшем, мы будем полагать вес $p(t)$ равным единице, если не сказано обратное.

Определение. «Неотрицательную функцию $x(t)$ определяемою как

$$\| x \| = \| x(t) \| = \sqrt{< x(t)|x(t) >_p}.$$

будем называть нормой функции $x(t)$»[3].

Свойство 4. «Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны на интервале (a, b) с весом $p(t)$»[10].

Согласно свойству 3, собственные функции задачи определены с точностью до константы. Одним из способов найти ее -это рассмотреть равенство нормы функции $x_k(t)$ единице, т. е.

$$\| x_k(t) \|^2 = \int_a^b p(t)x_k(t)^2dt = 1, \quad k = \overline{1,\infty}$$

Этот способ называют условием нормировки.

Определение. «Система функций $\{x_k(t)\}, k = \overline{1,\infty}$ называется ортогональной на интервале (a, b) с весом $p(t)$, если для любых $k, l = \overline{1,\infty}$ справедливо $\| x_k(t)|x_l(t) \|_p = 0, k \neq l$»[10].

Определение. « Ортогональная на интервале (a, b) система функций $\{x_k(t)\}$, $k = \overline{1,\infty}$, называется ортонормированной с весом $p(t)$, если $\| x_k(t) \| = 1, k = \overline{1,\infty}$»[10].

Ортогональная на интервале (a, b) система функций $\{x_k(t)\}, k = \overline{1,\infty}$, порождает ортонормированную с весом $p(t) = 1$ систему функций $\{u_n(t)\}$, где

$$u_n(t) = \frac{\sqrt{p(t)}x_n(t)}{\| x_n(t) \|}.$$

В результате условие полноты для ортогональной системы функций с весом $p(t)$ примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(t)x_k(\tau)}{\| x_k(t) \|^2} p(\tau) = \delta(t - \tau).$$

где $\delta(t - \tau)$ – дельта функция Дирака.

Свойство 5. Обозначим

$$\mathcal{L}[y] \equiv y''(x) - q(x)y(x).$$

Определение.«Множество функций

$$D(L) = \left\{ y = y(x)|y \in C^2[a, b], \Gamma_a[y] = 0, \Gamma_b[y] = 0 \right\}$$

будем называть классической областью определения»[7].

Утверждение. Оператор $\mathcal{L}$, рассматриваемый только на множестве $D(L)$, мы будем называть основным оператором на классической области определения или оператором Штурма – Лиувилля и обозначать $L[y]$.

Свойство 6. «Теорема разложения В. А. Стеклова. Если функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и удовлетворяет граничным условиям (2), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[a,b]$ ряд по собственным функциям $x_k(t)$ задачи Штурма – Лиувилля (1), (2)»[?]

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k(t), \tag{3}$$

где

$$C_k = \frac{< f(t)|x_k(t) >_p}{\| x_k(t) \|^2} = \frac{\int_a^b f(t)x_k(t)p(t)}{\int_a^b x_k^2(t)p(t)dt}. \tag{4}$$

Определение. Ряд (3) называется рядом Фурье функции $f(t)$ по ортогональной системе функций $\{x_k(t)\}\}$, а коэффициенты (4) – коэффициентами Фурье.

3. Решение задачи методом Фурье.

Задача. «Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри прямоугольника $OACB$, у которого вдоль стороны OB потенциал равен $\sin\frac{\pi x}{a}$, а три другие стороны заземлены. Электрические заряды внутри прямоугольника отсутствуют»[8].

Решение. Задача сводится к следующей системе.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{a}, u(a,y) = 0, 0 \leqslant y \leqslant a \\ u(0,y) = 0, u(x,a) = 0, 0 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

Так как в этой задаче граничные условия неоднородны только по одной переменной и однородны по другой то мы можем применить метод разделения переменных.

1) Сначала будем искать частные решения уравнения Лапласа в виде произведения двух функций: $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Подставим $u(x,y)$ в исходное уравнение Лапласа, получим:

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{или} \quad -X''Y = XY''.$$

Поделим правую и левую части уравнения на XY, получим:

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda^2.$$

Из последнего равенства получим два уравнения:

$$X''(x) = -\lambda X(x),$$

$$Y''(y) = \lambda Y(y).$$

2) Применим граничные условия к $Y(y)$. Подставим выражение $u_1(x,y) = X(x)Y(y)$ в однородные граничные условия задачи, получим

$$X(0)Y(y) = 0; \quad X(a)Y(y) = 0.$$

Если $Y(y) = 0$, то искомая функция $u_1(x,y) = X(x)Y(y) = 0$ и, следовательно, не выполняются граничное условие $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{a}$. Тогда $Y(y) \neq 0$, значит $X(0) = 0, X(a) = 0$.

3) на этом этапе решим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X(0) = 0, X(a) = 0. \end{cases}$$

Получили задачу Штурма – Лиувилля и, согласно предыдущему пункту, собственными числами задачи являются:

$$\lambda_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{a^2}, n \in \mathbb{N},$$

а собственными функциями будет множество функций:

$$x_n(x) = \sin(\frac{\pi n x}{a}), n \in \mathbb{N}.$$

4) Теперь решим второе дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda^2 Y(y), \\ Y(0) = \sin\frac{\pi n x}{a}, Y(a) = 0. \end{cases}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$Y(y) = a\,\mathrm{ch}(\frac{\pi n}{a}y) + c\,\mathrm{sh}(\frac{\pi n}{a}y)$$

Для $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$Y_n(x) = a_n\,\mathrm{ch}(\frac{\pi n}{a}y) + c_n\,\mathrm{sh}(\frac{\pi n}{a}y).$$

5) Нахождение решения.

Подставим найденные решения в пунктах 3 и 4 в выражение для u:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\mathrm{ch}(\frac{\pi n}{a}y) + c_n\,\mathrm{sh}(\frac{\pi n}{a}y))\sin(\frac{\pi n x}{a}).$$

Подставим в это выражение граничные условия задачи.

При $Y(a) = 0$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\mathrm{ch}(\frac{\pi n}{a}a) + c_n\,\mathrm{sh}(\frac{\pi n}{a}a)\sin(\frac{\pi n x}{a}) = 0,$$

откуда

$$a_n\,\mathrm{ch}(\pi n) + c_n\,\mathrm{sh}(\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$c_n = -\frac{a_n\,\mathrm{ch}(\pi n)}{\mathrm{sh}(\pi n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $Y(0) = \sin\frac{\pi x}{a}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n x}{a}) = \sin\frac{\pi x}{a}.$$

Тогда:

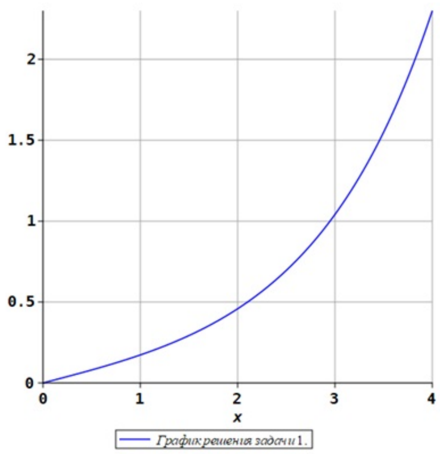
$$a_n = 1, \quad c_n = -\frac{\mathrm{ch}(\pi n)}{\mathrm{sh}(\pi n}.$$

Таким образом окончательное решение имеет вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathrm{ch}(\pi n y) - \frac{\mathrm{ch}(\pi n)}{\mathrm{sh}(\pi n)}\,\mathrm{sh}(\pi n y)\big)\sin(\frac{\pi n x}{a}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}(\frac{y-a}{a}\pi n)\sin(\frac{\pi n x}{a})}{\mathrm{sh}(\pi n)}.$$

Построим график решения:



4. Реализация в системе «Maple». Приведем здесь программный код.

$restart;$
$with(plots):$
$with(linalg):$
$pde := VectorCalculus[Laplacian](u(x, y), [x, y]) = 0;$

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0$$

$bc1 := u(0, y) = 0, u(x, 0) = \sin\left(\frac{pi \cdot k}{a} \cdot x\right); bc2 := u(a, y) = 0, u(x, a) = 0;$

$$bc1 := u(0, y) = 0, u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)$$

$$bc2 := u(a, y) = 0, u(x, a) = 0$$

$sol := pdsolve(pde, HINT = X(x) \cdot Y(y));$

$$sol := u(x, y) = X(x)\ Y(y)\ \textbf{where}\left[\left\{\frac{d^2}{dx^2} X(x) = \_c_1 X(x), \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -\_c_1 Y(y)\right\}\right]$$

$de2 := op(1, (op(1, op(2, sol))));$
$de1 := op(2, (op(1, op(2, sol))));$

$$de2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = \_c_1 X(x)$$

$$de1 := \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -\_c_1 Y(y)$$

$de1 := subs\left(\_c_1 = -\lambda^2, de1\right);\ de2 := subs\left(\_c_1 = -\lambda^2, de2\right);$

$$de1 := \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = \lambda^2 Y(y)$$

$$de2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda^2 X(x)$$

$subs\left(\lambda^2 = \lambda\right);$

$$\lambda^2 = \lambda$$

$dsolve(de2, X(x));$

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)$$

$X := unapply(rhs(\%), x);$

$$X := x \mapsto c_1 \cdot \sin(\lambda \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\lambda \cdot x)$$

$s1;$

$$c_2 = 0, c_1 \sin(\lambda a) + c_2 \cos(\lambda a) = 0$$

$assign(\%[1]) : X(x);$

$$c_1 \sin(\lambda x)$$

$$chl := \frac{s1[2]}{c_1};$$

$$chl := \sin(\lambda\, a) = 0$$

$$solve(chl, \lambda, allsolutions);$$

$$\frac{\pi\_Z1\sim}{a}$$

$$indets(\%)\ \mathbf{minus}\{b\};$$

$$\{\_Z1\sim, a\}$$

$$subs(\%[1] = 'k', \%\%):$$
$$ev := unapply(\%, k);$$

$$ev := k \mapsto \frac{\pi \cdot k}{a}$$

$$X := 'X': ode := subs(\lambda = ev(k), de2);$$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\, X(x) = -\frac{\pi^2 k^2 X(x)}{a^2}$$

$$res := dsolve(\{ode, s1\}, X(x))\ \text{assuming}\ k :: posint;$$

$$res := X(x) = c_1 \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{a}\right)$$

$$X := (x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{a}\right);$$

$$X := (x, n) \mapsto \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{a}\right)$$

$$ev(k); X(x, k);$$

$$\frac{\pi\, k}{a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{a}\right)$$

$$Y := 'Y': problem := subs(\lambda = ev(k), de1);$$

$$problem := \frac{d^2}{dy^2}\, Y(y) = \frac{\pi^2 k^2 Y(y)}{a^2}$$

$$res1 := dsolve(problem, Y(y));$$

$$res1 := Y(y) = c_1\, e^{-\frac{\pi\, k y}{a}} + c_3\, e^{\frac{\pi\, k y}{a}}$$

$$s := convert(rhs(res1), trigh);$$

$$s := (c_1 + c_3)\cosh\left(\frac{\pi k y}{a}\right) + (-c_1 + c_3)\sinh\left(\frac{\pi k y}{a}\right)$$

$$Y := subs(c_1 + c_3 = a[k], -c_1 + c_3 = b[k], s);$$

$$Y := a_k \cosh\left(\frac{\pi k y}{a}\right) + b_k \sinh\left(\frac{\pi k y}{a}\right)$$

$$Y := (y, n) \to a_k \cosh\left(\frac{\pi k y}{a}\right) + b_k \sinh\left(\frac{\pi k y}{a}\right);$$

$$Y := (y, n) \mapsto a_k \cdot \cosh\left(\frac{\pi \cdot k \cdot y}{a}\right) + b_k \cdot \sinh\left(\frac{\pi \cdot k \cdot y}{a}\right)$$

$$'u(x,t)' = Sum(Y[k](y) \cdot X(x,k), k = 1..\text{infinity}) :$$
$$subs(Y[k](t) = rhs(res1), rhs(\%)) :$$
$$sol := 'u(x,t)' = subs(c_1 = a[k], c_3 = b[k], \%);$$

$$sol := u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cosh\left(\frac{\pi k y}{a}\right) + b_k \sinh\left(\frac{\pi k y}{a}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)$$

$$eq := f(y) = value(subs(y = 0, rhs(sol)));$$

$$eq := f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cosh(0) + b_k \sinh(0)) \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)$$

$$simplify((\%))$$

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)$$

$$ak := 'a[k]' = 2/a * int(\sin(\text{Pi} * k * x/a) * \sin(\text{Pi} * x * k/a), x = 0..a)$$
$$\text{assuming } k :: posint;$$

$$ak := a_k = 1$$

$$eq1 := f1(y) = value(subs(y = a, rhs(sol)));$$

$$eq1 := f1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cosh(\pi k) + b_k \sinh(\pi k)) \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)$$

$$f2 := a_k \cosh(\pi k) + b_k \sinh(\pi k);$$

$$f2 := a_k \cosh(\pi k) + b_k \sinh(\pi k)$$

$$eq2 := subs(a_k = 1, f2);$$

$$eq2 := \cosh(\pi k) + b_k \sinh(\pi k)$$

$$bk := 'b[k]' = solve(eq2 = 0, b_k);$$

$$bk := b_k = -\frac{\cosh(\pi k)}{\sinh(\pi k)}$$

$$'w(x,t)' = sol:$$
$$subs(a_k = 1, rhs(\%)):$$
$$subs(b_k = rhs(bk), rhs(\%));$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)\left(-\frac{\sinh\left(\frac{\pi k y}{a}\right)\cosh(\pi k)}{\sinh(\pi k)} + \cosh\left(\frac{\pi k y}{a}\right)\right)$$

$$combine(Sum(\sin(\pi * k/a * x) * (-\sinh(\pi * k/a * y) * \cosh(\pi * k)/\sinh(\pi * k) + \cosh(\pi * k/a * y)), k = 1..\infty), trig)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi k (a-y)}{a}\right)}{\sinh(\pi k)}$$

Заключение. Исследование подтвердило эффективность использования системы «Maple» для решения краевых задач. Возможность программировать собственные алгоритмы, позволила быстрее вычислять необходимые интегралы. Благодаря визуализации мы наглядно представили решение задачи на графике и результат сравнения с точным оказался просто замечательным.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Калиниченко Д.Ф.1977. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие для вузов. М., Наука, 224.
2. Бойков, В.А., Жибер А.В. 2012. Уравнения математической физики. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 254.
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Физматлит, 400. ISBN 5-9221-0310-5.
4. Годунов, С.К. 1971. Уравнения математической физики. М., Наука, 416.
5. Горн И. 1938. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными / Пер. с нем. М. С. Горнштейна. М., 272.
6. Курант, Р. 1964. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т. Д. Вентцель; под редакцией О. А. Олейник. М., Мир, 832.
7. Михлин, С. Г. Курс математической физики / Михлин Соломон Григорьевич. - Москва: Наука, 1968. - 575 с. - Лит.: с. 569. - Предм. указ.: с. 574.
8. Пикулин, В.П., Похожаев С.И. 1995. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Наука. Физматлит, 224. ISBN 5-02-015181-5.

9. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский Александр Андреевич, Михайлов Александр Петрович. - Москва: Физматлит, 2005. - 320 с.ISBN 978-5-9221-0120-2.
10. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики: учебник / Соболев Сергей Львович. - 4-е изд. - Москва: Наука, 1966. - 444 с.
11. Тиман А.Ф. Введение в теорию гармонических функций / А.Ф. Тиман, В.Н. Трофимов. – М.: Наука, 1968. – 208 с.
12. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов / Тихонов Андрей Николаевич, Самарский Александр Андреевич. - 7-е изд. - Москва: Наука: Издательство Московского университета, 2004. - 798 с.- ISBN 9785211048430.

Поступила в редакцию 26.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Мироничева Елена Евгеньевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию