# Применение операционного исчисления к различным физическим задачам

**Стрельцов В. В.**
streltsov.022@gmail.com

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются прикладные аспекты операционного исчисления и его применения к решению типовых задач математической физики. Основное внимание уделено использованию преобразования Лапласа и связанных с ним операторных методов при анализе линейных дифференциальных уравнений, возникающих в механике, электродинамике и теории теплопроводности. Обсуждаются математические принципы, лежащие в основе операционного подхода, а также демонстрируются его преимущества при решении начально-краевых задач. Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность операционного исчисления в прикладных задачах, включая моделирование колебательных процессов, анализ электрических цепей и распространение тепла. Рассматриваются перспективы интеграции операционных методов с численными алгоритмами для решения задач физики и инженерии.

**Ключевые слова:** операционное исчисление, преобразование Лапласа, дифференциальные уравнения, математическая физика, прикладные задачи

**Для цитирования:** Стрельцов В. В. 2025. Применение операционного исчисления к различным физическим задачам. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 128–133.

---

**1. Введение.** Операционное исчисление представляет собой одно из эффективных направлений прикладной математики, основанное на использовании операторных методов для анализа и решения дифференциальных уравнений. Оно возникло как средство формального упрощения сложных вычислений и преобразовалось в мощный аналитический инструмент, широко применяемый в математической физике, инженерии и теории управления.

Особую роль в операционном исчислении играет преобразование Лапласа, которое позволяет переводить дифференциальные уравнения в алгебраическую форму, существенно упрощая их решение. Благодаря этому подходу удаётся эффективно решать задачи с начальными и граничными условиями, возникающие в механике, электротехнике, теплопередаче и других прикладных дисциплинах. Помимо преобразования Лапласа, в рамках операционного подхода также активно используются методы Фурье, свёрточные операторы и обобщённые функции.

Одним из ключевых преимуществ операционного исчисления является его универсальность и наглядность при работе с линейными системами. Операторный подход обеспечивает интуитивное понимание процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, и позволяет формализовать методы решения таким образом, чтобы их можно было эффективно реализовать как аналитически, так и численно. Это делает операционное исчисление особенно актуальным в условиях растущей сложности современных задач в физике и инженерии.

Цель данной статьи — проанализировать прикладные аспекты операционного исчисления и продемонстрировать его эффективность на примере типовых физических задач. Особое внимание уделяется использованию преобразования Лапласа при решении задач механики, теории электрических цепей и теплопроводности. Представленные примеры иллюстрируют практическую значимость метода, а также раскрывают его возможности при аналитическом и численном моделировании физических процессов.

**2. Теоретические основы операционного исчисления.** Операционное исчисление представляет собой совокупность методов, направленных на преобразование дифференциальных уравнений в более простые формы с использованием операторных преобразований. Основная идея заключается в замене производных алгебраическими выражениями с помощью интегральных преобразований, таких как преобразование Лапласа, Фурье и др., что позволяет значительно упростить процесс решения.

Центральным элементом операционного исчисления является линейный дифференциальный оператор, который обозначается как $D = \dfrac{d}{dt}$. При использовании преобразования Лапласа оператор $D$ преобразуется в умножение на переменную $s$ в образе функции, что даёт возможность перейти от дифференциального уравнения к алгебраическому:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0),$$

где $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ — образ функции $y(t)$ [1, 4, 5].

Важным понятием операционного подхода является оператор переноса, который позволяет описывать динамику линейных систем через переходные функции и импульсные характеристики. Использование свёрточных операторов и обобщённых функций, таких как дельта-функция Дирака, расширяет область применения операционного исчисления на широкий класс уравнений с распределёнными параметрами и сингулярностями [1].

Также важным элементом теории является линейность операционного преобразования, позволяющая применять принцип суперпозиции при решении сложных задач. Это особенно эффективно при анализе систем с несколькими входами и выходами, как в задачах управления или электрических цепей.

Наконец, теория остаточных членов, правила обратного преобразования и таблицы преобразований позволяют не только формально решать уравнения, но и интерпретировать полученные решения в терминах начальных условий и физических параметров системы.

**3. Математическое моделирование физических процессов.** Математическое моделирование физических процессов представляет собой фундаментальный этап в применении операционного исчисления. Оно позволяет формализовать реальные явления в виде систем дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями. Такие уравнения часто описывают поведение механических, тепловых, электрических и других систем, подверженных внешним воздействиям и внутренним взаимодействиям.

Большинство задач классической физики — от колебаний и волновых процессов до теплопроводности и электрических цепей — могут быть сведены к линейным дифференциальным уравнениям первого или второго порядка. В рамках операционного подхода эти уравнения записываются в форме, удобной для последующего преобразования:

$$L[y(t)] = f(t),$$

где $L$ — линейный дифференциальный оператор, $y(t)$ — неизвестная функция (например, координата, температура, ток), а $f(t)$ — внешнее воздействие или источник [2, 5].

В механике, например, задачи свободных и вынужденных колебаний масс на пружинах сводятся к уравнениям второго порядка, которые поддаются решению с помощью преобразования Лапласа. Аналогично, в электротехнике уравнения для токов в RLC-цепях можно выразить через операторные уравнения, в которых сопротивления, индуктивности и ёмкости заменяются алгебраическими выражениями в $s$-области [1].

В задачах теплопередачи и диффузии ключевым является уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое при одностороннем преобразовании по времени также приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению по пространственной переменной, удобному для аналитического или численного анализа [4].

Использование операционного исчисления позволяет автоматизировать процесс перехода от физической модели к её аналитическому решению. Это особенно важно при наличии сложных начально-краевых условий, которые традиционными методами решаются с трудом или требуют значительных вычислительных затрат.

**4. Применение операционного исчисления в механике.** Одной из важнейших областей применения операционного исчисления является классическая механика, в частности теория колебаний. Механические системы, такие как маятники, пружинные массы и демпфирующие устройства, описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Применение преобразования Лапласа к таким уравнениям позволяет эффективно решать задачи с начальными условиями, анализировать динамику систем и получать аналитические выражения для отклика на внешние воздействия.

Рассмотрим, например, модель затухающего гармонического осциллятора, описываемую уравнением:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t),$$

где $m$ – масса, $c$ – коэффициент вязкого сопротивления, $k$ – жёсткость, $x(t)$ – смещение, а $F(t)$ – внешняя сила.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа и используя нулевые начальные условия, получаем:

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s),$$

где $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ и $F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ — изображения функций смещения и внешней силы соответственно.

Выразив $X(s)$, получаем:

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}.$$

Эта формула позволяет определить отклик системы в частотной области и затем восстановить временную зависимость $x(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Кроме того, численные и символические методы позволяют исследовать устойчивость системы, характер затухания (критическое, апериодическое, колебательное) и частотные характеристики.

Аналогичным образом решаются задачи вынужденных колебаний, в которых внешняя сила $F(t)$ имеет вид гармонического сигнала или импульса. В этих случаях преобразование Лапласа особенно удобно, так как позволяет обойти трудоёмкие методы вариации постоянных или неопределённых коэффициентов.

Также операционный подход применяется в многомассовых системах с несколькими степенями свободы, где позволяет записывать систему уравнений в матрично-операторной форме и проводить анализ с использованием линейной алгебры и спектральных методов.

**5. Применение операционного исчисления в электродинамике и электрических цепях.** Операционное исчисление находит широкое применение в анализе линейных электрических цепей и электродинамических процессов, где поведение системы описывается дифференциальными уравнениями, отражающими законы Ома, Кирхгофа и Максвелла. Использование преобразования Лапласа позволяет перевести временные уравнения в алгебраические, что существенно упрощает процесс анализа и расчёта цепей, особенно при наличии сложных начальных условий или импульсных воздействий.

Рассмотрим простейшую цепь с последовательным соединением резистора $R$, индуктивности $L$ и конденсатора $C$ (RLC-цепь), через которую проходит ток $i(t)$ при подаче напряжения $u(t)$. Уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Применяя преобразование Лапласа и предполагая нулевые начальные условия, получаем:

$$Ls^2I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C}I(s) = sU(s),$$

где $I(s)$ и $U(s)$ — изображения тока и напряжения соответственно.

Решив это уравнение относительно $I(s)$, можно получить:

$$I(s) = \frac{sU(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

Это выражение позволяет исследовать частотные свойства цепи, определить резонансные условия и получить временной отклик $i(t)$ путём обратного преобразования Лапласа. Кроме того, можно легко анализировать реакцию цепи на различные типы входных сигналов — импульсы, ступенчатые или синусоидальные воздействия [2, 4].

Уравнения Кирхгофа описывают колебания упругих струн и пластин и представляют собой классические задачи математической физики, формулируемые в виде дифференциальных уравнений высокого порядка. Применение операционного исчисления, в частности преобразования Лапласа, позволяет значительно упростить их решение.

Рассмотрим одномерное уравнение Кирхгофа для колебаний струны с натяжением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4},$$

где $u(x,t)$ – поперечное смещение, $c$ – скорость распространения волны, $\alpha$ – коэффициент жёсткости струны [3].

Применение преобразования Лапласа по времени $t$ приводит к уравнению

$$s^2\tilde{u}(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = c^2\frac{\partial^2\tilde{u}(x,s)}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4\tilde{u}(x,s)}{\partial x^4},$$

где $\tilde{u}(x,s)$ – преобразование Лапласа функции $u(x,t)$.

Дальнейшее решение сводится к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения по пространственной переменной $x$ с заданными граничными условиями, которые зависят от физической постановки задачи (например, закреплённые или свободные концы).

Использование операционного исчисления позволяет выразить решение $\tilde{u}(x,s)$ через функции переменной $s$, что облегчает применение обратного преобразования и получение окончательного решения во временной области.

Аналогично, в задачах на колебания пластин уравнения Кирхгофа могут быть сведены к алгебраическим уравнениям в операторной области, что упрощает их анализ и численное моделирование.

В электродинамике операционные методы применяются, например, при решении уравнений Максвелла в линейных средах, где возможно использовать преобразование Лапласа или Фурье по времени для перехода к более удобной форме уравнений и анализа распространения волн, импульсных откликов и фильтрации сигналов.

Для анализа задач теплопроводности и диффузии широко используются интегральные преобразования, позволяющие свести дифференциальные уравнения к более простым алгебраическим или дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных.

**6. Применение операционного исчисления в задачах теплопроводности и диффузии.** Задачи теплопроводности и молекулярной диффузии описываются уравнениями в частных производных параболического типа. Эти уравнения являются фундаментальными в теплофизике, гидродинамике, химической кинетике и других областях, где рассматривается распространение вещества или энергии в пространстве и времени.

Классическим примером является одномерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ – температура в точке $x$ в момент времени $t$, а $a^2$ – коэффициент температуропроводности среды.

Применение преобразования Лапласа по времени позволяет свести это уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению по пространственной переменной:

$$s\,\widetilde{u}(x,s) - u(x,0) = a^2 \frac{d^2\widetilde{u}(x,s)}{dx^2},$$

где $\widetilde{u}(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$ – образ функции температуры. Такое преобразование позволяет эффективно учитывать начальные условия и значительно упростить процедуру решения.

В граничных задачах на конечном отрезке с условиями первого рода (заданные температуры на концах) или второго рода (тепловой поток), полученное уравнение решается аналитически с использованием методов вариации параметров, разложения в ряд Фурье или численно – методом конечных разностей или конечных элементов после операционного преобразования.

Аналогично, уравнение диффузии, описывающее распределение концентрации вещества $c(x,t)$:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2},$$

где $D$ — коэффициент диффузии, также сводится к удобной форме с помощью операционного подхода. Это позволяет моделировать процессы переноса массы в многослойных средах, реакционно-диффузионных системах и биофизических структурах [2].

Преобразование Лапласа по времени применяется для перехода от уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению по пространственной переменной $x$:

$$s\tilde{u}(x,s) - u(x,0) = \alpha\frac{d^2\tilde{u}(x,s)}{dx^2},$$

где $\tilde{u}(x,s)$ — преобразование Лапласа функции $u(x,t)$ по переменной $t$, а $s$ — комплексная переменная преобразования.

Решение полученного уравнения зависит от граничных условий и начального распределения температуры. Обратное преобразование Лапласа позволяет восстановить решение во временной области.

Преобразование Фурье применяется для задачи с бесконечным или периодическим пространственным доменом. Для функции $u(x,t)$ её преобразование Фурье по переменной $x$ задаётся как

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx,$$

что сводит уравнение теплопроводности к обыкновенному дифференциальному уравнению по времени:

$$\frac{\partial \hat{u}(k,t)}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{u}(k,t).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-\alpha k^2 t},$$

где $\hat{u}(k,0)$ – преобразование Фурье начального условия. Обратное преобразование Фурье возвращает решение в пространственно-временную область:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,0)e^{-\alpha k^2 t}e^{ikx}dk.$$

Особое значение имеет использование операционного исчисления при наличии обобщённых источников, таких как импульсные тепловые или массо переносные воздействия. В этом случае решение удобно выражается через фундаментальное решение (ядро теплопроводности), преобразованное в операторной форме, что позволяет получать точные выражения температурных и концентрационных полей во времени [3].

**7. Сравнительный анализ операционного исчисления с другими методами решения.** При решении дифференциальных уравнений, возникающих в физике и инженерных науках, наряду с операционным исчислением широко применяются и другие аналитические и численные методы. Наиболее распространёнными являются методы вариации постоянных, метод неопределённых коэффициентов, разложение в ряды Фурье, а также численные подходы — метод конечных разностей, конечных элементов и метод Рунге–Кутты.

Одним из ключевых преимуществ операционного исчисления является возможность автоматического учёта начальных условий, особенно в задачах с импульсным или ступенчатым воздействием. Преобразование Лапласа позволяет сразу перейти от дифференциального уравнения к алгебраическому, минуя этап поиска фундаментального решения, что существенно упрощает анализ линейных систем:

$$L[y(t)] = f(t) \quad \longrightarrow \quad L(s)Y(s) = F(s).$$

В отличие от метода вариации постоянных или метода неопределённых коэффициентов, которые требуют явного знания структуры правой части и предполагают громоздкие вычисления для задач с кусочно-заданными или обобщёнными функциями, операционные методы позволяют легко обрабатывать дельта-функции, ступенчатые сигналы и другие особенности с помощью таблиц преобразований и линейных свойств преобразований.

Сравнение с разложением в ряды Фурье показывает, что операционные методы обладают более универсальным характером для анализа переходных процессов, тогда как разложения по тригонометрическим базисам чаще применимы к стационарным режимам или периодическим функциям. Кроме того, преобразование Лапласа более удобно при работе с асимптотически убывающими функциями, что соответствует физической природе многих реальных процессов.

Численные методы обладают высокой универсальностью и позволяют решать широкий класс нелинейных и многомерных задач. Однако они требуют построения сеток, аппроксимации производных и зачастую не дают аналитического представления решения. Операционное исчисление же, напротив, позволяет получать точные выражения решений или их образы, что особенно важно в теоретическом анализе и верификации численных результатов.

Таким образом, операционные методы занимают промежуточное положение между чисто аналитическими и численными подходами. Они сочетают точность и формальную строгость с практической применимостью, особенно в задачах линейной физики, электротехники, механики и теплопередачи. Выбор метода зависит от конкретной постановки задачи: для линейных систем с постоянными коэффициентами и заданными начальными условиями операционное исчисление часто оказывается оптимальным выбором.

**8. Практическая реализация.** Практическое применение операционного исчисления в физических задачах часто требует реализации алгоритмов преобразования Лапласа и обратного преобразования, а также решения полученных алгебраических уравнений. В современных исследованиях и инженерной практике широко используются программные средства, позволяющие автоматизировать эти процессы и проводить численный анализ сложных систем.

Среди популярных инструментов для реализации операционных методов выделяются компьютерные системы символьных вычислений (например, Mathematica, Maple), а также специализированные библиотеки и пакеты для MATLAB и Python (SymPy, SciPy). Эти средства обеспечивают возможность аналитического вычисления преобразований, решения алгебраических уравнений в области комплексной переменной, а также численного обратного преобразования с высокой точностью.

Для иллюстрации практической эффективности операционного исчисления рассмотрим численный пример задачи затухающего гармонического осциллятора с параметрами: масса $m = 1$ кг, коэффициент демпфирования $c = 0.5$ Н·с/м, жёсткость пружины $k = 4$ Н/м и внешняя сила в виде ступенчатого сигнала $F(t) = 1(t)$.

Преобразование Лапласа внешней силы:

$$F(s) = \frac{1}{s}.$$

Из уравнения движения в операторной форме:

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/s}{s^2 + 0.5s + 4}.$$

Обратное преобразование Лапласа, выполненное с помощью встроенных функций символьных пакетов, даёт выражение для смещения $x(t)$ во временной области.

Результаты численного моделирования показывают характерные колебания с затуханием, что подтверждает теоретические ожидания. Аналогичным образом можно моделировать и более сложные воздействия, включая импульсные и гармонические силы.

Кроме того, операционное исчисление эффективно применяется при численном решении задач теплопроводности, где после преобразования Лапласа по времени уравнение сводится к пространственному дифференциальному уравнению, решаемому методами конечных разностей или элементов. Такой подход позволяет существенно уменьшить вычислительную нагрузку, разделяя временную и пространственную компоненты задачи.

**7. Заключение.** Операционное исчисление представляет собой мощный инструмент прикладного анализа, позволяющий эффективно решать широкий класс задач математической физики. В настоящей работе были рассмотрены основные принципы и методы операционного подхода.

Особое внимание было уделено применению операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений, возникающих в механике, электродинамике и теории теплопроводности. Показано, что использование операторных методов существенно упрощает как аналитическое, так и численное получение решений, особенно при наличии сложных граничных и начальных условий.

Таким образом, операционное исчисление выступает универсальной платформой, объединяющей аналитические методы, теорию линейных операторов и практико-ориентированное моделирование. Перспективы дальнейших исследований в этом направлении включают разработку вычислительно устойчивых схем, расширение методов на нелинейные задачи. Всё это подчёркивает актуальность и важность операционного подхода в современной прикладной математике.

**Список литературы**

1. Евграфов М. А. 1967, Метод операторов и его применение в математической физике. М.: Наука, 288 с.
2. Ядренко М. И. 1975, Операторы в гильбертовом пространстве. Киев: Вища школа, 312 с.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. 1986, Интегралы и ряды: Таблицы и формулы. М.: Наука, 1056 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972, Уравнения математической физики. М.: Наука, 544 с.
5. Исаев А. И. 2000, Численные методы линейной алгебры и прикладного анализа. М.: МГУ, 248 с.

*Поступила в редакцию 12.06.2025*

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Стрельцов Владислав Вадимович** – магистрант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

**РУКОВОДИТЕЛЬ**

**Чернова Ольга Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию