Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 134–142.

Метод разделения переменных

Зверева Ю. Е.
1722833@bsuedu.ru

Аннотация. Исследование посвящено применимости, особенности метода разделения переменных для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Цель работы — курсовой работы заключается в исследовании алгоритма, областей применимости, а также в демонстрации практических навыков применения данного метода. Приведены примеры, иллюстрирующие применение метода разделения переменных. Результаты представляют интерес для расширенного изучения дифференциальных уравнений в разных областях науки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; метод разделения переменных; задачи

Для цитирования: Зверева Ю. Е. 2025. Метод разделения переменных. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 134–142.

---

1. Введение. В статье рассматривается применение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для решения задач методом разделения переменных. Выбор темы обусловлен тем, что хотелось узнать насколько данный метод часто используем и применяется в других сферах науки. Данный метод применяется в физике, инженерии, экономике и даже в космической навигации, но только когда перед нами дифференциальное уравнение, сводящееся к уравнению с разделяющимися переменными. Цель работы заключается в исследовании алгоритма, областей применимости, а также в демонстрации практических навыков применения данного метода.

Работа включает введение, теоретический раздел, практическую часть (анализ примеров) и заключение. Результаты представлены в виде графиков (5 иллюстраций) и опираются на 10 литературных источников.

2. Метод разделения переменных. Метод разделения переменных – один из наиболее часто используемых подходов к решению линейных уравнений. В случае уравнений с двумя независимыми переменными x и y и неизвестной функцией $f(x, y)$, суть метода заключается в поиске решений, представимых в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной [7, стр. 14].

«Уравнение вида: $f_1(x)g_1(y)y'_x = f_2(x)g_2(y)$ путем деления обеих частей на f_1g_1 приводят к уравнения с разделяющимися переменными» [4, стр. 50], которое в свою очередь решается методом разделения переменных, а такое уравнение имеет вид: $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$, где множителем при dx является функция, которая может зависеть только от x, но не от y, аналогично получаем и при dy – функция, которая может зависеть только от y, но не от x, называется уравнением с разделенными переменными. Получим тождество, интегрируя которое, будем иметь:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C,$$

где C – произвольная постоянная [8, стр. 19].

Замечание. [3, стр. 10] При проведении почленного деления уравнения на $g_1(x)$ и $f_2(y)$ при использовании метода разделения переменных, могут быть потеряны некоторые решения. Чтобы их не упустить, необходимо отдельно решить уравнения $g_1(x) = 0$ и $f_2(y) = 0$ и установить те решения уравнения, которые не являются частными случаями общего решения — так называемые особые решения.

3. Применение метода разделения переменных. Метод разделения переменных используется в разных областях науки: в биофизике, в химии и даже в экономике. Рассмотрим различные примеры, в которых используется метод разделения переменных.

Динамические модели, представляющие собой системы дифференциальных уравнений, уже долгое время применяются для описания кинетики химических реакций.

Пример 1. Рост колонии микроорганизмов [5, стр. 4]. За время Δt прирост численности равен: $\Delta x = R - S$, где R – число родившихся, а S – число умерших особей за время Δt, пропорциональное этому промежутку времени. $R(\Delta t, x) = R(x)\Delta t, \quad S(\Delta t, x) = S(x)\Delta t$.

В дискретной форме: $\Delta x = [R(x) - S(x)]\Delta t$. Разделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = R(x) - S(x).$$

В простейшем случае, когда рождаемость и смертность пропорциональны численности: $\dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x$, $\alpha - \beta = r$, следовательно: $\dfrac{dx}{dt} = rx$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее рост колонии: $\dfrac{dx}{dt} = rx$, где x – численность колонии, t – время, а r – коэффициент роста.

Делим обе стороны уравнения на x, предполагая, что он не равен нулю и умножаем обе стороны на dt, чтобы привести ДУ с разделяющимися переменными к ДУ с разделенными переменными и получаем:

$$\frac{dx}{x} = rdt.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dx}{x} = \int rdt,$$

что даёт: $\ln|x| = rt + C$, где C — константа интегрирования. Для нахождения решения, выразим x через экспоненту: $|x| = e^{rt+C} = e^C e^{rt}$. Обозначим $x_0 = e^C$ (или $-e^C$, если x отрицательно). Тогда: $x = x_0 e^{rt}$.

Предположим, что начальная численность колонии при $t = 0$ равна $x(0) = x_0$. Тогда: $x(0) = x_0 e^{r\cdot 0} = x_0 e^0 = x_0$, что соответствует нашему начальному условию. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $x(t) = x_0 e^{rt}$. Это экспоненциальная форма динамики роста.

Пример 2. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе) [2, стр. 13]. Рассмотрим применение метода в экономических задачах. Пусть $y(t)$ – интенсивность (т. е. величина выпуска в единицу времени) выпуска продукции некоторого предприятия. Предположим, что имеет место аксиома о ненасыщаемости потребителя, т. е. весь выпущенный предприятием товар будет продан, а также то, что объем продаж не является столь высоким, чтобы существенно повлиять на цену товара p, которую в виду этого мы будем считать фиксированной. Чтобы увеличить интенсивность выпуска $y(t)$, необходимо, чтобы чистые инвестиции $I(t)$ (т. е. разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. В случае $I(t) = 0$, общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию, и уровень выпуска продукции остается неизвестным. Таким образом, мы видим, что скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией от I. Пусть эта зависимость выражается прямой пропорциональностью, т. е. имеет место так называемый принцип акселерации: $my' = I (m = \text{const})$, где m – норма акселерации. Пусть α – норма чистых инвестиций, т. е. часть дохода, которая тратится на чистые инвестиции. Тогда $I = \alpha p y$. Подставляя выражение для I получаем:

$$y' = \frac{\alpha p}{m} y \quad \text{или} \quad y' = ky,$$

где $k = \dfrac{\alpha p}{m}$. Разделяя переменные в уравнении имеем: $\dfrac{dy}{y} = kdt$.

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt.$$

Отсюда после интегрирования обеих частей находим: $\ln|y| = kt + \ln|C|$ или $y = Ce^{kt}$.

Ответ: $y = Ce^{kt}$.

Пример 3. Решение уравнения вида (1.2) $y' = f(ax + by + c)$ [6, стр. 7]. Эти уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой:

$$z(x) = ax + by + c \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b} \Rightarrow \frac{z' - a}{b} = f(z).$$

Рассмотрим уравнение: $y' = \cos(y - x)$.

Решение. Делаем замену $z = y - x$; находим $y' = 1 + z'$. Подставляем в исходное уравнение: $z' = \cos z - 1$.

Приводим уравнение к виду (1.2): $\dfrac{dz}{\cos z - 1} = dx$; $-\dfrac{d(\frac{z}{2})}{\sin^2(\frac{z}{2})} = dx$. Интегрируем: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{z}{2}\right) = x + C$.

Возможные потерянные решения: $\cos z - 1 = 0$. Разрешаем относительно z: $z = 2\pi k$, где $k = \pm 0, \pm 1\ldots$ Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $z = 2\pi k$, где $k = \pm 0, \pm 1\ldots$ является решением. Переходим к старым переменным: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}\right) = x + C; \quad y - x = 2\pi k.$

Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}\right) = x + C; \quad y - x = 2\pi k.$

4. Практическая часть: Решение конкретных задач.

Задача 1. [1, стр. 7] *Найти общий интеграл дифференциального уравнения:*

$$ydy + \sqrt{y^2 + 4}dx = 2x^2 ydy.$$

Решение. Так как мы видим, что в данном дифференциальном уравнение есть возможность разделить переменные, значит это уравнение относится к ДУ с разделяющимися переменными.

Заметим, что выражение можно упростить, вынеся общие множители dx и dy :

$$\sqrt{y^2+4}dx = ydy(2x^2-1).$$

Далее делим обе стороны уравнения на $\sqrt{y^2+4}(2x^2-1)$, предполагая, что оно не равно нулю, чтобы привести дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными и получаем:

$$\frac{dx}{2x^2-1} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+4}}.$$

Далее интегрируем обе стороны уравнения, чтобы получить общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dx}{2x^2-1} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+4}} + C_0.$$

Вычислим полученные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln|x-\frac{1}{\sqrt{2}}| - \ln|x+\frac{1}{\sqrt{2}}|\right) + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C_1.$$

$$2) \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+4}} = [t = y^2+4; dt = 2ydy] = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot t^{-\frac{1}{2}} + C_2 = \sqrt{y^2+4} + C_2.$$

Получим общее решение дифференциального уравнения с разделёнными переменными:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| - \sqrt{y^2+4} = C.$$

Проверим, не потеряли ли мы никакие корни, когда предположили, что $\sqrt{y^2+4}(2x^2-1)$ не равно нулю:

$$\sqrt{y^2+4}(2x^2-1) = 0 \implies 2x^2-1=0 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда при подстановке в изначальное уравнение получаем: $0 \equiv 0$.

Следовательно, $x = \pm(1/\sqrt{2})$ также является решением данного ДУ.

Ответ:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| - \sqrt{y^2+4} = C; \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

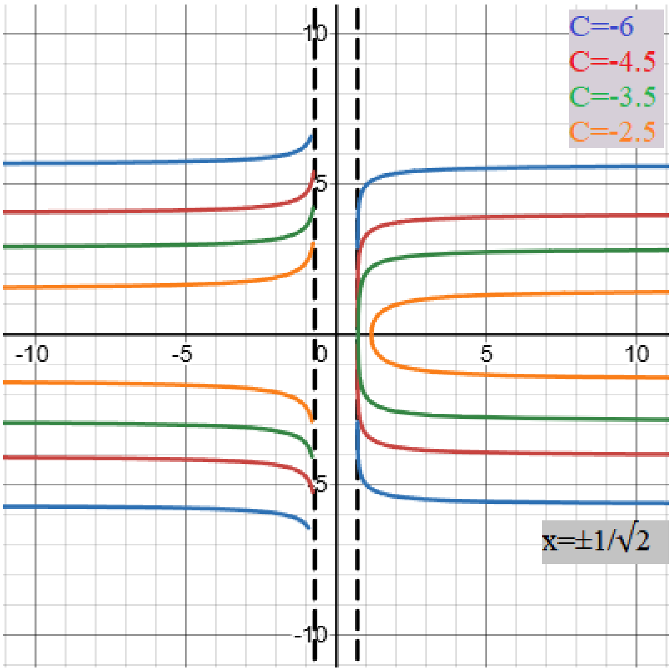

Рис. 1. Интегральные кривые уравнения задачи 1

Задача 2. [6, стр. 7] *Найти общее решение уравнения:*

$$y' = (3x - y + 1)^2.$$

.

Решение. Введём замену, опираясь на пример из теоретической части:

$$z = 3x - y + 1.$$

Выразим y: $y = 3x - z + 1$.

Найдём производную: $y' = 3 - \dfrac{dz}{dx}$.

Подставим в исходное уравнение:

$$3 - \frac{dz}{dx} = z^2,$$
$$\frac{dz}{dx} = 3 - z^2.$$

Разделим переменные, поделив на $(3 - z^2)$, предполагая, что оно не равно нулю, и умножив на dx, чтобы привести дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными и получаем:

$$\frac{dz}{3 - z^2} = dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{3 - z^2} = \int dx.$$

Вычислим табличные интегралы:

$$\int \frac{dz}{3 - z^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + z}{\sqrt{3} - z} \right| + C_1, \quad \int dx = x + C_2.$$

Получим общее решение:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + z}{\sqrt{3} - z} \right| = x + C.$$

Вернёмся к исходной переменной и получим общее решение дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + 3x - y + 1}{\sqrt{3} - 3x + y - 1} \right| = x + C.$$

Проверим, не потеряли мы решение, когда разделили переменные. Возникло два потенциальных корня: $z = \sqrt{3}$ и $z = -\sqrt{3}$.

Для $z = \sqrt{3}$:

$$\frac{dz}{dx} = 0 = 3 - (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 0 = 0.$$

Для $z = -\sqrt{3}$:

$$\frac{dz}{dx} = 0 = 3 - (-\sqrt{3})^2 \Rightarrow 0 = 0.$$

Получается, что $z = \pm\sqrt{3}$ — решения данного дифференциального уравнения. Вернёмся к исходной переменной y:

$$3x - y + 1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 3x + 1 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3} + 3x - y + 1}{\sqrt{3} - 3x + y - 1}\right| = x + C, \quad y = 3x + 1 \pm \sqrt{3}.$$

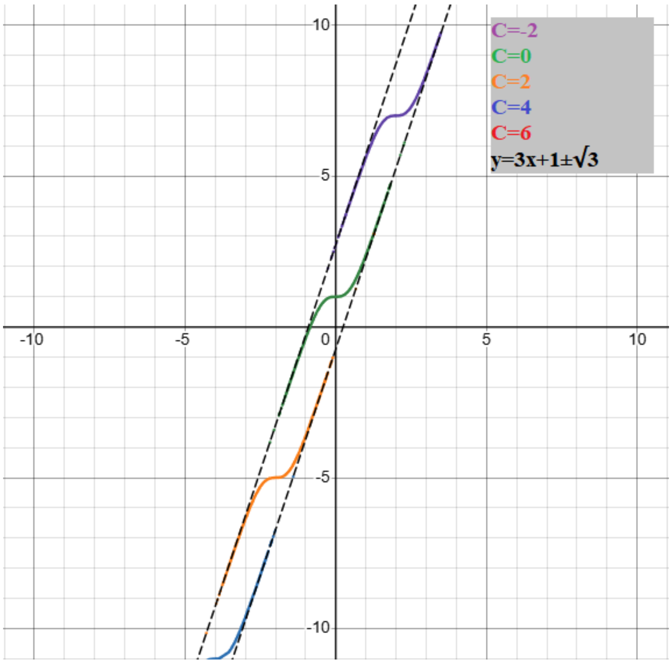

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения задачи 2

Задача 3. [6, стр. 7]*Найти общее решение уравнения:*

$$y' = (x + y)^2.$$

Решение. Введём замену, опираясь на пример из теоретической части:

$$z = x + y.$$

Выразим y: $y = z - x$. Найдём производную: $y' = \frac{dz}{dx} - 1$. Подставим в исходное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2,$$
$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1.$$

Разделим переменные, поделив на $(z^2 + 1)$, предполагая, что оно не равно нулю, и умножив на dx, чтобы привести дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными и получаем:

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx.$$

Вычислим табличные интегралы:

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z + C_1, \qquad \int dx = x + C_2.$$

Получим общее решение: $\operatorname{arctg} z = x + C$.

Вернёмся к исходной переменной и получим общее решение дифференциального уравнения: $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$.

Выразим y явно: $x + y = \operatorname{tg}(x+C) \implies y = \operatorname{tg}(x+C) - x$.

Проверим, не потеряли мы решение, когда разделили переменные. Рассмотрим случай $z^2 + 1 = 0$:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1.$$

Данное уравнение не имеет действительных решений, поэтому особых решений не существует.

Ответ: $y = \operatorname{tg}(x+C) - x$.

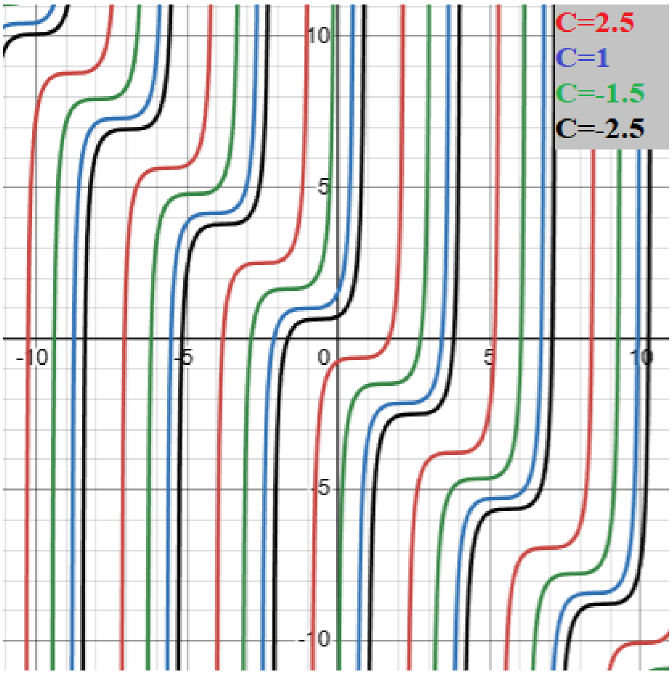

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения задачи 3

Задача 4.[1, стр. 7] *Найти общий интеграл дифференциального уравнения:*

$$9dx - xdy = dy - y^2dx$$

.

Решение. Так как мы видим, что в данном дифференциальном уравнение есть возможность разделить переменные, значит это уравнение относится к ДУ с разделяющимися переменными.

Преобразуем уравнение, группируя члены с dx и dy:

$$9dx + y^2dx = xdy + dy.$$

Вынесем общие множители dx и dy:

$$(9 + y^2)dx = (x+1)dy.$$

Разделим переменные, поделив обе части на $(x+1)(9+y^2)$, предполагая, что это выражение не равно нулю, чтобы привести дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными и получаем:

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{9+y^2}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dy}{9+y^2} + C_0.$$

Вычислим табличные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1, \quad \int \frac{dy}{9+y^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C_2.$$

Получим общее решение дифференциального уравнения:

$$\ln|x+1| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C.$$

Проверим, не потеряли ли мы решения при делении на $(x+1)(9+y^2)$:
1) Подставим в исходное уравнение $x = -1$:

$$0 - (-1)dy = dy - 0 \implies dy \equiv dy.$$

Следовательно, $x = -1$ является решением.
2) Для $y^2 = -9$ нет действительных решений. Следовательно, $y^2 = -9$ не является решением.
Ответ: $\ln|x+1| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C$, $x = -1$.

Рис. 4. Интегральные кривые уравнения задачи 4

Задача 5. [1, стр. 7]*Найти общий интеграл дифференциального уравнения:*

$$y^2dx - xdy = 2dy - 4dx.$$

Решение. Так как мы видим, что в данном дифференциальном уравнение есть возможность разделить переменные, значит это уравнение относится к ДУ с разделяющимися переменными.

Преобразуем уравнение, группируя члены с dx и dy:

$$y^2dx + 4dx = xdy + 2dy.$$

Вынесем общие множители dx и dy:

$$(y^2 + 4)dx = (x + 2)dy.$$

Разделим переменные, поделив обе части на $(x+2)(y^2+4)$, предполагая, что это выражение не равно нулю:

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{y^2+4}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{dy}{y^2+4} + C_0.$$

Вычислим табличные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C_1, \quad \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) + C_2.$$

Получим общее решение дифференциального уравнения:

$$\ln|x+2| = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) + C.$$

Проверим, не потеряли ли мы решения при делении на $(x+2)(y^2+4)$:
1) Подставим в исходное уравнение $x = -2$:

$$y^2 \cdot 0 - (-2)dy = 2dy - 4 \cdot 0 \Rightarrow 2dy = 2dy \Rightarrow dy \equiv dy.$$

Тождество выполняется. Следовательно, $x = -2$ является решением.
2) Для $y^2 + 4 = 0$ нет действительных решений. Следовательно, $y^2 = -4$ не является решением.
Ответ: $\ln|x+2| = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) + C,\ x = -2.$

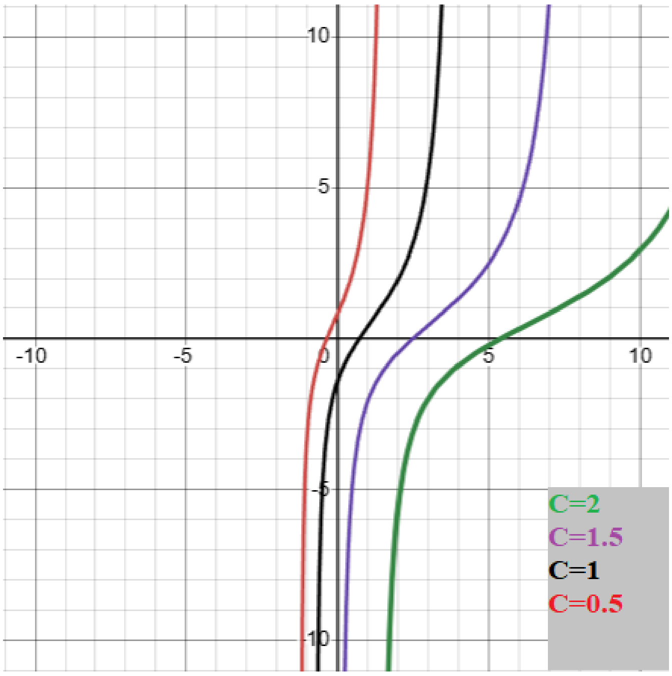

Рис. 5. Интегральные кривые уравнения задачи 5

5. Заключение. Проведя исследование ясно, что метод разделения переменных является одним из наиболее часто используемых и эффективных подходов для решения линейных дифференциальных уравнений, а также универсальность делает его фундаментальным инструментом в арсенале математика и инженера. Применение этого метода многогранно и охватывает широкий спектр научных дисциплин, начиная от теоретической математики и фундаментальной физики, где он используется для моделирования различных явлений, и заканчивая прикладными областями, такими как биология (моделирование роста популяций) и экономика (модели экономического роста). В процессе исследования был подробно рассмотрен алгоритм решения задач методом разделения переменных, от теоретических основ до практических примеров.

Благодарность. *Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Черновой О. В. за ценные советы и поддержку.*

Список литературы

1. Асташова И. В., Никишкин В. А. Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения». Учебное пособие. М.: центр ЕАОИ, 2010. – 94 с.
2. Васенкова Е. К., Волкова Е. С., Шандра И. Г. Математика для экономистов. Дифференциальные и разностные уравнения: Курс лекций. М.: Финансовая академия, 2003. – 116 с.
3. Гредасова Н. В., Андреева И. Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: науки и высшего образования РФ, 2022. – 88 с.

4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Леонова Н. Л., Кушнерова А. И. Математические методы в биологии и экологии. СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2019 – 43 с.
6. Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Казань, 2017 – 44 с.
7. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М: ИПМех РАН, 2020 – 384 с.
8. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука, 1969 – 424 с.

Поступила в редакцию 14.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Зверева Юлия Евгеньевна – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию