Интеграл Стилтьеса

Новиков И. А.
goga-novikov.10@inbox.ru

Аннотация. Интеграл Стилтьеса представляет собой важное обобщение определённого интеграла Римана, позволяющее учитывать структуру функции роста. В данной статье рассматриваются математическое определение, основные свойства и условия существования интеграла Стилтьеса, а также его связь с интегралами Лебега и Римана. Приведены примеры вычислений и прикладные аспекты использования.

Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, вариация функции, теория меры, интеграл Лебега, функции роста, дискретная мера

Для цитирования: Новиков И. А. 2025. Интеграл Стилтьеса. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 158–163.

---

1. Введение. Интеграл Стилтьеса играет важную роль в современной математике и её приложениях, особенно в анализе, теории вероятностей и физике. Он обобщает классическое представление об интеграле, позволяя учитывать изменение величины не просто по равномерной шкале, но и по сложной функции, демонстрирующей структуру изменения. Это означает, что интеграл Стилтьеса удобен для описания процессов с резкими переходами, разрывами и распределёнными характеристиками. Такой подход важен в задачах, где необходимо учитывать вес, меру или плотность, зависящие от положения, времени или других факторов. Он применяется при расчёте математических ожиданий, моделировании распределённых масс и построении теорий интегрирования в обобщённых пространствах.

2. Общая характеристика интеграла Стилтьеса. Интеграл Стилтьеса является обобщением определённого интеграла Римана [4], в котором подынтегральная функция интегрируется по функции роста $g(x)$, а не по аргументу x. Это позволяет учитывать скачки и особенности функции роста, что делает его полезным в теории вероятностей, функциональном анализе и прикладных задачах.

Если $g(x)$ — ступенчатая или сингулярная функция, интеграл Стилтьеса может интерпретироваться как сумма с весами, отражающими изменение функции $g(x)$.

3. Существование интеграла. Интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ существует, если:

1. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x)$ — функция ограниченной вариации;
2. $g(x)$ монотонна, а $f(x)$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва.

4. Вариационные ограничения. Вариация функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$V_a^b(g) = \sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| < \infty,$$

где супремум берётся по всем разбиениям $[a,b]$.

Такие ограничения важны в механике и экономике, где интеграл может выступать как функционал, определяемый на допустимом множестве функций, удовлетворяющих физическим или экономическим условиям.

5. Свойста интеграла Стилтьеса.

1. Линейность:
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta h(x))\,dg(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dg(x) + \beta \int_a^b h(x)\,dg(x).$$

2. Аддитивность по промежутку:
$$\int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

3. Интеграл по ступенчатой функции:
$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

4. Сведение к интегралу Римана: если $g(x) = x$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. Ступенчатая функция. Функция $g(x)$ называется ступенчатой на $[a, b]$, если

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

и $g(x) = c_i$ на каждом (x_{i-1}, x_i). В этом случае:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Ступенчатые функции удобны для построения численных алгоритмов вычисления интегралов.

7. Ключевые теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$, а $g(x)$ – функция ограниченной вариации. Тогда интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ существует* [5].

Доказательство. По теореме Жордана, любую функцию $g(x)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ можно представить как разность двух монотонно неубывающих функций $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, где g_1, g_2 – монотонно неубывающие. Поскольку $f(x)$ непрерывна, и g_1, g_2 монотонны, по известному результату интегралы Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)\,dg_1(x), \quad \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

существуют. Тогда по линейности:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,d(g_1(x) - g_2(x)) = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int_a^b f(x)\,dg_2(x),$$

и этот интеграл существует.

Теорема 1.2. *Если $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва на $[a, b]$, а $g(x)$ монотонно возрастает, то интеграл Стилтьеса также существует* [3].

Доказательство. Так как $f(x)$ имеет лишь конечное число разрывов, а $g(x)$ – монотонно возрастает, то $f(x)$ ограничена и непрерывна почти всюду.

Из общей теории интеграла Римана – Стилтьеса: если $g(x)$ – функция ограниченной вариации (в частности, монотонная), а $f(x)$ ограничена и непрерывна почти везде, то интеграл Стилтьеса существует.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

существует.

Теорема 1.3. *Пусть $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — непрерывно дифференцируемое отображение, тогда:*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,dg(\phi(t)).$$

Доказательство. Пусть $h(t) := g(\phi(t))$. Так как ϕ – непрерывно дифференцируемая, а g — функция ограниченной вариации, то $h(t)$ также функция ограниченной вариации.

Рассмотрим замену переменной $x = \phi(t)$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,d(g(\phi(t))) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,dh(t).$$

Таким образом, замена переменной сохраняет значение интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,dg(\phi(t)).$$

Теорема 1.4. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то:*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Доказательство. По определению интеграла Стилтьеса, рассмотрим разбиение $[a, b]$ на отрезки и сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) \right],$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сложив и применив телескопическое правило:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) \right] \to f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

при предельном переходе сумма стремится к соответствующим интегралам. Следовательно:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

8. Связь с другими интегралами. Интеграл Стилтьеса можно рассматривать как промежуточное звено между интегралом Римана и более общим интегралом Лебега. Если функция $g(x)$ определяет меру, то интеграл Стилтьеса становится аналогом интеграла Лебега по мере, порождённой $g(x)$. В теории вероятностей данный интеграл используется для вычисления математического ожидания случайной величины по функции распределения:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x),$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X [3].

Кроме того, интеграл Стилтьеса используется в различных прикладных задачах, таких как вычисление моментов распределённой массы. Примером может служить задача, где требуется выразить момент инерции распределённой массы, при этом интеграл Стилтьеса позволяет точно выразить приращение момента массы как сумму, зависящую от значений массы и положения [1].

Также важным аспектом является геометрическая интерпретация интеграла Лебега – Стилтьеса, который рассматривается как мера подграфика функции в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Это даёт возможность описывать объёмы над произвольными функциями, интегрируемыми не по длине отрезка, а по общей мере, что делает его полезным инструментом для работы с функциями, принимающими бесконечные значения или имеющими разрывы [2].

Таким образом, интеграл Стилтьеса позволяет гибко учитывать структуру аргумента и применять его в различных задачах, от теории меры до прикладных моделей.

9. Мера Лебега – Стилтьеса и интеграл Лебега – Стилтьеса.

1. Определение меры Лебега-Стилтьеса. Пусть задана монотонно неубывающая функция F на отрезке $[a, b]$, непрерывная слева. С помощью функции F можно построить меру μ_F на подмножествах $[a, b]$ по формулам:

$$\mu_F((a, B)) = F(B) - F(a+0), \mu_F([a, B]) = F(B+0) - F(a),$$
$$\mu_F((a, B]) = F(B+0) - F(a+0), \mu_F([a, B)) = F(B) - F(a),$$

где $B \in [a, b]$. Расширяя эту меру на σ-алгебру измеримых множеств с помощью лебегового продолжения, получаем *меру Лебега – Стилтьеса.*

2. Частные случаи меры Лебега – Стилтьеса.

- Дискретная мера. Если F – ступенчатая функция с точками скачков $\{x_i\}$, где величина скачка в x_i равна h_{x_i}, то мера любого измеримого множества A задаётся суммой скачков в точках $x_i \in A$:

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_{x_i}.$$

- Абсолютно непрерывная мера. При условии, что F абсолютно непрерывна с производной $f = F'$, мера задаётся интегралом $\mu_F(A) = \int\limits_A f(x)\,dx$, совпадая с классической мерой Лебега.

- Сингулярная мера. Если F – сингулярная функция (например, канторова), то мера сосредоточена на множестве с нулевой мерой Лебега и полностью концентрируется на «особых» точках, где функция F изменяется.

3. Разложение меры Лебега – Стилтьеса. Любая монотонная функция F допускает разложение (с точностью до константы) на сумму трёх компонент: $F = F_{\text{дискретная}} + F_{\text{абсолютно непрерывная}} + F_{\text{сингулярная}}$, что порождает аналогичное разложение меры μ_F.

4. Интеграл Лебега – Стилтьеса. Для функции f и меры μ_F, порождённой F, определяется интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dF(x).$$

Этот интеграл объединяет и обобщает классические интегралы и допускает следующие частные случаи:

- Дискретный случай. Если F – ступенчатая функция с точками скачков x_i, то

  $$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_{x_i} f(x_i)\Delta F(x_i),$$

  где $\Delta F(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ – величина скачка.

- Абсолютно непрерывный случай. Если F дифференцируема почти всюду с производной F', то интеграл совпадает с интегралом Лебега:

  $$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx.$$

- Общий случай. Для разложения $F = v - g$, где v и g — монотонные функции с ограниченным изменением,

  $$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,dv(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Это позволяет расширить интеграл на функции с более сложными свойствами, включая скачки и сингулярности.

10. Решение задач.

Задача 1. Пусть $f(x) = x$, а $g(x)$ – ступенчатая функция, заданная на отрезке $[0, 3]$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 2, & 1 \le x < 2, \\ 4, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

В силу того, что $g(x)$ – ступенчатая функция, интеграл Стилтьеса превращается в сумму:

$$\int_0^3 x\,dg(x) = \sum_{i=1}^{3} f(c_i) \cdot \Delta g_i.$$

Разбиение отрезка: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Возьмём $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Изменения функции $g(x)$: $\Delta g_1 = g(1) - g(0) = 2 - 1 = 1$, $\Delta g_2 = g(2) - g(1) = 4 - 2 = 2$, $\Delta g_3 = g(3) - g(2) = 4 - 4 = 0$. Тогда:

$$\int_0^3 x\,dg(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 1 + 4 + 0 = 5.$$

Таким образом, интеграл Стилтьеса по ступенчатой функции равен 5, и этот пример иллюстрирует вычисление через конечную сумму (одно из свойств, приведённых ранее).

Задача 2. Пусть $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^2$, интервал интегрирования $[1, 2]$. Обе функции непрерывны и дифференцируемы на данном отрезке, следовательно, можно применить формулу интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

В нашем случае $f(2)g(2) = \ln(2) \cdot 4$, $\quad f(1)g(1) = \ln(1) \cdot 1 = 0$. Рассчитаем левую часть:

$$\int_1^2 \ln(x)\,d(x^2) = \int_1^2 \ln(x) \cdot 2x\,dx.$$

Вычислим:

$$\int_1^2 2x\ln(x)\,dx.$$

Интегрируем по частям: $u = \ln(x)$, $\quad dv = 2x\,dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$, $\quad v = x^2$.

$$\int 2x\ln(x)\,dx = x^2\ln(x) - \int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = x^2\ln(x) - \int x\,dx = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Подставим пределы:

$$\left[x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = (4\ln 2 - 2) - (1\cdot\ln 1 - \frac{1}{2}) = 4\ln 2 - 2 + \frac{1}{2} = 4\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

Теперь проверим формулу:

$$\int_1^2 \ln(x)\,d(x^2) + \int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \ln(x)\,d(x^2) + \int_1^2 x\,dx.$$

Ранее мы получили:

$$\int_1^2 \ln(x)\,d(x^2) = 4\ln 2 - \frac{3}{2}, \quad \int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Сумма: $4\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 4\ln 2 = f(2)g(2)$, как и должно быть.

Таким образом, формула интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса успешно подтверждена на конкретном примере.

Задача 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1, \\ 3, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

и функцию $g(x) = x^2$, непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,2]$. Интеграл Стилтьеса

$$I = \int_0^2 f(x)\,dg(x)$$

в данном случае сводится к интегралу Римана

$$I = \int_0^2 f(x)g'(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cdot 2x\,dx,$$

что следует из теоремы о замене интеграла Стилтьеса на интеграл Римана при дифференцируемой функции g. Вычислим по частям:

$$I = \int_0^1 2\cdot 2x\,dx + \int_1^2 3\cdot 2x\,dx = 4\int_0^1 x\,dx + 6\int_1^2 x\,dx.$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$4\int_0^1 x\,dx = 4\cdot\frac{1^2}{2} = 2, \quad 6\int_1^2 x\,dx = 6\cdot\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 6\cdot\frac{3}{2} = 9,$$

следовательно,

$$I = 2 + 9 = 11.$$

Таким образом, интеграл Стилтьеса для кусочно-постоянной функции f и гладкой функции g сводится к вычислению интегралов Римана на соответствующих интервалах.

Задача 4. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ и ступенчатую функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 5, & x \ge 1. \end{cases}$$

Интеграл Стилтьеса

$$I = \int_0^2 f(x)\,dg(x)$$

определяется скачком функции g в точке $x = 1$, так как вне точек разрыва интеграл не изменяется. По определению интеграла Стилтьеса,

$$I = \sum_i f(c_i)\cdot\Delta g(c_i),$$

где $\Delta g(c_i)$ – величина скачка функции g в точке c_i. Здесь единственный скачок в точке $x = 1$ равен 5, поэтому

$$I = f(1) \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5.$$

Данный пример подчеркивает важность учета точек разрыва функции g при вычислении интеграла Стилтьеса.

Задача 5. Пусть X – дискретная случайная величина с распределением

$$P(X = 1) = 0.4, \quad P(X = 2) = 0.6.$$

Функция распределения F задана как

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.4, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$ можно выразить через интеграл Стилтьеса:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x).$$

Поскольку F — ступенчатая функция с скачками в точках 1 и 2, интеграл сводится к сумме:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot (0.4 - 0) + 2 \cdot (1 - 0.4) = 0.4 + 1.2 = 1.6.$$

Этот пример показывает практическое применение интеграла Стилтьеса в теории вероятностей и статистике, а именно при вычислении математического ожидания через функцию распределения.

Заключение. Интеграл Стилтьеса, предоставляет собой инструмент анализа функций, характеризующихся скачками, разрывами или иными особенностями поведения. В рамках проведённого исследования были систематизированы основные свойства и теоремы, определяющие поведение интеграла Стилтьеса, включая условия существования, линейность, аддитивность и формулы преобразования.

Проведённый сравнительный анализ интегралов Стилтьеса, Римана и Лебега позволил заметить их взаимосвязь и разграничить области применимости каждого из них. Расчёты на примерах ступенчатых и непрерывных функций подтвердили практическую реализуемость теоретических результатов. Отдельное внимание уделено приложениям интеграла Стилтьеса в теории вероятностей и математической физике, где его использование оказывается особенно уместным.

Полученные результаты подчёркивают как теоретическую , так и прикладную значимость интеграла Стилтьеса, особенно в задачах анализа, требующих учёта особенностей функции роста или меры. Это делает данный инструмент актуальным для дальнейших исследований в области анализа, теории меры и смежных дисциплин.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Гливенко В. И. 1936. Интеграл Стильтьеса. М., Изд-во АН СССР, 76.
2. Камке Э. 1959. Интеграл Лебега-Стилтьеса. М., Физматлит, 160.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Математический анализ. М., Наука, 512.
4. Фихтенгольц Г. М. 2004. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3. С.-П., Лань, 608.
5. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. 1967. Интеграл, мера и производная. М., Наука, 400.

Поступила в редакцию 24.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Новиков Игорь Андреевич – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию