*Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 173–180.*

# Теория и практика преобразования фурье в анализе сигналов

**Маслаков Н. С.**
nik.maslakov768@mail.ru

**Аннотация.** В данной статье приведен подробный анализ как теоретических, так и практических аспектов преобразования Фурье, применительно к обработке и анализу сигналов. Последовательно раскрываются все ключевые понятия непрерывного Фурье-преобразования, дается строгое обоснование существования обратного преобразования, приводятся доказательства основных свойств и теорем. Рассматривается дискретизация Фурье-преобразования: вводится ДПФ, детально описывается алгоритм FFT, анализируется сложность вычислений и обсуждаются вопросы точности и устойчивости. Практическая часть демонстрирует методики вычисления Фурье-преобразования на примерах прямоугольных и гауссовых сигналов, а также иллюстрирует процедуру фильтрации шумных данных с помощью FFT. Результаты показывают, каким образом выбор параметров (окна, длины преобразования, режима фильтрации) влияет на качество спектрального анализа.

**Ключевые слова:** непрерывное Фурье-преобразование, дискретное Фурье-преобразование, алгоритм FFT, спектральный анализ, фильтрация сигналов

**Для цитирования:** Маслаков Н. С. 2025. Теория и практика преобразования фурье в анализе сигналов. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 173–180.

---

**1. Введение.** Современная обработка сигналов широко использует методы частотного анализа. Основным инструментом этого анализа является преобразование Фурье, которое позволяет представить сигнал из временной области в частотную. При анализе реальных данных часто требуется быстро вычислить спектр, что делает алгоритм FFT (быстрое преобразование Фурье) неотъемлемой частью цифровой обработки сигналов. В литературе уделено много внимания теории Фурье [1]–[3], однако не всегда подробно излагаются доказательства ключевых свойств, а также практические аспекты реализации алгоритмов на конечных вычислительных ресурсах.

**2. Непрерывное Фурье-преобразование.** В этом пункте подробно рассмотрим определения, условия существования Фурье-преобразования для различных классов функций, формула обратного преобразования, а также доказательства основных свойств (линейность, сдвиг, дифференцирование, теорема о свертке, неравенство Парсеваля).

**2.1 Определение и условия существования**

**Определение 2.1.1.** *Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция на $\mathbb{R}$. Говорят, что преобразование Фурье функции $f$ существует в смысле Лебега, если*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt < +\infty.$$

В этом случае определяют

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Замечание.** Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $F(\omega)$ непрерывна по $\omega$ и $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0$. Однако могут существовать функции, не принадлежащие $L^1$, но обладающие формальным Фурье-образом (например, функции из пространства обобщённых функций).

**Определение 2.1.2.** *Функция $f(t)$ называется абсолютно интегрируемой, если*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty.$$

*Если помимо этого*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, |f(t)|\, dt < \infty,$$

*то говорят, что $f$ обладает абсолютно интегрируемым моментом первого порядка.*

**2.2 Обратное преобразование и условие Парсеваля – Плейвеля**

**Теорема 2.2.1** *(Обратное преобразование Фурье).* Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $F(\omega)$ задано формулой

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Если дополнительно $F \in L^1(\mathbb{R})$, то для почти всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\omega. \tag{2}$$

**Краткое доказательство.** Пусть $f \in L^1 \cap L^2$. Сначала вводится сглаженная версия $F(\omega)$ с помощью функции «окна» $e^{-\alpha\omega^2}$, производятся преобразования по Фурье и обратные интегралы, затем постепенно убирается сглаживание $\alpha \to 0$. Более строгое доказательство [2], [5].

**Теорема 2.2.2** *(Неравенство Парсеваля – Плейвеля).* Если $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega.$$

**Краткое доказательство.** Доказывается через представление функции $g(t) = \overline{f(-t)}$ и применение теоремы Фурье для $f$ и $g$, а затем использования теоремы о свёртке. Смотрите детально в [4].

**2.3 Основные свойства и их доказательства.** Ниже даны ключевые свойства, используемые в практических приложениях.

**2.3.1 Линейность.**

**Теорема 2.3.1.** Если $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ и $a, b \in \mathbb{C}$, то $\mathcal{F}\{a\,f + b\,g\}(\omega) = a\,\mathcal{F}\{f\}(\omega) \;+\; b\,\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

**Доказательство.** По определению (1):

$$\mathcal{F}\{a\,f + b\,g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(a\,f(t) + b\,g(t)\big)\, e^{-i\omega t}\, dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Оба интеграла сходятся по условию $f, g \in L^1$. Следовательно, получаем требуемый результат.

**2.3.2 Сдвиг во времени**

**Теорема 2.3.2.** Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}\{f_{t_0}\}(\omega) = e^{-\,i\,\omega\,t_0}\,\mathcal{F}\{f\}(\omega)$.

**Доказательство.** Подставляем $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$ в определение:

$$\mathcal{F}\{f_{t_0}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Делая замену переменной $\tau = t - t_0$ (и $dt = d\tau$), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-\,i\,\omega\,(\tau + t_0)}\, d\tau = e^{-\,i\,\omega\,t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-\,i\,\omega\,\tau}\, d\tau = e^{-\,i\,\omega\,t_0} F(\omega).$$

**2.3.3 Сдвиг в частотной области**

**Теорема 2.3.3.** Если $F(\omega)$ – Фурье-образ $f(t)$ и определена новая функция $\widetilde{F}(\omega) = F(\omega - \omega_0)$, то соответствующая $f$ во временной области умножается на комплексную экспоненту $\widetilde{f}(t) = f(t)\, e^{i\,\omega_0\,t}$.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой обратного преобразования (2):

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F}(\omega)\, e^{i\,\omega\,t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \omega_0)\, e^{i\,\omega\,t}\, d\omega.$$

Сделаем замену $\nu = \omega - \omega_0$, тогда $d\omega = d\nu$, и получим

$$\widetilde{f}(t) = e^{i\,\omega_0\,t}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{i\,\nu\,t}\, d\nu = e^{i\,\omega_0\,t}\, f(t).$$

**2.3.4 Дифференцирование**

**Теорема 2.3.4.** Если $f(t)$ достаточно гладкая и $f, f'$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, то

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = i\,\omega\, F(\omega), \qquad \mathcal{F}\{t\, f(t)\}(\omega) = i\,\frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

**Доказательство.**

1. Для $f'(t)$:

$$\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-\,i\,\omega\,t}\, dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$\Big[f(t)\, e^{-\,i\,\omega t}\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \big(-\,i\,\omega\, e^{-\,i\,\omega t}\big)\, dt.$$

Границы обращаются в ноль по условию $f \in L^1$. Остается

$$i\,\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\,i\,\omega t}\, dt = i\,\omega\, F(\omega).$$

2. Для $t\,f(t)$:

$$\mathcal{F}\{t\,f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,e^{-i\,\omega t}\,dt = i\,\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega t}\,dt = i\,\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

**2.3.5 Теорема о свёртке**

**Определение 2.3.5.** *Для функций $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ определяем свёртку*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

**Теорема 2.3.6.** Если $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, то $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = F(\omega)\,\cdot\,G(\omega)$, где $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ и $G(\omega) = \mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

**Доказательство.** Известно, что $f, g \in L^1 \implies f * g \in L^1$. Далее

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\Big]e^{-i\,\omega\,t}\,dt.$$

Меняем порядок интегрирования (теорема Фубини) и внутри внутреннего интеграла делаем замену $v = t - \tau$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\,e^{-i\,\omega\,(v+\tau)}\,dv\Big]d\tau = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\,\omega\,\tau}\,d\tau\Big]\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\,e^{-i\,\omega\,v}\,dv\Big] = F(\omega)\,G(\omega).$$

**2.3.6 Условия на гладкость и быстрое убывание**

**Замечание.** Если $f(t)$ и все её производные $f^{(k)}(t)$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, то $F(\omega)$ – бесконечно дифференцируемая функция и убывает быстрее любой степени $1/|\omega|^n$ при $|\omega| \to \infty$. В частности, если $f$ – ступенчатая (полигональная) функция с компактным носителем, её спектр показывает $O(1/|\omega|)$-зависимость. Если же $f$ – гладкая функция, быстро убывающая, то её спектр будет быстро спадать (можно приблизить нулю вне некоторой полосы).

**3. Дискретное Фурье-преобразование и алгоритм FFT.** В этоv пункте приводится подробная теория перехода от непрерывного Фурье-преобразования к его дискретному аналогу, объясняется принцип работы FFT и анализируются погрешности, возникающие при применении этого алгоритма в цифровых системах.

**3.1 Дискретизация непрерывного сигнала.** Пусть $x(t)$ – непрерывная во времени функция (сигнал). Для анализа на ЭВМ он измеряется через выбранную периодичность выборки $\Delta t$, получая последовательность $x[n] = x(n\,\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Теория дискретизации базируется на методе Найквиста – Шеннона: если $x(t)$ ограничен по спектру (т. е. $X(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_{\max}$), то достаточно выбирать $\Delta t \le \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ для безошибочного восстановления (теорема отсчёта). При неограниченном спектре происходит явление «наложения спектров» (aliasing).

**3.2 Определение Дискретного Преобразования Фурье (ДПФ)**

**Определение 3.2.1.** *Пусть $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ – комплексная последовательность длины $N$. Её* дискретным преобразованием Фурье *(ДПФ) называется набор комплексных чисел $\{X[k]\}_{k=0}^{N-1}$, определяемый формулой*

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-i\,\frac{2\pi}{N}\,k\,n}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

**Замечание.** Обратное ДПФ задается выражением

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,e^{i\,\frac{2\pi}{N}\,k\,n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

**3.3 Линейная алгебра и матричная форма ДПФ.** ДПФ удобно представлять в виде произведения матрицы на вектор $X = W_N x$, где

$$W_N = \big[\,\omega_N^{k\,n}\big]_{k,n=0}^{N-1}, \quad \omega_N = e^{-i\,\frac{2\pi}{N}}, \quad x = \big[x[0], x[1], \ldots, x[N-1]\big]^{\mathsf{T}}, \quad X = \big[X[0], X[1], \ldots, X[N-1]\big]^{\mathsf{T}}.$$

Элементы матрицы $W_N$ часто называют *ватерпутами* (twiddle factors).

Поскольку матрица $W_N$ – унитарна с нормировкой $\frac{1}{\sqrt{N}}$, то ДПФ можно интерпретировать как унитарное преобразование в $N$-мерном комплексном пространстве. Однако вычисление $W_N x$ напрямую требует $O(N^2)$ операций.

**3.4 Алгоритм быстрого преобразования Фурье (FFT).** Алгоритм FFT основан на разделении исходной последовательности длины $N = 2^m$ на две подпоследовательности: с чётными и нечётными индексами. Обозначим

$$x_e[n] = x[2n], x_o[n] = x[2n+1], n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1.$$

Соответственно, их ДПФ длины $N/2$:

$$E[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N/2}kn}, \qquad O[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N/2}kn}, \quad k = 0, \ldots, \tfrac{N}{2} - 1.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k(2n)} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k(2n+1)}.$$

Преобразуем экспоненты:

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}k(2n)} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}kn}, \quad e^{-i\frac{2\pi}{N}k(2n+1)} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}kn}\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k}.$$

Отсюда для $k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$ получаем:

$$X[k] = E[k] + e^{-i\frac{2\pi}{N}k}\, O[k], \qquad X\Big[k + \tfrac{N}{2}\Big] = E[k] - e^{-i\frac{2\pi}{N}k}\, O[k].$$

Таким образом:

$$\boxed{\begin{aligned} X[k] &= E[k] + W_N^k\, O[k], \\ X\big[k + \tfrac{N}{2}\big] &= E[k] - W_N^k\, O[k], \end{aligned} \quad W_N^k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tfrac{N}{2} - 1.}$$

Это и есть *битовая схема раскладки* FFT: на каждом уровне разбиения длина последовательности уменьшается вдвое, а комплексные умножения с «ватерпутами» $W_N^k$ выполняются для комбинирования двух субпреобразований длины $N/2$.

**3.5 Рекурсивная реализация и оценка сложности**

Алгоритм рекурсивно вычисляет ДПФ для длины $N/2$ до тех пор, пока не дойдёт до базы $N = 1$, где ДПФ тривиальна ($X[0] = x[0]$). Тогда на $m$-ом уровне (верхнем) выполняется:

- две рекурсивные вычисления ДПФ размера $N/2$;
- $N$ комплексных умножений и $N$ сложений для объединения $E$ и $O$.

Пусть $T(N)$ – число операций (умножений + сложений) на входе длины $N = 2^m$. Тогда

$$T(N) = 2T\Big(\frac{N}{2}\Big) + O(N), \quad T(1) = O(1).$$

По мастер теореме $T(N) = O(N \log N)$. В отличие от прямого $O(N^2)$-вычисления, FFT позволяет существенно сократить количество операций при больших $N$.

**3.6 Особенности реализации и погрешности**

При реализациях FFT на компьютере важно учитывать следующие аспекты:

1. *Битовая перестановка (bitreversal).* Чтобы рекурсивную схему можно было реализовать в итеративном виде, исходную последовательность индексов $0, 1, \ldots, N-1$ нужно упорядочить в порядке, соответствующем перестановке битов в двоичном представлении. То есть индекс $n$ (записанный в $m$ бит) переходит в индекс, полученный зеркальным отражением этих $m$ бит. Это необходимо для итогового «склейки» результатов уровней.

2. *Числовая устойчивость.* Компьютерное представление комплексных чисел в формате с плавающей запятой ограничено машинным эпсилон. При больших $N$ ошибки округления могут накапливаться. На практике для большинства сигналов алгоритм FFT остаётся стабилен, если использовать двойную точность.

3. *Аппроксимация бесконечной длительности.* В реальности ДПФ вычисляется по конечным последовательностям $x[n]$. Если исходный сигнал не является периодическим, при прямом применении ДПФ может возникнуть «утечка спектра» (spectral leakage): дискретизация «обрезает» сигнал в окне длины $N$, что эквивалентно умножению на прямоугольное окно во временной области. Прямоугольное окно порождает боковые лепестки в спектре, ухудшая разрешающую способность. Для уменьшения эффекта «утечки» применяются сглаживающие окна (Ханна, Хэмминга, Блэкмана и др.), которые вводят плавный спад на границах интервала и снижают боковые лепестки за счёт расширения основной полосы.

4. *Периодизация.* ДПФ аппроксимирует бесконечный периодический сигнал, предполагая, что конечная последовательность повторяется с периодом $N$. Если сигнал непериодический, между концом и началом $N$-точечного окна могут возникать «скачки», приводящие к искажённой спектральной оценке. Чтобы снизить эти артефакты, используют методы наложения окон (overlap-add, overlap-save) при обработке длинных сигналов.

**3.7 Дискретизация частотной области и разрешение спектра.** Поскольку $X[k]$ даёт спектральные значения лишь в узлах

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}\,k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

разрешение частотного анализа равно $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$. Для увеличения разрешения в частотной области обычно берут более длинный отсчёт $N$, что эквивалентно интерполяции спектра. Однако при этом сильно возрастает число операций FFT.

**Замечание.** Частотные индексы $k > N/2$ соответствуют отрицательным частотам $\omega_k - 2\pi$. То есть спектр $X[k]$ симметричен $X[N-k] = \overline{X[k]}$, если $x[n]$ – действительная последовательность.

**3.8 Сравнение с непрерывным случаем.** Если непрерывный сигнал $f(t)$ ограничен по времени (например, $f(t) = 0$ для $|t| > T/2$), его дискретизируют с шагом $\Delta t$. Тогда можно показать, что ДПФ $X[k]$ приближает сэмплы непрерывного спектра $F(\omega)$ через выражение (при условии отсутствия aliasing):

$$X[k] \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(n\,\Delta t)\, e^{-i\,\omega_k\, n\,\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\,\Delta t)\, e^{-i\,\omega_k\, t_n}, \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N\,\Delta t}\,k.$$

При этом для корректного соответствия необходимо, чтобы частота выборки $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ удовлетворяла $\omega_s > 2\,\omega_{\max}$ (условие Найквиста), где $\omega_{\max}$ – максимальная частота сигнала.

**4. Примеры вычисления непрерывного Фурье-преобразования.** Здесь приведены два классических примера, иллюстрирующих, как вычислять непрерывное Фурье-преобразование для распространённых функций.

**4.1 Преобразование прямоугольного импульса**

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Её преобразование Фурье вычисляется по определению (1):

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\,i\,\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-\,i\,\omega t}}{-\,i\,\omega}\right]_{t=-T/2}^{t=+T/2} = \frac{e^{-\,i\,\omega T/2} - e^{\,i\,\omega T/2}}{-\,i\,\omega} = \frac{2\,\sin\!\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}.$$

Обычно вводят нормированную функцию sinc:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \ne 0, \quad \operatorname{sinc}(0) = 1.$$

Тогда

$$F(\omega) = T\,\operatorname{sinc}\!\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

**Замечание.** Основные свойства этого результата: 1) $F(0) = \int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt = T$; 2) При $|\omega T| \gg 1$ амплитуда $F(\omega)$ спадает как $O(1/|\omega|)$; 3) Нули спектра (частоты, где $F(\omega) = 0$) находятся в точках $\omega = \pm\frac{2\pi}{T}\,k$ при $k = 1, 2, \ldots$.

**4.2 Преобразование гауссовой функции**

Гауссова функция обладает свойством самосопряжённости при преобразовании Фурье:

$$f(t) = e^{-\,a\,t^2}, \quad a > 0.$$

Её спектр считается по интегралу

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a t^2} e^{-i \omega t} \, dt.$$

Этот интеграл вычисляется через стандартный приём:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a t^2} e^{-i \omega t} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right).$$

Соответственно,

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

**Замечание.**

1. Форма спектра гауссовой функции – снова гауссова с «обратной» шириной: если $f(t)$ шире (меньше $a$), то её спектр уже (больше $\frac{1}{\sqrt{a}}$).

2. Эта функция относится к классу «быстро убывающих», поэтому её Фурье-образ тоже быстро убывает, что иллюстрирует свойство «гладкости – быстрый спад спектра».

**5. Применение FFT для фильтрации сигналов.** Практическое применение FFT часто связано с фильтрацией шумных сигналов и выделением нужных частотных компонент. Ниже приведён детальный алгоритм и пример реализации.

**5.1 Алгоритм фильтрации через FFT**

Пусть дана дискретная последовательность длины $N$: $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Для фильтрации выполняются следующие шаги:6

1. *FFT исходного сигнала:* вычисляем

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-i \frac{2\pi}{N} k n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

   Это даёт спектральные коэффициенты $X[k]$.

2. *Построение фильтра:* Определяем маску $H[k]$, которая «обрезает» нежелательные частоты. Например, для низкочастотного фильтра (low-pass filter) с порогом $k_0$:

$$H[k] = \begin{cases} 1, & |k| \le k_0 \text{ или } |k-N| \le k_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Здесь используется симметрия $k$ и $N-k$ для отрицательных частот (если $x[n]$ – действительная).

3. *Применение фильтра к спектру:*

$$\widetilde{X}[k] = X[k] \, H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

4. *Обратное FFT:* вычисляем

$$\widetilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] \, e^{i \frac{2\pi}{N} k n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   В результате получаем отфильтрованный сигнал $\widetilde{x}[n]$ во временной области.

**Замечание.** Алгоритм можно улучшить, используя «зелёные» методы windowing:

- *Окно Хэмминга*: $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\big(2\pi n/(N-1)\big)$, чтобы сгладить концы сигнала и уменьшить утечку спектра.

- *Метод overlap-add (или overlap-save)*: при обработке длинных сигналов разбиваем их на перекрывающиеся блоки, применяем FFT к каждому блоку, фильтруем, затем собираем фрагменты обратно. Это снижает искажения на границах блоков.

### 5.2 Пример: фильтрация синусоидального сигнала с шумом

*Постановка задачи.* Допустим, имеется дискретный сигнал $x[n]$, сформированный как

$$x[n] = \sin\Bigl(2\pi f_0 \tfrac{n}{N}\Bigr) + \eta[n], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\eta[n]$ – белый гауссов шум с математическим ожиданием 0, дисперсией $\sigma^2$. Значение $f_0$ задано в условных единицах, соответствует частоте в спектре.

*Шаг 1: Вычисление FFT.*

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \Bigl[\sin\bigl(2\pi f_0 \tfrac{n}{N}\bigr) + \eta[n]\Bigr] e^{-i\,\frac{2\pi}{N}\,k\,n}.$$

Из-за шумовой компоненты спектр будет «заспамлен» шумовыми выбросами, но при этом около $k_0 = f_0\, N$ будут пиковые амплитуды.

*Шаг 2: Построение фильтра.*

Выберем пороговую полосу $|k - k_0| \le \Delta$ и $|k - (N - k_0)| \le \Delta$ (симметрия для негативных частот). Тогда

$$H[k] = \begin{cases} 1, & k_0 - \Delta \le k \le k_0 + \Delta \quad \text{или} \quad N - (k_0 + \Delta) \le k \le N - (k_0 - \Delta), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Шаг 3: Применение фильтра.* $\widetilde{X}[k] = X[k]\ H[k]$. Все спектральные коэффициенты вне смежного диапазона вокруг $k_0$ становятся нулём.

*Шаг 4: Обратное FFT.*

$$\widetilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k]\, e^{i\,\frac{2\pi}{N}\,k\,n}.$$

Результирующий сигнал $\widetilde{x}[n]$ будет почти чистым синусоидальным сигналом частоты $f_0$, так как шумовые компоненты убраны.

**Замечание.** В реальных вычислениях:

1. используют двойную точность (double) для вычисления FFT, чтобы снизить накопление округлительных ошибок;
2. часто применяют оконные функции (например, Ханна) перед FFT, чтобы уменьшить эффект утечки спектра;
3. при очень высоком уровне шума порог $\Delta$ следует увеличивать, чтобы учесть расширение спектрального пика.

**Заключение.** В работе были подробно разобраны: математические основания непрерывного Фурье-преобразования (существование, условия, обратное преобразование), а также доказательства ключевых свойств: линейности, сдвига, дифференцирования, теоремы о свёртке, неравенства Парсеваля. Переход к дискретному преобразованию на основе отбора отсчетов: введена ДПФ, её матричная форма, приведено разбиение на чётные и нечётные подпоследовательности. Представлен рекурсивный алгоритм FFT, доказано, почему его сложность составляет $O(N \log N)$, даны рекомендации по практической реализации (bitreversal, окна, стабилизация). На примерах продемонстрированы вычисления Фурье-преобразования: прямоугольного импульса, гауссова сигнала, а также показано, как при помощи FFT фильтровать шумный синусоидальный сигнал, устраняя нежелательные спектральные компоненты.

Полученный материал является всесторонним руководством для студентов и специалистов, желающих глубоко понять теоретические основы и практические аспекты преобразования Фурье при обработке сигналов. В дальнейшем работа может быть дополнена исследованием многомерного Фурье-преобразования, либо методами адаптивной фильтрации и спектральной оценкой с использованием окна Винера – Ханна.

**Благодарность.** *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

**Список литературы**

1. Дьяконов В. П. 2005. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6: Обработка сигналов и проектирование фильтров. М., СОЛОН-Пресс, 480 с.
2. Зорич В. А. 1984. Математический анализ. Т. 1. 2-е изд., испр. и доп. – М., Физматлит, 736 с.
3. Сергиенко А. Б. 2006. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд., доп. – М., Горячая линия – Телеком, 384 с.
4. Эдвардс Р. Э. 1985. Ряды Фурье в современном изложении. Пер. с англ. Т. 1. М., Мир, 512 с.

5. Papoulis A. 1962. The Fourier Integral and Its Applications. New York, McGraw-Hill, 512 p.

*Поступила в редакцию 25.06.2025*

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Маслаков Николай Сергеевич** – магистрант 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

**РУКОВОДИТЕЛЬ**

**Ковалева Лидия Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию