Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 164–172.

Гармонические функции

Кравченко А. В.
1854374@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются основные факты о гармонических функциях, Описывается представление Пуассона, а также приводится решение нескольких задач.

Ключевые слова: гармонические функции, формула Пуассона, задача Дирихле

Для цитирования: Кравченко А. В. 2025. Гармонические функции. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 164–172.

---

1. Введение. Человек на протяжении всей своей жизни изучает законы природы, старается объяснить происхождение тех или иных явлений. Математики и физики описывают природные процессы с помощью различных уравнений, что позволяет моделировать, изобретать новые технологии, помогающие человеку. Актуальным является решение дифференциальных уравнений с частными производными [6, 8], уравнений различных порядков, возникающих в математической физики [1, 2, 3, 4]. В природе, при любом происходящем процессе естественно возникает множество дополнительных условий, которые необходимо учесть при поиске решений. Одно из центральных мест в теории уравнений математической физики и уравнений с частными производными отведено доказательству существования решения смоделированной задачи, а также единственности найденного решения, которое удовлетворяет поставленным условиям. Краевая задача, которая рассмотрена в настоящей работе, является весьма актуальной. Задавая различные краевые условия, рассматривая задачу в различных областях и пространствах, мы получаем новые задачи и, соответственно, математики находят новые методы для ее решения. Эта задача носит название задача Дирихле.

2. Представление в виде степенного ряда. Начнем с определения гармоничности функции на комплексной плоскости, учитывая, что $z = x + iy$.

Определение. [5]«Вещественная функция u называется гармонической в некоторой области D, если она является аналитической (т. е. бесконечно дифференцируемой в каждой точке области) в этой области и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

». В дальнейшем, в качестве области D, мы будем рассматривать круг $|z| < R$.

Рассмотрим функцию v, связанную с u условиями Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В книге [6] приведена следующая теорема: «Линейная комбинация любой пары сопряженных функций представляет собой аналитическую функцию в области D, т. е. $F = u + iv$, где функция v находится с точностью до константы по формуле:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dy + C,$$

здесь (x_0, y_0) некоторая фиксированная точка в круге, а (x, y) произвольная точка».

Обычно функцию v называют гармонически сопряженной с u. Так как согласно теореме функции u и v отличаются на константу, то как правило она выбирается так, чтобы $V(0) = 0$. Как только мы нашли функцию v, то для круга мы получаем

$$u(z) = \mathrm{ReF(z)},$$

где F, как аналитическая функция в рассматриваемом круге, разлагается в степенной ряд $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, который равномерно сходится на компактных подмножествах круга $|z| < R$. Вспомнив, что комплексное число z можно представить в виде $z = re^{i\theta}$ и подставив в формулу выше, получим

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta}, \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{2} a_n, & n > 0, \\ A_0 = \mathrm{Re} a_0, \\ A_n = \frac{1}{2} \tilde{a}_{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что любую функцию u, являющуюся гармонической в круге $|z| < R$ можно представить в виде степенного ряда,

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

равномерно сходящегося на компактных подмножествах этого круга.

2. Свойства гармонических функций. Пусть область D целиком содержится в пространстве E_n, ограничим эту область гладким контуром (границей) S и зададим две гармонические в этой области функции $u(x)$ и $v(x)$, которые будут непрерывны вместе со своими первыми производными в замкнутой области D.

Проинтегрируем по области D тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(v \frac{\partial u}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}) = 0.$$

Используя формулу Остроградского – Гаусса, получим

$$\int_S v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} dS_y = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau_x,$$

$$\int_S [v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}] dS_y = 0,$$

здесь под ν – подразумевается внешняя нормаль к S.

1) Свойство единственности гармонической функции. Предположим, что функция $u(x)$ в области D является гармонической, а также непрерывной в $D \cup S$, ее производная первого порядка обращается в нуль на границе S, тогда функция $u(x) = 0$ для всех $x \in D \cup S$

2) Пусть $u(x)$ является гармонической в D функцией, у которой производная первого порядка непрерывна в $D \cup S$. Пусть также производная по нормали $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$ обращается в нуль на границе S, тогда $u(x) = const$ для всех $x \in D$

3) Пусть $u(x)$ является гармонической в D функцией, у которой производная первого порядка непрерывна в $D \cup S$. Посчитаем интеграл по границе S от $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$, он будет равен нулю.

Ниже сформулируем очень важный результат, принцип экстремума.

Введем обозначение для верхней и нижней грани значений функции $u(x)$ в рассматриваемой области D, соответственно M и m. Тогда справедливо следующее утверждение, которое носит название принципа экстремума:

Утверждение. Гармоническая в области D функция $u(x)$, не равная постоянной, ни в одной точке не достигает своих максимума и минимума, т. е. M и m.

В частности, именно из этого принципа следует, что задача Дирихле не может иметь более одного решения.

3. Определение функции Грина. Как известно, гармоническая функция является решением краевой задачи для уравнения Лапласа. Будем рассматривать область D, границу которой обозначим S.

Определение. Будем называть функцию $G(x,\xi)$ двух точек x, ξ принадлежащих объединению D и S, функцией Грина, если она обладает следующими свойствами:

1) ее можно представить в виде суммы двух функций, где одна $E(x,\xi)$ является элементарным решением уравнения Лапласа, а вторая $g(x,\xi)$ гармоническая функция по $x \in D$ и по $\xi \in D$. Т. е.

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi).$$

2) если любая из точек x или ξ лежит на границе S рассматриваемой области D, то функция $G(x,\xi)$ обращается в нуль.

Приведем некоторые свойства функции Грина. Не трудно показать, что функция Грина всюду в рассматриваемой области неотрицательна. Действительно, возьмем точку ξ в рассматриваемой области, возьмем окрестность этой точки в виде шара достаточно малого радиуса $|y - \xi| \le \varepsilon$, далее, обозначим D_ε часть области D, лежащей вне окрестности точки ξ. Так как $\lim_{x \longrightarrow \varepsilon} = +\infty$, то при достаточно малом ε функция $G > 0$ в том случае, когда $|x - \xi| < \varepsilon$. Отсюда имеем, что на границе области D_ε функция Грина $G(x,\xi) \geqslant 0$ и согласно принципу экстремума, $G(x,\xi) \geqslant 0$ для всех точек x принадлежащих D.

Функция Грина обладает свойством симметричности относительно двух точек принадлежащих области.

Для доказательства этого свойства, необходимо взять эти две точки x и y. Взять шары достаточно малого радиуса ε с центром в этих точках, т. е. $d : |z-x| \le \varepsilon$ и $d' : |z-y| \le \varepsilon$, а затем вырезать их. Оставшуюся часть области обозначим D_ε.

Рассмотрим две функции $v = G(z,y)$ и $= G(z,x)$. Эти функции будут гармоничны в в области D вне шаров с центрами в x и y соответственно. Рассмотрим формулу

$$\int_S [v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}]dS_y,$$

где ν внешняя нормаль к S.

Тогда

$$\int_S [G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial \nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial \nu_z}]dS_z =$$
$$= (\int_C + \int_C{}')[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial \nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial \nu_z}]dS_z,$$

где ν_z – внешняя нормаль в точке z на S и на сферах $C : |z-x| = \varepsilon$, $C' : |z-y| = \varepsilon$. Как отмечалось выше, если z лежит на границе, то функция Грина равна нулю, т. е. получаем, что $G(z,x) = G(z,y) = 0$. В силу этого вышеприведенную формулу можно переписать как:

$$\int_C [G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial \nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial \nu_z}]dS_z = \int_{C'} [G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial \nu_z} - G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial \nu_z}]dS_z.$$

Теперь приняв во внимание равенства

$$G(z,x) = E(z,x) + g(z,x)$$

и

$$G(z,y) = E(z,y) + g(z,y)$$

где $g(z,x)$ и $g(z,y)$ – гармонические функции. Возьмем предел при $\varepsilon \to 0$ и получим, что $G(z,y) = G(z,x)$. Ч. т. д.

Когда функция Грина известна, формула

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)ds_\xi \tag{2}$$

дает решение задачи Дирихле в следующей постановке: ищется решение гармоническая в области D функция $u(x)$, непрерывная в $D \cup S$ и удовлетворяющая краевому условию

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D. \tag{3}$$

4. Решение задачи Дирихле для шара. В этом параграфе мы построим явную функцию Грина, в том случае, когда рассматриваемая область представляет собой шар и функция (2) удовлетворяет условию (3). Далее мы будем следовать изложенному в книгах [1, 5] материалу.

Пусть область D является шаром $|x| < 1$, а x и ξ внутренние точки этого шара. Точка $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|^2}$ симметрична точке ξ относительно сферы $S : |x| = 1$. Покажем, что функция Грина $G(x,\xi)$ задачи Дирихле для шара $|x| < 1$ имеет вид

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - E(|x|\xi, \frac{x}{|x|}). \tag{4}$$

Рассмотрим следующее выражение, которое преобразуем с помощью простых действий

$$\big||x|\xi - \frac{x}{|x|}\big| = [|x|^2|\xi|^2 - 2x\xi + 1]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \big||\xi|x - \frac{\xi}{|\xi|}\big| = |\xi|\big|x - \frac{\xi}{|\xi|^2}\big| = |x|\big|\xi - \frac{x}{|x|^2}\big|.$$

Рассмотрим функцию $g(x,\xi) = -E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right)$, которая является гармонической как по x, так и по ξ при $|x| < 1$ и $|\xi| < 1$.

В случае, когда $|\xi| = 1$ получим

$$|\xi - x| = [|x|^2 - 2x\xi + 1]^{\frac{1}{2}} = \Big||\xi|x - \frac{\xi}{|\xi|}\Big| = \Big||x|\xi - \frac{x}{|x|}\Big| \tag{5}$$

Таким образом, функция $G(x, \xi)$ из (4) является функцией Грина.

В случае $|\xi| = 1$ согласно (5), получим

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} = -\sum_{i=1}^{n}\{\frac{\xi_i(\xi_i - x_i)}{|\xi - x|^n} - |x|\frac{\xi_i(|x|\xi_i - \frac{x_i}{|x|})}{||x|\xi - \frac{x}{|x|}|^n}\} = -\frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}.$$

Формула (2) представима в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}\varphi(\xi)ds_\xi. \tag{6}$$

Последняя формула названа в честь Симеона Дени Пуассона. Эта формула была получена для единичного шара с центром в точке $x = 0$.

Пусть $u(x)$ гармоническая в шаре $|x| < R$ функция, является непрерывной в замкнутом шаре $|x| \le R$ и удовлетворяет краевому условию $\lim_{x\to y} u(x) = \varphi(y)$, $|x| < R$, $|y| = R$, тогда функция $v(z) = u(Rz)$ будет обладать теми же свойствами по отношению к шару $|z| \le 1$, а также удовлетворять краевому условию $\lim_{z\to t} v(z) = \varphi(Rt)$, $|z| < 1$, $|y| = 1$. Согласно (6), получим

$$v(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^n}\varphi(R\xi)ds_\xi,$$

то есть

$$u(x) = v(\frac{x}{R}) = \frac{1}{R\omega_n}\int_{|\xi|=t}\frac{R^2-|x|^2}{|R\xi - x|^n}R^{n-1}\varphi(R\xi)ds_\xi.$$

Сделав замену $y = R\xi$, получим

$$u(x) = \frac{1}{R\omega_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y - x|^n}R^{n-1}\varphi(y)ds_y. \tag{7}$$

Предположим в шаре $|x - x_0| < R$ функция $u(x)$ гармоническая, одновременно она непрерывная вплоть до границы шара, а также справедливо условие

$$\lim_{x\longrightarrow y} u(x) = \varphi(y), \quad |x - x_0| < R, \quad |y - x_0| = R.$$

В виду того, что функция $\omega(z) = u(z+x_0)$ гармонична в шаре $|z| < R$, непрерывна при $|z| \le R$ и выполнено следующее условие

$$\lim_{z\to t}\omega(z) = \varphi(t + x_0), \quad |z| < R, \quad |t| = R,$$

тогда в силу формулы (7) получим

$$\omega(x) = \frac{1}{R\omega_n}\int_{|t|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|t - z|^n}\varphi(t + x_0)ds_t.$$

Из последнего равенства получается формула Пуассона для шара $|x - x_0| < R$:

$$u(x) = \omega(x - x_0) = \frac{1}{R\omega_n}\int_{|\xi - x_0|=R}\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|\xi - x|^n}\varphi(\xi)ds_\xi. \tag{8}$$

При $x = x_0$ из формулы (8) имеем

$$u(x) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{|y-x|=R}u(y)ds_y.$$

Последнее равенство является формулой среднего.

5. Формула Пуассона в полярных координатах. В этом пункте опишем формулу Пуассона в полярных координатах.

«При $n = 2$:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos(\theta - \psi) + |x|^2}\varphi(\cos\psi, \sin\psi)d\psi,$$

где $x_1 = |x|\cos\theta$, $x_2 = |x|\sin\theta$, $\xi_1 = \cos\psi$, $\xi_2 = \sin\psi$.

При $n = 3$:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{(1 - 2|x|\cos(\gamma) + |x|^2)^{\frac{3}{2}}}\varphi \sin\theta d\psi,$$

где $\varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_1 = \sin\theta\cos\psi$, $\xi_2 = \sin\theta\sin\psi$, $\xi_3 = \cos\theta$, $|x|\cos\gamma = x\xi$.»

6. Проверка краевых условий. В этом параграфе нам нужно проверить, что функция, заданная формулой Пуассона, удовлетворяет краевому условию (3). Это будет означать, что $u(x)$ является решением задачи Дирихле в рассматриваемой постановке.

В этом параграфе ограничимся лишь случаем, когда $n = 2$.

Зафиксируем произвольную точку x_0 на окружности $|x| = 1$, очевидно, что $u(x) = 1$ является гармонической функцией, для которой выполнено краевое условие

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} u(x) = 1, \quad |x| < 1.$$

Тогда для всех точек x в круге $|x| < 1$ из формулы (6) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|\xi - x|^2} d\psi = 1, \quad \xi_1 = \cos\psi, \quad \xi_2 = \sin\psi. \tag{1}$$

На основании формул (6) и (1) имеем

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|\xi - x|^2}[\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)]d\psi, \quad |x| < 1. \tag{2}$$

Заметим, что функция φ является равномерно непрерывной на окружности $|x| = 1$. В силу этого можно написать следующее:

$$\forall\ (\varepsilon > 0)\ \exists(\delta > 0)\ \ \forall\psi,\ \psi_0,\ \ \xi_1 = \cos\psi,\ \ \xi_2 = \sin\psi,\ \ x_{10} = \cos\psi_0,\ \ x_{20} = \sin\psi_0 :$$

$$|\psi - \psi_0| < \delta$$

справедливо неравенство

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Формулу (2) перепишем как:

$$u(x) - \varphi(x_0) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta} \frac{1 - |x|^2}{|\xi - x|^2}[\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)]d\psi,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\psi_0-\delta} + \int_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1 - |x|^2}{|\xi - x|^2}[\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)]d\psi,$$

Используя (1) и (3) имеем $I_1 < \varepsilon$.

Теперь выберем $\delta(\varepsilon)$ достаточно малыми возьмем x очень близкий к x_0 так, что было справедливо следующее:

$$\left(\int_0^{\psi_0-\delta} + \int_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1 - |x|^2}{|\xi - x|^2}d\psi < \frac{\pi\varepsilon}{M}, \quad M = \max_{0\le\psi\le 2\pi}|\varphi(\xi)|,$$

т. е. $|I_2| < \varepsilon$. Следовательно,

$$|u(x) - \varphi(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Последнее означает, что выполнено

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad |x| < 1, \quad |x_0| = 1.$$

7. Формула Пуассона. Формулу (1) можно записать в другом виде, а именно

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta - t)}dt.$$

Заметим, что сумма геометрической прогрессии при $0 \le r < 1$ равна:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\varphi} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}.$$

Тогда

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} dt.$$

Подынтегральный множитель обозначим $P_r(\theta)$, он равен

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}.$$

Он называется ядром Пуассона для круга $\{|z| < 1\}$.

8. Представление Пуассона для гармонических функций. Нам дано, что функция u гармонична в круге $|z| < 1$ и что в нем она может быть описана с помощью формулы Пуассона.

Теорема. Пусть нам дана гармоническая в круге функция $u(z)$, и пусть $p > 1$. Также предположим, что средние при $r < 1$ ограничены

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Тогда существует такая функция F принадлежащая пространству $L^p(-\pi, \pi)$, что для $r < 1$, и $\theta \in [-\pi, \pi]$ справедлива формула

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} F(t) dt.$$

Доказательство. Как известно пространство L^p, при $p > 1$ сопряженно с пространством L^q, где показатели p и q удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Заметим, что для функций $u_n(\theta) = u((1 - \frac{1}{n})e^{i\theta})$ получим: $\| u_n \|_p \le C$.

Следовательно, используя канторовский диагональный процесс, мы можем выделить из них подпоследовательность u_{n_j}, такую, что для всех функций G, пробегающих некоторое счетное всюду плотное подмножество пространства L^p, существует предел

$$LG = \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} G(\theta) u_{n_j}(\theta) d\theta.$$

Учитывая, что

$$\| u_{n_j} \|_p \le C,$$

можно заключить, что предел LG существует для всех $G \in L^q$.

А также очевидно, что LG является ограниченным линейным функционалом на L^q. Из всего сказанного выше, и учитывая, что пространство L^p сопряжено с пространством L^q, следует, существование такой функции F, принадлежащей L^p, что

$$LG = \int_{-\pi}^{\pi} G(\theta) F(\theta) d\theta.$$

для всех G принадлежащих пространству L^q.

Далее, рассмотрим функции $u_n(z) = u((1 - \frac{1}{n})z)$, которые для каждого n гармоничны в круге

$$\{|z| < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\}.$$

Если выполнено условие $r < 1$, то

$$u_{n_j}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u_{n_j}(e^{it}) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u_{n_j}(t) dt.$$

Возьмем произвольное r в промежутке $r < 1$, затем выберем любое θ и $G(t) = P_r(\theta - t)$, $G \in L^q$. В этом случае получим с одной стороны следующее равенство

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u_{n_j}(t) dt = LG.$$

С другой стороны, справедливо

$$LG = \int_{-\pi}^{\pi} G(t)F(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)F(t)dt.$$

Отсюда выводим, что

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} 2\pi u_{n_j}(re^{i\theta}) = 2\pi u(re^{i\theta}),$$

где $F \in L^p$. Ч. т. д.

Замечание. Тот же результат справедлив без изменения доказательства и при $p = \infty$, если изменить совсем чуть чуть формулировку теоремы, а именно:

Теорема. Пусть нам дана функция u – ограниченная гармоническая функция в круге с радиусом меньше 1, то существует функция F принадлежащая пространству $L^\infty(-\pi, \pi)$ такая, что

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} F(t)dt.$$

9. Решение задач.

Задача 1. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < 2, \\ u\big|_{|z|=2} = \frac{2\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}. \end{cases}$$

Решение. Будем вычислять по формуле (7). Положим $\xi = 2e^{it}$, тогда простые вычисления дают нам

$$\sin t = \frac{1}{2i}(\frac{\xi}{2} - \frac{2}{\xi}), \;\; \cos t = \frac{1}{2}(\frac{\xi}{2} + \frac{2}{\xi}).$$

Следовательно, граничную функцию $u(\xi)$ можно записать в виде

$$u(\xi) = \frac{2\sin\varphi}{5 + 3\cos\varphi} = \frac{2 * \frac{1}{2i}(\frac{\xi}{2} - \frac{2}{\xi})}{5 + 3 * \frac{1}{2}(\frac{\xi}{2} + \frac{2}{\xi})} = \frac{2 * \frac{1}{2i} * \frac{\xi^2 - 4}{2\xi}}{5 + \frac{3}{2}(\frac{\xi}{2} + \frac{2}{\xi})} =$$

$$= \frac{2}{i} \frac{\xi^2 - 4}{3\xi^2 + 20\xi + 12} = \frac{\xi^2 - 4}{3(\xi + 6)(\xi + \frac{2}{3})}.$$

Вычислим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \frac{2(\xi^2 - 4)(\xi + z)}{i * 3(\xi + 6)(\xi + \frac{2}{3})(\xi - z)\xi} d\xi,$$

причем окружность $|z| = 2$ ориентирована против часовой стрелки.

Найдем особые точки нашей подынтегральной функции $F(\xi)$ в области $|\xi| > 2$.

Очевидно, что это $\xi = -6$ полюс первого порядка, а также устранимая особенность в точке $\xi = \infty$. Воспользуемся теоремой Коши о вычетах для расширенной комплексной плоскости.

$$J = -\underset{\xi=-6}{res} F(\xi) - \underset{\xi=\infty}{res} F(\xi).$$

Посчитаем вычет в точке $\xi = -6$:

$$\underset{\xi=-6}{res} F(\xi) = \frac{2}{3i} * \frac{32}{(\frac{-16}{3})} * \frac{z - 6}{(z + 6) * 6} = -\frac{4}{i} * \frac{z - 6}{(z + 6) * 6} = \frac{2}{3i} * \frac{6 - z}{6 + z}.$$

Перейдем ко второй точке и разложим функцию $F(\xi)$ в окрестности точки $\xi = \infty$:

$$F(\xi) = \frac{2}{3i} * \frac{(1 - \frac{4}{\xi^2})(1 + \frac{z}{\xi})}{(1 + \frac{6}{\xi})(1 + \frac{2}{3\xi})} * \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} * \frac{1}{\xi} = \frac{2}{3i} * \frac{1}{\xi} + \ldots$$

Отсюда

$$\underset{\xi=\infty}{res} F(\xi) = -\frac{2}{3i}.$$

Значит,

$$J = \frac{2}{3i} * \frac{6 - z}{6 + z} + \frac{2}{3i} = \frac{2}{3i} * \frac{2z}{z + 6} = \frac{4z}{3i(z + 6)} =$$

$$= \frac{4}{3i} * \frac{x+iy}{6+x+iy} = \frac{4}{3i} * \frac{(x+iy)(6+x-iy)}{(6+x)^2+y^2},$$

отсюда получаем, что

$$ReJ = \frac{8y}{36+12x+x^2+y^2},$$

или

$$ReJ = \frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}.$$

Задача 2. Найти гармоническую с полуплоскости $y > 0$ функцию $u(x, y)$, если известно, что

$$u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Решение. Заметим, что для решения задачи, нам необходимо вычислить следующий интеграл:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)[(t-x)^2+y^2]}dt.$$

Заметим, что для вычисления интеграла целесообразно, воспользоваться теорией вычетов, а именно, следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)[(t-x)^2+y^2]}dt = 2\pi i[resf(i) + resf(x+iy)],$$

где

$$f(z) = \frac{z}{(1+z^2)[(z-x)^2+y^2]}.$$

В виду того, что

$$resf(i) = \frac{1}{2[(i-x)^2+y^2]},$$

$$resf(x+iy) = \frac{x+iy}{2iy[1+(x+iy)^2]},$$

то

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)[(t-x)^2+y^2]} = \frac{iy}{(i-x)^2+y^2} + \frac{x+iy}{1+(x+iy)^2} =$$

$$= \frac{iy}{[(i-x)+iy][(i-x)-iy]} + \frac{x+iy}{(1+x+iy)(-1+x+iy)} =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{i-x-iy} - \frac{1}{i-x+iy}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{x+iy-1} + \frac{1}{x+iy+1}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{i(1-y)-x} - \frac{1}{i(1+y)-x} + \frac{1}{x+i(y-1)} + \frac{1}{i(1+y)+x}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{i(1+y)+x} - \frac{1}{i(1+y)-x}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{x-i(1+y)}{x^2+(1+y)^2} + \frac{x+i(1+y)}{x^2+(1+y)^2}] = \frac{x}{x^2+(1+y^2)}.$$

Таким образом мы получили решение задачи, которое представимо в виде:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+(1+y^2)}.$$

Заключение. При исследовании мною был изучен различный материал (статьи, журналы, книги), которые находятся в разделе список литературы. В настоящей статье собраны и представлены основные определения и теоремы. Важные теоремы приводятся с доказательством.. Основной акцент в работе делается изучение гармонических функции и применении их свойств для решения краевой задачи Дирихле. Приводится подробное решение поставленных задач.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. 1977. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие для вузов. М., Наука, 224.
2. Бойков, В.А., Жибер А. В. 2012. Уравнения математической физики. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 254.
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Физматлит, 400. ISBN 5-9221-0310-5.
4. Годунов, С. К. 1971. Уравнения математической физики. М., Наука, 416.
5. Горн И. 1938. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными / Пер. с нем. М. С. Горнштейна. М., 272.
6. Грищенко, А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. 1986. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. К., Вища шк. Головное издательство,336.
7. Курант Р. 1964. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т. Д. Вентцель; под редакцией О. А. Олейник. М., Мир, 832.
8. Михлин С. Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных: учебное пособие для вузов. - Москва, Высшая школа, 431.

Поступила в редакцию 24.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кравченко Алексей Владимирович – магистрант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию