Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 151–157.

Теория меры

Банных А. И.
1758979@bsuedu.ru

Аннотация. Функциональный анализ и теория меры — сложные математические дисциплины, требующие высокого уровня абстрактного мышления и глубокого понимания базовых концепций. В статье мы рассматриваем базовые понятия такие как мера Жордана и мера Лебега.

Ключевые слова: мера Жордана на плоскости, измеримые множества, мера Лебега

Для цитирования: Банных А. И. 2025. Теория меры. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 151–157.

1. Введение. Что мы подразумеваем по словом мера? Мера – это единица измерения чего -либо. Например мерой отрезка является длина, мерой плоской фигуры площадь, объем тела и т.д. Из школьного курса мы знаем формулы для определения площади различных фигур, однако нет единого определения. Возникает желание объединить все эти величины в одну абстрактную математическую концепцию.

2. Мера Жордана на плоскости. Вспомним, как в курсе математического анализа вводится интеграл [1]-[3]. Мы рассматриваем функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разбивается на части $[x_k, x_{k+1}]$ длинной $\triangle x_k$. Затем в каждом таком отрезке берем точку $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ и вычисляем значение функции, т.е. находим $f(\xi_k)$.

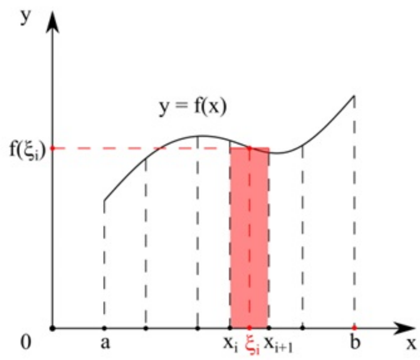

Рис. 1. Построение интеграла Римана

Далее составляется интегральная сумма:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k.$$

Интегралом Римана называется предел (если он существует) интегральных сумм при стремлении длины разбиения $\triangle = \sup \triangle x_k$ к нулю по всем k:

$$I = \lim_{n ß\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Однако, не все функции интегрируемы, так например, функция Дирака:

$$\delta = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

В сколь угодно малом отрезке есть точки и с рациональными координатами и с иррациональными. Если выбирать в качестве ξ_k точки с рациональными координатами, то интеграл будет равен $(b - a)$? а если с иррациональными – то будет равен нулю. Т. е. существуют целые классы функций с которыми мы не можем полноценно работать.

Рассмотрим еще одно понятие площади по Жордану из курса математического анализа. На плоскости возьмем произвольное множество A, рассмотрим все всевозможные описанные P и вписанные Q многоугольники. Предполагаем, что площади S многоугольников нам известны. Заметим, что $S(Q) \leqslant S(P)$.

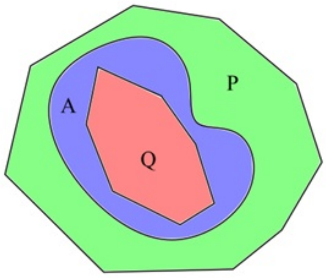

Рис. 2. Многоугольники

Рассмотрим верхнюю и нижнюю площади:

$$\overline{S} = \inf_P S(P), \quad \underline{S} = \inf_Q S(Q).$$

Очевидно, что $\overline{S} \geqslant \underline{S}$. Если $\overline{S} = \underline{S} = S$, то говорят, что множество A квадрируемо по Жордану и имеет площадь S.

Таким образом мы приходим к тому, что появляется необходимость нахождения другого подхода к подсчету площади, объемов и т.д.

2. Измеримые множества. Используемые в дальнейшем определения и теоремы можно найти в книгах [1]-[5]. На плоскости (x, y) рассмотрим множества, заданные следующими неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a < x < b$ и одним из неравенств вида $c \leqslant y \leqslant d$, $c \leqslant y < d$, $c < y \leqslant d$, $c < y < d$, где a, b, c, d – произвольные числа.

Определение 2.1 *Множества принадлежащие системе выше будем называть прямоугольниками.*

Рассмотрим множество, определенное следующей парой неравенств

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d.$$

Это множество содержит все свои предельные точки, которые образуют ее границу.

Определение 2.2 *Прямоугольник вместе с границей будем называть замкнутым многоугольником.*

В зависимости от соотношений между a, b, c, d будут различные множества. Так, например, при $a < b,\ c < d$ получаем прямоугольник в обычном смысле. При $a = b$ и $c < d$ или $a < b$ и $c = d$ получаем отрезок, при $a = b, \quad c = d$ - точку, и пустое множество при $a > b$ и $c > d$.

Определение 2.3 *Открытым прямоугольником будем называть прямоугольник, который удовлетворяет строгим неравенствам.*

Соответственно, в зависимости от соотношений между a, b, c, d будет либо прямоугольник без границы, либо пустое множество.

Если прямоугольник удовлетворяет смешанным неравенствам, то такие прямоугольники назовем полуоткрытыми, либо интервал, полуинтервал, пустое множество.

Класс всех прямоугольников на плоскости назовем G.

Обозначим меру прямоугольника P из G через $m(P)$ и поставим в соответствие каждому прямоугольнику число $m(P)$ – его меру при выполнении следующих условий:

1. мера $m(P)$ прямоугольника принимает действительные неотрицательные значения;

2. мера $m(P)$ обладает свойствами аддитивности, т. е. если прямоугольник P состоит из конечного числа прямоугольников P_k, и их попарное пересечение равно пустому множеству, то мера

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k), \quad \text{при} \quad P_k \cap P_i = \emptyset, \quad k \neq i.$$

Определение 2.4 *Плоское подмножество будем называть элементарным, если существует хотя бы один способ, которым можно представить множество в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.*

Теорема 2.1 *Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также является элементарным множеством.*

Доказательство. Очевидно, что пересечение двух прямоугольников есть снова прямоугольник. Поэтому, если

$$A = \bigcup_k P_k, \quad B = \bigcup_j Q_j,$$

есть два элементарных множества, то их пересечение

$$A \cap B = \bigcup_{k,j} (P_k \cap Q_j)$$

есть элементарное множество.

Разность двух прямоугольников есть, как легко проверить элементарное множество. Следовательно, вычитая из прямоугольников некоторое элементарное множество, мы снова получим элементарное множество (как пересечение элементарных). Пусть теперь множества A и B - элементарные. Найдется, очевидно, прямоугольник P, содержащий каждое из них. Тогда множество

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

в силу сказанного выше будет элементарным.

Отсюда из равенства

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B),$$

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

следует, что разность и симметрическая разность элементарных множеств являются элементарными множествами. ч.т.д.

Рассмотрим множество, состоящее из объединения попарно непересекающихся прямоугольников P_k

$$A = \bigcap_{k} P_k,$$

тогда мера $m'(A)$ вычисляется следующим образом

$$m'(A) = \sum_{k} m(P_k).$$

Перечислим свойства меры.

Утверждение 2.1 *Мера $m'(A)$ не зависит от способа разложения A в сумму конечного числа прямоугольников.*

Доказательство. Пусть существуют два разложения множества A, а именно

$$A = \bigcup_{k} P_k$$

и

$$A = \bigcup_{j} Q_j,$$

где P_k и Q_j соответственно попарно непересекающиеся прямоугольники. Заметим, что пересечение двух прямоугольников $P_k \cap Q_j$ также прямоугольник, то в силу аддитивности меры для прямоугольников получаем

$$\sum_{k} m(P_k) = \sum_{k,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_{j} m(Q_j).$$

В частности, для прямоугольников мера m' совпадает с исходной мерой m. Очевидно, что мера элементарных множеств неотрицательна и аддитивна.

Теорема 2.2 *Если A – элементарное множество и $\{A_n\}$ – конечная или счетная система элементарных множеств такая, что*

$$A \subset \bigcup_{n} A_n,$$

$$m'(A) \leqslant \sum_{n} m'(A_n). \tag{1}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и данного A можно, очевидно, найти такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, которое содержится в A и удовлетворяет условию

$$m'(\overline{A}) \geq m'(A) - \varepsilon/2.$$

(Достаточно каждый из k составляющих A прямоугольников P_i заменить лежащим внутри него замкнутым прямоугольником с площадью большей, чем $m(P_i) - \varepsilon/(2k)$.) Далее, для каждого A_n можно найти открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$ и удовлетворяющее условию

$$m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Ясно, что
$$\overline{A} \subset \bigcup \widetilde{A}_n.$$
Из $\{\widetilde{A}_n\}$ можно (по лемме Гейне - Бореля) Выбрать конечную систему $\widetilde{A}_{n_1}, \widetilde{A}_{n_2}, \ldots \widetilde{A}_{n_s}$, покрывающую $\overline{A}$. При этом, очевидно,
$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i})$$
(так как иначе $\overline{A}$ оказалось бы покрыто конечным числом прямоугольников, суммарной площади меньшей, чем $m'(\overline{A})$, что невозможно.) Поэтому
$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \varepsilon/2 \leqslant$$
$$\sum_n m'(\widetilde{A}_n) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_n m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varepsilon/2 = \sum_n m'(A_n) + \varepsilon,$$
Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает утверждение теоремы. ч.т.д.

3. Лебегова мера плоских множеств. Далее будем рассматривать множества, целиком принадлежащие квадрату $E = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Определение 3.1 *Рассмотрим множество A, которое имеет множество различных покрытий конечными или счетными системами прямоугольников. Тогда число*
$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \sum_k m(P_k),$$
называется внешней мерой множества A.

Пусть A - элементарное множество, тогда нетрудно показать, что
$$\mu^*(A) = m'(A).$$

Теорема 3.1 Пусть нам дана конечная или счетная система множеств A_n. Если выполнено
$$A \subset \bigcup_n A_n,$$
то
$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$
В частности, если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

Доказательство.

Согласно определению внешней меры, для каждой конечной или счетной системы A_n найдется конечная или счетная система прямоугольников $\{P_{nk}\}$ и справедлива следующая оценка
$$\sum_k (P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n,$$
где $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Следовательно,
$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk},$$
$$\mu^(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Так как мы выбрали ε произвольно, то отсюда вытекает справедливость теоремы.

Определение 3.2 *Будем говорить, что множество A измеримо (в смысле Лебега), если для*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists B : \mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon,$$
где B – элементарное множество.

В дальнейшем мы будем обозначать μ меру Лебега на измеримых множествах.

Итак, мы взяли множество измеримых функций, ввели функцию μ, определили меру Лебега, таким образом получили некоторый класс L. Наша цель установить следующие факты:

- Доказать, что множество измеримых подмножеств X образует σ- алгебру на L.

- Доказать, что μ - это σ - аддитивная мера на σ - алгебре на L.
- Доказать, что все открытые множества измеримы.

Начнем с первого.

Лемма 3.1 Если $A \in L \quad \Rightarrow \quad (X \setminus A) \in L$.

Доказательство. То, что дополнение измеримого множества принадлежит множеству следует из равенства.

$$(X \setminus A) \vartriangle (X \setminus B) = A \vartriangle B.$$

Лемма 3.2 Если $A_n \in L, n = 1, 2...N \quad \Rightarrow \quad \cap A_n \in L, \cup A_n \in L$.

Доказательство. Докажем для случая, когда $N = 2$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $A_1,\ A_2 \in L$, т. е. измеримые множества, тогда $\exists\, B_1,\ B_2 \in G$: справедливо $\mu^*(A_i \vartriangle B_i) < \varepsilon/2$.

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2) \Rightarrow$$

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2)) \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2).$$

Так как $B_1 \cup B_2$ элементарное множество, следовательно $A_1 \cup A_2$ - измеримое множество. Для доказательства того, что пересечение двух измеримых множеств также измеримо, необходимо воспользоваться следующим равенством

$$A_1 \cap A_2 = X \setminus [(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)].$$

Следствие 3.1 Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримо.

Доказательство данного следствия вытекает из леммы 3.1 и леммы 3.2 и равенств $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$, и $A_1 \vartriangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

Доказав эти две леммы, мы доказали, что измеримые множества образуют алгебру.

Лемма 3.3 Пусть A и B любые измеримые множества, тогда справедливо следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B).$$

Доказательство. Очевидно, что для множеств A и B справедливо следующее включение

$$A \subset B \cup (A \vartriangle B), \quad B \subset A \cup (B \vartriangle A).$$

Отсюда следует

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

И если $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$, то справедливость леммы очевидна. В случае, когда $\mu^*(B) \geqslant \mu^*(A)$, то верно

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

Теорема 3.2 Пусть $A_1, ...A_n$ попарно непересекающиеся множества, тогда справедливо равенство

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Доказательство. Покажем для случая двух множеств. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно выбрано, возьмем два элементарных множества B_1 и B_2, так, чтобы выполнялось

$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \tag{2}$$

$$\mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{3}$$

Обозначим объединение множеств $A_1 \cup A_2 = A$ и $B_1 \cup B_2 = B$. Согласно лемме 3.2, множество A измеримо. По условию множества A_1 и A_2 не пересекаются, тогда справедливо вложение:

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2),$$

следовательно $m'(B_1 \cap B_2) \leqslant 2\varepsilon$. Вспоминая леммы 3.3 и неравенства (2) и (3), получаем

$$|\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon, \tag{4}$$

$$|\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon. \tag{5}$$

В силу аддитивности меры на совокупности элементарных множеств и из последних трех неравенств получаем

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Запишем следующее неравенство $\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \vartriangle B)$. Так как $A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$, тогда можно продолжить неравенство следующим образом:

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant m'(B) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Выбрав произвольно малое $\varepsilon > 0$, получим $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Согласно теореме 3.1 справедливо обратное неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Тогда окончательно получим, что $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Учитывая, что A_1, A_2 и A измеримы, то μ^* можно заменить на μ. ч.т.д.

Теорема 3.2 Сумма и пересечение счетного числа измеримых множеств- измеримые множества.

Доказательство. Возьмем счетную систему измеримых множеств A_n, $n \in N$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Рассмотрим множества $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Очевидно, что A'_n дизъюнктивный набор, а $\bigcup A'_n = A$.

То, что A'_n измеримы следует из теоремы 3.1 и следствия из нее. Тогда, используя теорему 3.2, и вспоминая определение внешней меры при любом конечном n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k) \leqslant \mu(A),$$

поэтому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k)$$

сходится и, следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что

$$\sum_{n>N} \mu(A'_k) < \varepsilon/2. \tag{6}$$

В силу того, что объединение $C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ измеримо, то найдется элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \vartriangle B) < \varepsilon/2 \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon,$$

таким образом A - измеримо.

В соответствии с соотношением

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

утверждения теоремы о пересечении множеств справедливы. ч.т.д.

Теорема 3.3. *Если $\{A_n\}$ - последовательность попарно непересекающихся множеств и $A = \bigcup_n A_n$, то*

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.2 при любом N

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N}) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A).$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{8}$$

С другой стороны, согласно теореме 3.2

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9) получается утверждение теоремы.

Теорема 3.4 Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – последовательность вложенных друг в друга измеримых множеств и $A = \bigcap\limits_n A_n$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $A = \emptyset$ (общий случай сводится к замене множества A_n на $A_n \setminus A$.) Каждое множество можно представить в виде

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots,$$

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \ldots,$$

причем слагаемые не пересекаются. Следовательно, в силу σ – аддитивности меры μ.

$$\mu(A_1) = \sum_{n=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \tag{10}$$

$$\mu(A_1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \tag{11}$$

Так как ряд (10) сходится, то его остаток (11) стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, $\mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$ ч.т.д.

Следствие 3.2 Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ возрастающая последовательность измеримых множеств и

$$A = \bigcup_n A_n,$$

то

$$\mu(A) = \lim_{n ß\infty} \mu(A_n).$$

Замечание. Всякое множество A, внешняя мера которого равна нулю, измеримо. Чтобы доказать необходимо положить $B = \emptyset$, тогда

$$\mu^*(A \vartriangle B) = \mu^*(A \vartriangle \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Заключение. При исследовании мною был изучен различный материал (статьи, журналы, книги), которые находятся в разделе список литературы. В настоящей статье собраны и представлены основные определения и теоремы. Важные теоремы приводятся с доказательством. Основной акцент в работе делается изучение понятия меры, меры Лебега.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. 1984. Функциональный анализ и интегральные уравнения. М., изд-во «Университетское», 350.
2. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. 1984. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск : Высш. шк., 216.
3. Балакришнан А.В. 1980. Прикладной функциональный анализ.Наука ГРФМЛ, 383.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа.М. : Наука, 543.
5. Коллатц Л., 1969. Функциональный анализ и вычислительная математика. Мир, 448 стр.

Поступила в редакцию 17.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Банных Алина Игоревна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию