Студенческий математический журнал, 2022 С. 34–36.

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. Самойлов

E-mail: 1466713@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается Гильбертово пространство, которое вводится как банахово, но снабжается скалярным произведением, что открывает новые возможности для построения математического аппарата, используемого для решения физических задач. Формулируются основные определения, теоремы, решаются некоторые задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор, компактный оператор

Благодарности: Работа выполнена при курировании научного руководителя Ковалевой Лидии Александровны.

Для цитирования: Самойлов С. А. 2022. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Студенческий математический журнал. 2022: 34–36.

---

1. Введение. Гильбертовые пространства возникают естественным образом и часто в математике и физике, обычно как бесконечномерные функциональные пространства. Самые ранние гильбертовы пространства изучались с этой точки зрения в первом десятилетии 20-го века Давидом Гильбертом, Эрхардом Шмидтом и Фриджесом Риссом. Они являются незаменимыми инструментами в теориях уравнений в частных производных, квантовой механике, анализе Фурье.

2. Основные определения.

Определение 1.1. *Обозначим X, Y линейные нормированные пространства. Оператор A, девствующий из пространства X в пространство Y, называется компактным, если выполнено:*

- *A- линейный оператор,*
- *A - переводит любое ограниченное множество в предкомпактное.*

Напомним, если замыкание множества компактно, то множество является предкомпактным. А также так как всякое прекомпактное множество ограничено, то можно сделать вывод, что компактный оператор переводит ограниченное множество в такое же, и, соответственно его можно считать ограниченным оператором.

В следующей теореме пространство Y будет банаховым.

Теорема 1.1. *(об усиленной непрерывности компактного оператора) Пусть оператор $A : X \to Y$ - компактный оператор, тогда из слабой сходимости сходимости последовательности x_n к x, следует сходимость $Ax_n \longrightarrow Ax$.*

Определение 1.2. *Линейный ограниченный оператор $A : X \longrightarrow Y$ называется конечномерным, если множество значений этого оператора является конечномерным подпространством в пространстве Y.*

Теорема 1.2. *(Критерий компактности)*

Пусть H - гильбертово пространство, $A : X \longrightarrow H$ - линейный ограниченный оператор, тогда A - компактен тогда и только тогда, когда его с любой точностью можно приблизить конечномерным оператором.

Теорема 1.3. *(Критерий регулярного значения)*

Пусть H - гильбертово пространство, оператор A, действующий из гильбертового пространства в гильбертово пространство является самосопряженным. Тогда регулярным значением оператора будет точка λ тогда и только тогда, когда $\forall x \in H \ \ \exists c > 0 : \quad \|Ax - \lambda x\| \leq c\|x\|$.

Теорема 1.4. *(о регулярных значениях самосопряженного оператора)*

Пусть H - гильбертово пространство, оператор A действующий из H в H является самосопряженным. Тогда числа $\lambda = \alpha + \beta i, \ \beta \neq 0$ являются исключительно регулярными значениями оператора A.

Теорема 1.5. *(О подпространстве компактных операторов) Пусть Y - банахово пространство, тогда множество компактных операторов, действующих из X в Y, является замкнутым линейным подпространством пространства линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.*

3. Решение задач.

Задача 2.1. Пусть задан интегральный оператор A, $A : L_2[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1]$. Оператор представлен в виде

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds.$$

Ядро оператора $k(t, s) \in L_2\Big([0, 1] \times [0, 1]\Big)$. Показать, что оператор A компактен.

Решение. Сначала вспомним теорему о плотности непрерывных функций. Эта теорема справедлива в L_p. Тогда можно заключить, что множество непрерывных функций является всюду плотным в $L_2\Big([0, 1] \times [0, 1]\Big)$. Отсюда следует, что можно найти сходящуюся последовательность $k_n(t, s) \longrightarrow k(t, s)$ в пространстве $L_2\Big([0, 1] \times [0, 1]\Big)$, значит рассматриваемый интеграл сходится к нулю:

$$\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t, s) - k(t, s)|^2 dsdt \longrightarrow 0.$$

Возьмем последовательность операторов, для которых выполнено равенство

$$A_n x(t) = \int_0^1 k_n(t,s)x(s)ds,$$

значит, операторы A_n компактны. Теперь покажем, что норма сходится к нулю $\| A - A_n \| \longrightarrow 0$. Для этого вспомним неравенство Гельдера:

$$|A_n x(t) - Ax(t)| = \left| \int_0^1 k_n(t,s)x(s)ds - \int_0^1 k(t,s)x(s)|ds \right| = \left| \int_0^1 (k_n(t,s) - k(t,s))x(s)ds \right|$$

$$\leq \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)||x(s)|ds \leq \left(\int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| x \|_{L_2[0,1]} .$$

Тогда

$$\| A_n x - Ax \|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |A_n x(t) - Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds \| x \|^2_{L_2[0,1]} dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \| x \|_{L_2[0,1]} \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 dsdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\| A_n - A \|_{L_2[0,1]} = \sup \frac{\| A_n x - Ax \|_{L_2[0,1]}}{\| x \|_{L_2[0,1]}} \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 dsdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $n \longrightarrow \infty$.

Тогда верно $\| A_n - A \| \longrightarrow 0$, отсюда верно следующее $A_n \rightrightarrows A$. Таким образом, мы получили, что оператор A является равномерным пределом последовательности компактных операторов. И вспоминая теорему о подпространстве компактных операторов, окончательно приходим к выводу, что A- компактен.

Задача 2.2. Пусть дан оператор умножения $Ax(t) = \varphi(t)x(t), \quad A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$. Найти функцию $\varphi \in C[a,b]$, такую, чтобы оператор A был компактным.

Решение. Заметим, что оператор A не будет компактным, если хотя бы в одной точке $t_0 \in [a,b]$ функция φ будет отлична от нуля.

Построим последовательность $(x_n(t))_{n=1}^{\infty} \in C[a,b]$ по принципу $x_n(t) = 0$ для $a \leq t \leq t_0 - \frac{1}{n}$ и $t_0 + \frac{1}{n} \leq t \leq b$ для $x_n(t_0) = \frac{1}{\varphi(t_0)}$, а на отрезках $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0]$ и $[t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$. Эта последовательность ограничена, функция $x_n(t)$- линейна.

Будем считать, что $(Ax_n(t))_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ – предкомпактное множество. Согласно теореме Асколи – Арцела это множество будет равностепенно непрерывно. Это означает, что выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [a,b] |t_1 - t_2| < \delta \forall n \in \mathbb{N} |Ax_n(t_1) - Ax_n(t_2)| < \varepsilon /$$

Последнее выполнено и для таких точек, если $t_1 = t_0, t_2 = t_0 + \frac{1}{n}$. Рассмотрим, для $|t_1 - t_2| = \frac{1}{n} < \delta$, начиная с некоторого номера N, и, начиная с этого же номера, $|Ax_n(t_1) - Ax_n(t_2)| < \varepsilon$. Однако,

$$|Ax_n(t_1) - Ax_n(t_2)| = |Ax_n(t_0) - Ax_n(t_0 + \frac{1}{n})| = |1 - 0| = 1,$$

следовательно, при $0 < \varepsilon < 1$, получаем противоречие. В силу проведенных выкладок, можно заключить, что рассматриваемый оператор ограниченное множество перевел в множество, не являющееся предкомпактным. Мы получили, что оператор не компактный.

Задача 2.3. Пусть H - гильбертово пространство, $A : H \longrightarrow H$ - линейный ограниченный оператор, A^*A - компактный оператор. Доказать, что оператор A - также компактен.

Решение. Рассмотрим ограниченное множество $M \subset H$, то есть $\forall x \in M \exists R > 0 : \| x \| \leq R$. Поскольку A^*A- компактный, то множество A^*AM - предкомпактно, то есть для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ у последовательности A^*Ax_n найдется сходящаяся подпоследовательность $\left(A^*Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ (в замыкании A^*AM, в силу секвенциальной компактности компактного множества).

Поскольку сходящаяся последовательность фундаментальна, то последовательность $\left(A^*Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, то есть

$$\lim_{k,l \longrightarrow \infty} \| A^*Ax_{n_k} - A^*Ax_{n_l} \| = \lim_{k,l \longrightarrow \infty} \| A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}) \| = 0.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\| Ax_{n_k} - Ax_{n_l} \|^2 = (Ax_{n_k} - Ax_{n_l}, Ax_{n_k} - Ax_{n_l}) =$$

$$(A(x_{n_k} - x_{n_l}), A(x_{n_k} - x_{n_l})) = (A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}), (x_{n_k} - x_{n_l})) \leq$$

$$\leq (A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}), (x_{n_k} - x_{n_l})) \leq$$

$$\leq \| A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}) \| \| x_{n_k} - x_{n_l} \|$$

$$\leq \| A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}) \| (\| x_{n_k} \| + \| x_{n_l} \|) \leq$$
$$\leq 2R \| A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}) \| .$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $k, l \longrightarrow \infty$, получаем, что $\lim_{k,l\longrightarrow\infty} \| Ax_{n_k} - Ax_{n_l} \| = 0$, то есть последовательность $\left(Ax_{n_k}\right)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поскольку пространство H полно, то подпоследовательность $\left(Ax_{n_k}\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Итак, в множестве AM всякая последовательность имеет сходящуюся (в замыкании AM) подпоследовательность, следовательно, замыкание множества AM секвенциально компактно, то есть компактно, а само множество AM - предкомпактно. Следовательно оператор A компактен.

Задача 2.4. Дано комплексное гильбертово пространство H, оператор A действующий из H в H. Оператор A является самосопряженным оператором, причем $R(A - \lambda I) = H$. Показать, что $\lambda \in \rho(A)$.

Решение. Шаг первый. Заметим, что если число λ комплексное число, то, согласно по теореме λ будет регулярным значением и доказывать нечего.

Шаг второй. Рассмотрим случай, когда λ не является комплексным числом. Надо показать, что среди собственных значений оператора A нет числа λ.

Доказательство проведем от противного.

То есть будем предполагать, что существует $x_0 \in H,\ x_0 \neq 0 :\ Ax_0 = \lambda x_0$.

Согласно условию выполнено следующее равенство $R(A - \lambda I) = H$. Из него следует, что $\forall \quad y \in H$ (y - вектор из гильбертова пространства) существует вектор $x \in H$, и что для них справедливо соотношение $y = Ax - \lambda x$. Рассмотрим

$$(x_0, y) = (x_0, Ax - \lambda x) = (Ax_0 - \lambda x_0, x) = 0.$$

В силу произвольности элемента гильбертова пространства -y, получаем, $x_0 = 0$.

Пришли к противоречию.

Следовательно, среди собственных значений оператора A нет числа λ. Тогда $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$. В силу последнего равенства, заключаем, что оператор $(A - \lambda I)$ действует из ГП в ГП взаимно однозначный. А из этого следует, что существует обратный.

Таким образом мы пришли к тому, что $\exists \quad (A - \lambda I)^{-1} : H \longrightarrow H$, линейный ограниченный оператор. Таким образом, $\lambda \in \rho(A)$.

3. Заключение. В ходе исследования был изучен различный материал (статьи, книги) [1]-[7], которые находятся в разделе список использованных источников.

В работе представлены основные определения, теоремы, решены некоторые задачи. Данная тематика широко используется в теории операторов и расширяет спектр её возможных приложений. В частности, самосопряженные операторы являются одними из важнейших ингредиентов математического аппарата квантовой механики.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору Лидии Александровне Ковалевой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. 1984. Функциональный анализ и интегральные уравнения М., изд-во «Университетское», 264.
2. Иосида К. 1967. Функциональный анализ. пер. с англ. М., Мир, 624.
3. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2007. Об одной задачи теории функций. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. Т. 9. № 2: 30-38.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 540.
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. 1965. Элементы функционального анализа М., Наука, 520.
6. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. 1984. Задачи и упражнения по функциональному анализу М., Наука, 240.
7. Чернова О.В. 2020. Об ограниченности одного оператора. Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. Т. 35. № 1: 21-26.

Поступила в редакцию 30.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Самойлов Сергей Александрович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 1466713@bsu.edu.ru

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико - математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования НИУ «БелГУ»)

E-mail: Kovaleva_L@bsu.edu.ru