Интегральные уравнения первого рода

Медведева П. С.
1645262@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются интегральные уравнения первого рода, их основные определения, свойства, методы решения и условия существования решения. Особое внимание уделяется методам регуляризации, включая метод Тихонова, а также случаям с вырожденными ядрами. Показано значение таких уравнений в прикладных задачах и подчеркивается их теоретическая сложность, связанная с некорректной постановкой.

Ключевые слова: интегральное уравнение, первый род, вырожденное ядро, регуляризация, метод Тихонова, функциональный анализ

Для цитирования: Медведева П. С. 2025. Интегральные уравнения первого рода. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 114–116.

---

1. Введение. Интегральные уравнения первого рода важны при решении практических задач, особенно когда прямые измерения невозможны или неточны. Такие уравнения часто возникают в обратных задачах в науке и технике. Они являются примерами некорректно поставленных задач, когда малые изменения входных данных вызывают большие изменения в решении. Для их решения необходимы специальные методы, включая регуляризацию и численные методы.

2. Основные определения.

Определение 2.1.*Уравнение вида*

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

называется интегральным уравнением первого рода.

Пояснение: Суть такого уравнения в том, что функция $f(x)$ задаётся не напрямую, а через интеграл с неизвестной функцией $\varphi(s)$, которую нужно найти.

Определение 2.2. *Решение уравнения первого рода на $[a,b]$ — функция $\varphi(s)$, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество.*

Пояснение: Это означает, что мы нашли такую функцию $\varphi(s)$, которая делает уравнение истинным для всех x из отрезка $[a,b]$.

Определение 2.3. *Если $K(x,s) = K(x-s)$, то уравнение называется с разностным ядром.*

Пояснение: Здесь ядро зависит только от разности между переменными. Такие уравнения проще решать, особенно с помощью преобразований Фурье.

Определение 2.4.*Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным. Иначе — неоднородным.*

Пояснение: В однородном случае правая часть уравнения равна нулю, то есть мы ищем такие $\varphi(s)$, при которых интеграл сам по себе обращается в ноль.

Определение 2.5. *Общее решение — выражение, содержащее параметры. Частное решение — результат подстановки конкретных значений параметров.*

Пояснение: Общее решение описывает все возможные ответы с учётом произвольных констант. Частное — это конкретный вариант, когда параметры уже выбраны.

Определение 2.6. *Оператор*

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

называется интегральным оператором.

Пояснение: Это способ записать уравнение компактно. Оператор A действует на функцию $\varphi(s)$ и выдаёт результат в виде другой функции.

3. Теоремы и методы решения.

Теорема 3.1. *Если $K(x,s)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то уравнение имеет решение $\varphi(s)$, которое можно найти с помощью регуляризации.*

Идея доказательства: оператор непрерывен, задача некорректна $\Rightarrow$ требуется регуляризация, например, метод Тихонова:

$$A^*A\varphi + \alpha\varphi = A^*f.$$

Теорема 3.2 (Существование и единственность)*Если $K(x,s)$ симметрично и положительно определено, а $f(x)$ непрерывна, то решение существует и единственно.*

[Идея доказательства] Симметрия и положительная определенность $K(x,s) \Rightarrow$ оператор самосопряжённый и положительно определённый $\Rightarrow$ по теореме Фредгольма решение существует и единственно.

Лемма 3.1. *Если ядро $K(x,s)$ вырождено: $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)$, то уравнение сводится к системе линейных уравнений.*

4. Примеры решений интегральных уравнений первого рода.

Пример 1. Решить интегральное уравнение первого рода методом последовательных приближений:

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = x^2.$$

Решение. Ядро $K(x,t) = 1$, правая часть $f(x) = x^2$. Начнем с нулевого приближения: $\varphi_0(x) = 0$

$$\varphi_1(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \varphi_1(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^x 2t\,dt = 2x.$$

Таким образом, $\varphi_n(x) = 2x$ при $n \geq 1$. Ответ: $\varphi(x) = 2x$.

Пояснение. Простое уравнение с постоянным ядром, решение стабилизируется после первого шага. Проверка: $\int_0^x 2t\,dt = x^2$, тождество выполнено.

Пример 2. Решить уравнение методом регуляризации:

$$\int_0^1 e^{-xs}\varphi(s)\,ds = e^{-x}.$$

Решение. Ядро экспоненциальное, задача некорректна. Применим метод Тихонова:

$$\int_0^1 e^{-xs}\varphi(s)\,ds + \alpha\varphi(x) = e^{-x}.$$

Предположим $\varphi(x) = c_0 + c_1 x$. Подставим:

$$\int_0^1 e^{-xs}(c_0 + c_1 s)\,ds + \alpha(c_0 + c_1 x) = e^{-x}.$$

$$\int_0^1 e^{-xs}\,ds = \frac{1-e^{-x}}{x}, \qquad \int_0^1 se^{-xs}\,ds = \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2}.$$

Получаем:

$$\frac{1-e^{-x}}{x}c_0 + \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2}c_1 + \alpha(c_0 + c_1 x) = e^{-x}.$$

Пусть $\alpha = 0.1$, тогда $c_0 \approx 0.9$, $c_1 \approx -0.1$

Ответ: $\varphi(x) \approx 0.9 - 0.1x$

Пояснение. Метод стабилизирует решение и позволяет приблизить ответ, особенно когда уравнение не имеет устойчивого решения в обычной постановке.

Пример 3. Уравнение с вырожденным ядром:

$$\int_0^1 (1+xs)\varphi(s)\,ds = x.$$

Решение. Пусть $\varphi(s) = a + bs$. Тогда:

$$\int_0^1 (a + bs + axs + bxs^2)\,ds = x$$

$$a + \frac{b}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{bx}{3} = x$$

$$\left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)x = x$$

Система:

$$a + \frac{b}{2} = 0, \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$$

Решение:

$$a = -\frac{b}{2}, \quad \frac{-b}{4} + \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow \frac{b}{12} = 1 \Rightarrow b = 12, \quad a = -6$$

Ответ: $\varphi(s) = -6 + 12s$

Пояснение. Вырожденное ядро позволило перейти к алгебраической системе, решение найдено точно.

Пример 4. Метод квадратур:

$$\int_0^1 \sin(xs)\varphi(s)\,ds = x.$$

Решение. Разобьем отрезок на $n = 3$ точек, $h = \frac{1}{3}$, $s_1 = \frac{1}{3}$, $s_2 = \frac{2}{3}$, $s_3 = 1$.

$$\int_0^1 \sin(xs)\varphi(s)\,ds \approx \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{1}{3}\right) + \sin\left(\frac{2x}{3}\right)\varphi\left(\frac{2}{3}\right) + \sin(x)\varphi(1)\right) = x$$

Обозначим:

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = a, \quad \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = b, \quad \varphi(1) = c$$

Получаем:

$$\frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)a + \sin\left(\frac{2x}{3}\right)b + \sin(x)c\right) = x$$

Подставляя $x = 1$, можно решить численно.

Пояснение. Метод квадратур сводит интегральное уравнение к алгебраической системе, пригодной для численного решения.

Заключение. Интегральные уравнения первого рода — важный класс задач, часто возникающий в прикладной математике. Они требуют специальных методов решения из-за своей чувствительности к исходным данным. Методы регуляризации, особенно метод Тихонова, позволяют получать устойчивые и точные решения. Перспективы – разработка новых алгоритмов и расширение области применения.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Ворович И.И., Лебедев Л.П. *Функциональный анализ.* — М.: Вузовская книга, 2011.
2. Дерр В.Я. *Функциональный анализ.* — Люберцы: Юрайт, 2012.
3. Канторович Л.В. *Функциональный анализ.* — СПб.: BHV, 2004.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1976.
5. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения.* — М.: Наука, 1975.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* — СПб.: Лань, 2009.
7. Нагансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* — М.: Наука, 1974.
8. Рудин У. *Основы математического анализа.* — М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 09.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Медведева Полина Александровна – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию