Решение сингулярных интегральных уравнений с ядром коши

Токарев Д. А.
1469493@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, возникающих в задачах математической физики, теории упругости и аэродинамики. Основное внимание уделено подходам, позволяющим преодолеть особенности интегралов типа Коши, включая метод регуляризации, преобразования Гильберта и аппарат теории краевых задач. Исследуются условия существования и единственности решений. Особое место отведено конкретным примерам уравнений с ядром Коши. Результаты работы могут быть использованы для анализа сингулярных задач в прикладных исследованиях, включая расчёты напряжений в материалах и моделирование течений жидкости. Статья адресована специалистам в области интегральных уравнений и их приложений.

Ключевые слова: задача Римана, интеграл типа Коши, индекс, каноническая функция, характеристическое уравнение, формулы Сохоцкого

Для цитирования: Токарев Д. А. 2025. Решение сингулярных интегральных уравнений с ядром коши. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 117–127.

---

1. Введение. Изучение сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши берёт начало в работах XIX века, связанных с анализом задач математической физики. Основы теории заложил Огюстен Луи Коши, который ввёл понятие главного значения интеграла для регуляризации расходящихся выражений. В конце XIX века Юлий Сохоцкий и Йосиф Племель разработали свои знаменитые формулы, описывающие предельные значения интегралов типа Коши, что стало ключевым инструментом для анализа сингулярностей [2].

В начале XX века Давид Гильберт и Бернхард Риман, исследуя краевые задачи для аналитических функций, создали предпосылки для сведения сингулярных уравнений к задачам теории функций. Значительный прорыв произошёл в 1930-х годах с появлением метода Винера – Хопфа, предложенного Норбертом Винером и Эберхардом Хопфом, который позволил факторизовать ядра и сводить уравнения к алгебраическим системам [3, 6].

В середине XX века Николай Мусхелишвили систематизировал теорию сингулярных интегральных уравнений, связав её с задачами теории упругости, а Торстен Карлеман предложил методы регуляризации для широкого класса уравнений. Эти работы заложили основу современного подхода, сочетающего аналитические методы с функциональным анализом [8].

Развитие теории продолжается и сегодня, однако её математический аппарат остаётся неразрывно связан с идеями, сформулированными в трудах упомянутых учёных. В данной статье акцент на примерах решений отражает эволюцию методов, берущих начало в классических исследованиях Коши, Сохоцкого и их последователей.

Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши представляют собой важный класс уравнений, математическая структура которых обусловлена наличием интегралов в смысле главного значения по Коши. Их изучение связано с принципиальными трудностями, вызванными сингулярностью ядра, что требует применения специализированных методов анализа. В отличие от работ, ориентированных на прикладные аспекты, данная статья фокусируется на демонстрации конкретных примеров решения уравнений с ядром Коши, что позволяет детально раскрыть технику преодоления сингулярности и построения явных решений. В работе последовательно разбираются методы, применимые к таким уравнениям: переход к эквивалентным краевым задачам для аналитических функций, использование формул Сохоцкого. Особый акцент сделан на уравнениях, допускающих точное решение в замкнутой форме. Так, для простейших случаев с постоянными коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, выводятся явные формулы, демонстрирующие роль условий разрешимости (типа условия нормальной разрешимости) [2].

Статья избегает привязки к физическим или техническим приложениям, концентрируясь на математической технике. При этом все примеры сопровождаются подробными выкладками, что делает материал доступным для изучения. Работа может служить основой для дальнейшего исследования более сложных сингулярных уравнений, а также полезна при подготовке учебных курсов по интегральным уравнениям.

2. Общие сведения. Прежде чем изучать сами сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши, необходимо вспомнить некоторые теоремы и определения из курса теории комплексной переменной, для этого воспользуемся книгой [4]. Первое определение, которое нам будет необходимо, это логарифмическая функция.

Определение 1.1. *Логарифмической функцией комплексной переменной называется многозначная функция вида:*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

При $k = 0$ значение этой многозначной функции называется главным значением и будем обозначать ln.

Определение 1.2. *Степенная функция $w = z^a$ с комплексным произвольным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством*

$$w = z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Также важным понятием является понятие аналитической функции [3].

Определение 1.3. *Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.*

Для вывода формул Сохоцкого нам понадобится интегральная теорема Коши и формулы которые из нее следуют.

Теорема 1.1. *Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D, тогда интеграл по любой замкнутой кривой L из D от этой функции равен нулю, то есть*

$$\oint_L f(z)dz = 0. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы есть например в [3]. Из [2] приведем интегральные формулы Коши, в том виде в котором мы будем ими пользоваться. Если функция $f(z)$ аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ + L$, то имеет место следующая формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть теперь $f(z)$ аналитична в D^- и непрерывна в $D^- + L$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^-. \end{cases} \tag{3}$$

За L здесь мы будем подразумевать некторый гладкий замкнутый контур. Область лежащую внутри будем обозначать за D^+, а соотвественно за D^- область дополнительную к $D^+ + L$. За положительное направление обхода контура L будем понимать то, при котором область D^+ находится слева.

Пусть теперь τ – комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ – непрерывная функция точек контура, а L уже может быть и незамкнутым.

Определение 1.4. *Интегралом типа Коши называется интеграл вида:*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{4}$$

функцию $\varphi(\tau)$ принято называть плотностью, а $\dfrac{1}{\tau - z}$ – ядром.

Определение 1.5. *Аналитическую функцию $\Phi(z)$, которая определяется в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях D^+ и D^-, двумя самостоятельными выражениями $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, будем называть кусочно-аналитической функцией.*

Отметим важное свойство, функция $\Phi(z)$, представленная интегралом типа Коши (4), в бесконечно удаленной точке обращается в нуль. То есть функция представимая интегралом типа Коши, необходимо удовлетворяет условию:

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{5}$$

Доказательство этого свойства, также того, что оно является и достаточным при соблюдении некоторых дополнительных функциональных ограничений, можно посмотреть в [2, 9].

3. Главное значение интеграла типа Коши. Рассмотрим при помощи книг [1, 3, 8] интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c} \qquad (a < c < b).$$

Если будем вычислять как несобственный, то получим:

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[-\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x - c} \right] = \ln\frac{b - c}{c - a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{6}$$

видно, что предел последнего слагаемого в (6) зависит от стремления ε_1 и ε_2 к нулю. То есть интеграл, понимаемый как несобственный не существует. Его называют особым или сингулярным интегралом. Однако, интегралу (6) можно придать смысл, положим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon. \tag{7}$$

Определение 1.7. *Главным значением по Коши особого интеграла*

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \qquad (a<c<b),$$

называется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\Big].$$

Учитывая (6) и (7), имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a} \qquad (a<c<b). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь более общий случай, пусть $\varphi(x)$ – некоторая функция удовлетворяющая условию Гельдера (условию Гельдера), в интервале (a,b), тогда получим интеграл вида:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c},$$

мы будем рассматривать его в смысле главного значения, тогда получим:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\int_a^b\frac{dx}{x-c},$$

первое слагаемое сходится как несобственный, так как в силу условия Гельдера

$$\Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\Big|<\frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}},$$

а второй интеграл является интегралом (8). То есть делая заключения, получаем, что особый интеграл где $\varphi(x)$ – некоторая функция удовлетворяющая условию Гельдера, в интервале (a,b) существует в смысле главного значения по Коши и равен

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

4. Формулы Сохоцкого. Для дальнейшей работы мы выведем формулы Сохоцкого в том виде, в котором они нам понадобятся в дальнейшем [8]. Напомним, что формулы возникают, при изучении поведения интеграла типа Коши на самом контуре интегрирования.

Лемма 1.1. *Если плотность $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера и точка t не совпадает с концами гладкого контура L, то функция*

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau \tag{9}$$

ведет себя при переходе через точку $z=t$ контура как функция непрерывная, т. е. она имеет определенное предельное значение при приближении z к t с любой стороны контура по любому пути:

$$\lim_{z\to t}\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau=\psi(t).$$

Доказательство этой леммы можно посмотреть например в [2]. Рассмотрим теперь вопрос о существовании предельных значений интеграла типа Коши на контуре интегрирования и установить связь между ними и особым интегралом. Пусть

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{10}$$

где $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Пусть контур L замкнут и гладким. Если L незамкнут, мы дополним до замкнутого, положив на этой кривой $\varphi(\tau)=0$.

Мы возьмем функцию вида (9), для исследования предельных значений $\Phi(z)$ в некоторой точке t контура и обозначим за $\Phi^+(z)$, $\psi^+(t)$ предельные значения функции (9) и (10) при стремлении точки z изнутри L к точке t контура, а $\Phi^-(t)$, $\psi^-(t)$ – при стремлении извне. Обозначать направление перехода к пределу мы будем соотвественно $z\longrightarrow t^+$ и $z\longrightarrow t^-$. Значение функций (9) и (10) в точке t контура будем обозначать $\Phi(t)$ и $\psi(t)$, заметим, что $\Phi(t)$ означает особый интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

понимаемый в смысле главного значения. Зная, что (см. [3])

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \\ \pi i, & z \in L, \end{cases} \tag{11}$$

имеем

$$\psi^+(t) = \lim_{z \to t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi(t)^+ - \varphi(t),$$

$$\psi^-(t) = \lim_{z \to t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi(t)^-,$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Из леммы 1.1 мы знаем, что функция $\phi(t)$ непрерывна, значит правые части равенств выше должны совпадать, то есть

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t). \tag{12}$$

Из (12) получаем формулы Сохоцкого:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{aligned} \tag{13}$$

особый интеграл понимается в смысле главного значения. Давайте теперь сложим и вычтем формулы (13), тогда получим

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{14}$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{15}$$

этими формулами мы будем активно пользоваться.

5. Задача Римана для односвязной области. При решении сингулярных интегральных уравнений возникает задача Римана, которая формулируется следующим образом [2, 6]: требуется найти две функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ (или одну кусочно-аналитическую функцию), удовлетворяющие условиям:

- $\Phi^+(z)$ аналитична в области D^+,
- $\Phi^-(z)$ аналитична в области D^-, включая точку $z = \infty$,

на контуре L эти функции связаны заданным линейным соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \qquad \text{(однородная задача)} \tag{16}$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad \text{(неоднородная задача).} \tag{17}$$

Функцию $G(t)$ будем называть коэффициентом задачи Римана, а функцию $g(t)$ – ее свободным членом.

Перед описанием решения общей задачи Римана рассмотрим частный случай — задачу о скачке. В классической постановке [2, 8] она формулируется так: пусть на контуре L задана функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию Гельдера. Требуется найти кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$, где:

- $\Phi(z) = \Phi^+(z)$ аналитична в D^+,
- $\Phi(z) = \Phi^-(z)$ аналитична в D^- (включая $z = \infty$) и $\Phi^-(\infty) = 0$,
- На контуре L выполняется условие скачка.

Условие скачка в аналитическом виде выглядит следующим образом:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t). \tag{18}$$

Мы знаем, из формулы (15), что такой функцией является функция вида (10). Покажем единственность, пусть таких функций две тогда имеем:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t),$$

но тогда по известной теореме Лиувилля (см. [1, 2, 8]), так как $\Phi^-(\infty) = 0$ и скачок на линии L равен нулю, то есть функция аналитическая во всей плоскости, получим, что разность двух решений равна тождественно нулю.

Теперь введем определение индекса.

Определение 1.8. *Индексом $\varkappa$ функции $G(t)$ по контуру L называется приращение ее аргумента разделенное на 2π при обходе кривой L в положительном направлении:*

$$\varkappa = \mathrm{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L.$$

Пусть теперь N_+ и N_- – число нулей искомых функций соотвественно в областях D^+ и D^-. Если взять индекс обеих частей равенства (16) получим:

$$N_+ + N_- = \mathrm{Ind}G(t) = \varkappa. \tag{19}$$

Индекс коэффициента называется индексом задачи Римана. Рассмотрим три возможных случая.

Пусть индекс $\varkappa = 0$. В этом случае $\ln G(t)$ является однозначной функцией на L. Из соотношения (19) следует, что $N_+ = N_- = 0$, что означает отсутствие нулей у решения $\Phi(z)$ во всей комплексной плоскости. Поскольку $\Phi(z)$ не имеет нулей, функции $\ln \Phi^{\pm}(z)$ аналитичны в областях $D^{\pm}$ соответственно и, следовательно, однозначны. Теперь, логарифмируя граничное условие (18), получим,

$$\ln \Phi^+(z) - \ln \Phi^-(z) = \ln G(t).$$

Для последнего логарифма, можно выбрать любую ветвь, окончательный результат от выбора ветви не зависит [1]. Получили задачу о скачке, при дополнительном условии $\ln \Phi^-(\infty) = 0$, это задача вида (16), решением которой является функция вида (10), в которой нужно сделать преобразования согласно изменению условия, итого получаем:

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{20}$$

Мы будем обозначать в дальнейшем этот интеграл как $\Gamma(z)$.

То есть решениями краевой задачи (16), удовлетворяющими условию $\Phi^-(\infty) = 1$, будут получаемые из формул (13) функции

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}. \tag{21}$$

Условие $\Phi^-(\infty) = 1$ можно отбросить, тогда в формуле (20) нужно добавить произвольное постоянное слагаемое и решение задачи будет иметь вид

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)},$$

где A – произвольная постоянная. Так как $\Gamma^-(\infty) = 0$, то A это значение $\Phi^-(z)$ на бесконечности. Обобщая все выше сказанное, можно заключить, что при $\varkappa = 0$ и при произвольном $\Phi^-(z) \neq 0$, решение содержит одну произвольную постоянную, то есть имеется одно линейно независимое решение.

6. Каноническая функция. Прежде чем переходить к выводу формул для однородной и неоднородной задачи Римана в более общим случае, то есть когда индекс не равен нулю. Чтобы решить такую, задачу необходимо сначала ввести определение и построить каноническую функцию [2].

Определение 1.9. *Канонической функцией $X(z)$ называется функция, удовлетворяющая условию (16) и кусочно аналитическая всюду в плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, где порядок ее равен индексу задачи.*

Построим эту функцию. Запишем условие (16) в виде

$$\Phi^+(z) = t^{\varkappa}t^{-\varkappa}G(t)\Phi^-(z),$$

тогда функция $t^{-\varkappa}G(t)$ имеет нулевой индекс (так как у $G(t)$ по условию индекс равен $\varkappa$), представим эту функцию с помощью формул (20) и (21), тогда имеем

$$t^{-\varkappa}G(t) = \frac{e^{\Gamma^+(z)}}{e^{\Gamma^-(z)}}, \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(t)]}{\tau - z}d\tau, \tag{22}$$

теперь легко получим выражение для канонической функции:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \qquad X^-(z) = z^{\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}. \tag{23}$$

Из $X^+(z) = G(t)X^-(z)$, получим представление для коэффициента задачи Римана:

$$G(t) = \frac{X^+(z)}{X^-(z)}, \tag{24}$$

заметим, что при $\varkappa \geq 0$ функция $X(z)$ имея на бесконечности нуль порядка $\varkappa$, является одним из частных решений краевой задачи (16), а при $\varkappa < 0$ она имеет на бесконечности полюс порядка $|\varkappa|$ и уже не является решением.

7. Решение задачи Римана. В этом разделе дадим формулы, для решения задачи Римана. Итак, пусть $\varkappa = G(t)$ – целое, тогда подставляя формулу (24) в (16), получим

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)},$$

после проведённых преобразований мы получили равенство, в левой части которого находится граничное значение функции, аналитической в области D^+, а в правой части – граничное значение функции, аналитической в области D^-. При этом функция в D^- имеет на бесконечности порядок роста не ниже $-\varkappa$; это свойство следует из определения функции $X(z)$.

Согласно принципу непрерывности [3], функции, соответствующие левой и правой частям равенства, являются аналитическими продолжениями друг друга на всю комплексную плоскость. Исключение составляет, возможно, лишь бесконечно удалённая точка: в случае $\varkappa > 0$ в ней может существовать полюс порядка не выше $\varkappa$.

Отсюда, по теореме Лиувилля:

- При $\varkappa \geqslant 0$ эта единая аналитическая функция является многочленом степени $\varkappa$ с произвольными коэффициентами.

- При $\varkappa < 0$ по той же теореме Лиувилля функция должна быть постоянной. Однако, поскольку на бесконечности она обращается в ноль (в силу условия роста), из этого следует, что она тождественно равна нулю. Это означает, что задача имеет только тривиальное решение.

В дальнейшем мы будем называть неразрешимыми задачи, которые допускают исключительно тривиальные решения.

Резюмируя, получили. При $\varkappa \geq 0$ задача (16) имеет $\varkappa + 1$ линейно независимых решений вида

$$\Phi^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = z^{k-\varkappa} P_\varkappa(z) e^{\Gamma^-(z)}, \qquad (k = 0, 1, \dots, \varkappa), \tag{25}$$

а общее решение задается формулами вида:

$$\Phi^+(z) = P_\varkappa(z) e^{\Gamma^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = z^\varkappa P_\varkappa(z) e^{\Gamma^-(z)}, \tag{26}$$

где $\Gamma(z)$ это функция вида (22), а $P_\varkappa(z)$ многочлен степени $\varkappa$. При $\varkappa < 0$ задача (16) неразрешима.

Рассуждая аналогично получим, решения для неоднородной задачи Римана. В случае при $\varkappa \geq 0$ задача (17) разрешима при любом $g(t)$ и общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_\varkappa(z), \tag{27}$$

при $\varkappa = -1$, задача также разрешима и имеет единственное решение. При $\varkappa < -1$ необходимо и достаточно для разрешимости, чтобы выполнялись условия:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, -\varkappa - 1), \tag{28}$$

тогда решение задачи задается формулой (27), где нужно взять $P_\varkappa(z) \equiv 0$.

Отметим, что мы рассматривали задачу в односвязной области, если область многосвязная, то вводится вспомогательная функция, которая сводит задачу к простейшему случаю и решения строятся по аналогии как в односвязной, с поправкой на введенную функцию подробно это описано в книгах [2, 8], мы будем пользоваться в статье уже готовы результатами из них.

8. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши. В этом пункте введем основные определения [2, 8, 10].

Определение 1.10. *Сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши, называется уравнения типа*

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \tag{29}$$

$a(t), f(t), M(t,\tau)$ – *удовлетворяют условию Гельдера.* В (29) интеграл понимается, в смысле главного значения, контур L многозначный, то есть состоящий из $m+1$ замкнутых гладких кривых

$$L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m,$$

их расположение показано на рисунке 1.

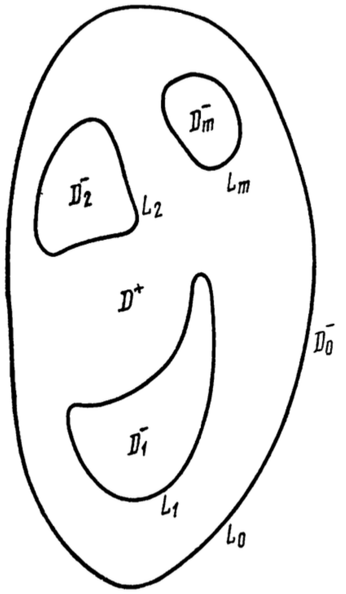

Рис. 1. Контур L

Представим

$$\frac{M(t,\tau)}{\tau - t} \quad \text{(называется ядром)}$$

в виде:

$$\frac{M(t,\tau)}{\tau - t} = \frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t} + \frac{M(t,t)}{\tau - t}$$

и введем обозначения

$$M(t,t) = b(t), \qquad \frac{1}{\pi i}\frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t} = k(t,\tau), \tag{30}$$

тогда переписывая уравнение (29) в виде

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t). \tag{31}$$

Из (30) следует очевидное замечание, что функция $b(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на всем контуре L, в свою очередь $k(t,\tau)$ в точке $\tau = t$, не удовлетворяет этому условию, но в ней справедлива оценка

$$|k(t,\tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^{1-\lambda}} \qquad (0 < \lambda \leq 1).$$

Уравнение (31) называется полным.

Определение 1.11. *Уравнение вида:*

$$K^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \tag{32}$$

называется характеристическим уравнением. Оператор K° называется характеристическим оператором, а интеграл

$$\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

называется регулярной частью.

В статье мы будем решать именно характеристические уравнения, поэтому остановимся более подробно на них.

9. Характеристическое уравнение. Покажем, что уравнение (32) сводится к задаче Римана, подробно разобранной в пункте 5. Итак, пусть у нас есть кусочно-аналитическая функция, которая заданна интегралом типа Коши, плотность этого интеграла и есть наше искомое решение уравнения (32)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{33}$$

Тогда согласно формулам (14) и (15)

$$\begin{gathered} \varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \end{gathered} \tag{34}$$

подставляя в (32) получаем, после проведения преобразований относительно $\Phi^+(t)$:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{35}$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{36}$$

Так как наша искомая функция представлена выражением (33) она должна удовлетворять условия (5).

Определение 1.12. *Индексом интегрального уравнения (32), будем называть индекс коэффициента:*

$$\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Решая задачу (35) по формуле (34), получим решение (32). Чтобы установить равносильность (35) и (32), нужно показать, что и, обратно $\varphi(t)$, которая находится из решения (35) удовлетворяет (32). Для этого необходимо установить справедливость второй формулы в (34) (см. [2]).

Мы будем рассматривать случай не исключительный, то есть когда $a(t) \pm b(t) \neq 0$, также нормируем все уравнение, то есть разделим его на $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$, то есть

$$a^2(t) - b^2(t) = 1. \tag{37}$$

Теперь построим решение характеристического уравнения, выпишем по формулам из книги [2] решения задачи (35)

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa}\Pi(t)}}e^{\Gamma(t)}, \qquad X^-(t) = \sqrt{\frac{1}{t^{\varkappa}\Pi(t)G(t)}}e^{\Gamma(t)}$$

и

$$\Phi(z) = X(z)[\Phi(z) + P_{\varkappa-1}(z)],$$

пусть $\varkappa \geq 0$, и вычислим по формулам (13) получаем

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Phi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right],$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Phi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right],$$

где $\Phi(t)$ – особый интеграл (см. [2]). Произвольный многочлен взять в такой форме для удобства. Отсюда по (34)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]g(t) + X^+(t)\left[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]\left[\Phi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}\right].$$

На основании $\dfrac{X^-(t)}{X^+(t)} = \dfrac{1}{G(t)}$, а функцию $\Phi(t)$ выражаем явно. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right]g(t) + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right].$$

Подставим $X^+(t)$ из формулы выше, а также $G(t)$ и $g(t)$ из (36)

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t), \tag{38}$$

где

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)}},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}\Pi(\tau)\dfrac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right]}{\tau - t}d\tau,$$

$$\Pi(t) = \sum_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k}$$

коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют (37).

Сделаем замечание, о том, что если задача (35) может быть решена путем аналитического продолжения, удобнее искать решение (32) по (33), а не по формуле (38).

При $\varkappa < 0$, то в общем случае задача (35) неразрешима (см. пункт 7), она будет разрешима только при выполнение условий (28), эти условия будут условиями разрешимости и для (32). Если условия соблюдены, то решение (35) также задается формулой (38), где нужно положить $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$.

10. Решение характеристического уравнения. В этом пункте решим конкретную задачу, пусть есть характеристическое особое уравнение

$$t(t-2)\varphi(t) + \frac{t^2 - 6t + 8}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{t}, \tag{39}$$

будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит области D^+, а точка $z = 2 - D^-$.

Как следует из пункта (9), более удобно решать эту задачу по формуле (33), сведем нашу задачу, к задаче Римана (17). Для этого вводим функцию вида (33) и согласно (34), будем иметь уравнение вида:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

где $G(t)$ и $g(t)$ задаются с помощью формулы (36)

$$G(t) = \frac{t(t-2) - (t^2 - 6t + 8)}{t(t-2) + t^2 + 6t - 8} = \frac{4t - 8}{2t^2 - 8t + 8} = \frac{2(t-2)}{(t-2)^2} = \frac{2}{t-2},$$

$$g(t) = \frac{1}{t(t(t-2) + t^2 - 6t + 8)} = \frac{1}{2t^3 - 8t^2 + 8t},$$

то есть условие (39) принимает вид:

$$\Phi^+(t) = \frac{2}{t-2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2t^3 - 8t^2 + 8t},$$

очевидно, что индекс этой задачи равен нулю. Представим $G(t)$ в виде многочлена

$$\frac{p(t)}{q(t)}$$

и разложим их в произведение

$$p(t) = p_+(t)p_-(t), \qquad q(z) = q_+(t)q_-(t),$$

где $p_+(t)$, $q_+(t)$ многочлены, корни которых находятся в D^+, а у $p_-(t)$, $q_-(t)$ в D^-. Тогда, в нашем случае получаем:

$$p_+ = 2, \qquad p_-(t) = 1, \qquad q_+(t) = 1, \qquad q_-(t) = \frac{1}{t-2}. \tag{40}$$

Каноническими функциями являются в нашем случае:

$$X^+ = \frac{p_-}{q_-}, \qquad X^- = \frac{q_+}{p_+}.$$

Тогда на основании формул данных в пункте 9, получаем решение задачи в виде:

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{p_-(z)}{q_-(z)}\Psi^+(z), \\ \Phi^+(z) &= \frac{q_+(z)}{p_+(z)}\Psi^-(z), \end{aligned} \tag{41}$$

где $\Psi(z)$ выражается по формуле [2]:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{2\tau(\tau-2)(\tau-z)},$$

Вычислим этот интеграл с помощью вычетов, пусть сначала $z \in D^+$, тогда внутри L два полюса первого порядка $\tau = z$ и $\tau = 0$, для первого имеем:

$$\operatorname*{Res}_{\tau=z} f(\tau) = \frac{1}{2z(z-2)},$$

для второго

$$\operatorname*{Res}_{\tau=0} f(\tau) = \frac{1}{4z},$$

тогда по известной теореме [3], имеем

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{4z} + \frac{1}{2z(z-2)} = \frac{1}{4(z-2)}. \tag{42}$$

Теперь при $z \in D^-$, мы имеем один полюс $\tau = 0$ внутри L, тогда все по той же теореме имеем:

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{4z}.$$

Подставляя значение выше и из (40), (42) в (41), получим

$$\begin{gathered} \Phi^+(t) = \frac{1}{t-2}\frac{1}{4(z-2)} = \frac{1}{4(t-2)^2}, \\ \Phi^-(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{4t} = \frac{1}{8t}, \end{gathered} \tag{43}$$

теперь подставим (44) в первую формулу из (34), тем самым найдем искомую функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{4(t-2)^2} - \frac{1}{8t} = \frac{-t^2+6t-4}{8t(t-2)^2}.$$

Решение этой задачи можно также найти по формуле (38), но это будет более громоздко, как уже отмечалось в пункте 9.

7. Заключение. В статье были рассмотрены сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши, а именно характеристические уравнения, были даны общие определение, а также показа связь этой задачи с задачей Римана и формулами Сохоцкого. В последнем пункте была решена конкретное характеристическое уравнение с ядром типа Коши. Особое внимание было уделено уравнениям допускающим точное решение в замкнутой форме, но также была показана формула для более общего случая.

Целью статьи было емко и понятно ввести необходимые определение и показать на конкретном примере как они применяются при решении конкретной задачи, решение примера сопровождается подробными выкладками, чтобы материал был доступен широкому кругу читателей.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоценимое внимание и поддержку, за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. - 2-е изд., переработ. и доп. - Москва.: Наука, 1982. – 336с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов - 3-е изд., переработ. и доп. – Москва: Наука, 1977. – 640с.
3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. Москва: Наука, 1975. – 303с.
4. Минькова Р.М. Функции комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2013. – 72 с.
5. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин - Москва: Физматгиз, 1959. – 232с.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин - Москва: Высшая школа, 1977. – 431с.

7. Михлин С.Г. Многомерные синуглярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин – Москва: Физматгиз, 1962. – 256с.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике./ Н.И. Мусхелишвили - 3-е изд., переработ. и доп. - Москва, 1968. – 512 с.
9. Прездорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Прездорф / перевод Е. Д. Соломенцов - Москва: Мир, 1979. – 493 с.
10. Солдатов А.П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае. / А.П. Солдатов, Т.М. Урбанович // Научные ведомости: серия: Математика. Физика, 2011. – № 17

Поступила в редакцию 12.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Токарев Денис Алексеевич – магистрант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию