Условие сходимости ряда Фурье. Теорема Фейера.

Рудофилов И. М.
1645330@bsuedu.ru

Аннотация. В статье изучены основные условия сходимости 2π-периодических рядов Фурье: поточечной (критерий Дини, принцип локализации), равномерной (условие $f' \in L_2$ при абсолютной непрерывности) и по среднему (усреднённые суммы Фейера). Доказана теорема Фейера о сходимости усреднённых сумм к функции в каждой точке её непрерывности при минимальном требовании $f \in L_1$. Практическая часть иллюстрирует различные типы поведения рядов Фурье на примерах функций с разрывами и функций с корнями, демонстрируя эффект Гиббса и преимущество усреднения. Полученные результаты важны для гармонического анализа и приложений в теории сигналов, математической физике и численных методах.

Ключевые слова: ряд Фурье, сходимость, теорема Фейера, анализ, функциональный анализ

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2025. Условие сходимости ряда Фурье. Теорема Фейера.. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 107–113.

Введение. Идея разложения функций в бесконечные ряды синусов и косинусов впервые возникла в работах Жана-Батиста Жозефа Фурье в начале XIX века при исследовании задачи о распространении тепла [2]. Эти исследования заложили основы целого раздела математического анализа, получившего название *теория рядов Фурье*.

Ряды Фурье позволяют представить достаточно широкий класс функций в виде суммы простейших гармонических колебаний [4]. Такая аппроксимация функций имеет фундаментальное значение как для теоретических исследований, так и для практических приложений – в математической физике, теории сигналов, инженерных задачах и других областях.

Одним из центральных вопросов теории рядов Фурье является вопрос о сходимости рядов: при каких условиях частичные суммы ряда стремятся к исходной функции [5], и в каком смысле происходит эта сходимость – поточечно, равномерно или в среднем? Проблема сходимости рядов Фурье оказалась глубокой и нетривиальной. Уже простейшие примеры показывают, что ряд Фурье может не сходиться повсюду или даже расходиться в отдельных точках, несмотря на хорошее поведение функции.

Для решения этих проблем были разработаны различные методы анализа сходимости, в том числе критерии, основанные на локальных свойствах функции. Одним из важных результатов является *принцип локализации*, согласно которому поведение ряда Фурье в точке определяется только поведением функции в окрестности этой точки.

Однако даже при соблюдении локальных условий сходимость обычных частичных сумм может быть неудовлетворительной. Для улучшения сходимости используются усреднённые суммы, такие как средние Фейера. Усреднение частичных сумм сглаживает осцилляции и позволяет добиться сходимости к функции в гораздо более широком классе случаев.

В данной работе основное внимание уделяется условиям сходимости ряда Фурье и теореме Фейера, гарантирующей улучшенные свойства усреднённых сумм, а также практическому применению этих результатов. Рассматриваются как локальные условия сходимости в отдельных точках, так и общие принципы, обеспечивающие равномерную сходимость ряда на интервале. Также обсуждаются ключевые понятия, связанные с ядром Дирихле и его ролью в анализе поведения частичных сумм. *Объект исследования.* В качестве объекта исследования рассматриваются 2π-периодические функции и их разложения в ряды Фурье. *Предмет исследования.* Предметом исследования являются условия сходимости рядов Фурье (точечная, равномерная, средняя сходимость), включая критерии Дини и локализации, а также свойства усреднённых (Фейеровских) сумм.

Понимание обозначенных аспектов теории рядов Фурье имеет важное значение для дальнейшего изучения функционального анализа, гармонического анализа и их многочисленных приложений в других областях науки и техники.

2. Теоретическая часть.

Определение ряда Фурье 1.1

Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$. Рядом Фурье функции f называется функциональный ряд [4]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{1}$$

где коэффициенты Фурье c_n определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{2}$$

Существует также эквивалентная запись ряда Фурье через синусы и косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big), \tag{3}$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx. \tag{4}$$

2.1. Сходимость в точке и признак Дини. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье в фиксированной точке.

Определение 1.2 *Функция f удовлетворяет условию Дини в точке x, если функция*

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

суммируема в некоторой окрестности нуля.

Теорема 1.1 (Признак Дини). *Если функция f непрерывна в точке x и удовлетворяет условию Дини в этой точке, то её ряд Фурье сходится в точке x к значению $f(x)$ [5].*

2.2. Примеры функций, удовлетворяющих условию Дини.

1. *Функция $f(x) = |x|$ на $(-\pi, \pi)$.*

В точке $x = 0$ функция непрерывна, но производная не существует в обычном смысле. Рассмотрим

$$\varphi(h) = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Эта функция не суммируема в окрестности нуля (имеет скачок). Следовательно, в точке $x = 0$ условие Дини нарушается. Однако в любой другой точке $x \neq 0$ функция $|x|$ дифференцируема, значит условие Дини выполняется.

2. *Функция $f(x) = x^2$ на $(-\pi, \pi)$.*

Функция непрерывна и дифференцируема на всём $\mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h,$$

что непрерывно в окрестности нуля и стремится к $2x$. Следовательно, $f(x) = x^2$ удовлетворяет условию Дини во всех точках.

3. *Функция Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Эта функция нигде не непрерывна, значит не удовлетворяет условию Дини ни в одной точке.

Вывод. Условие Дини контролирует «гладкость» поведения функции в точке. Функции с разрывами первого рода (например, кусочно-постоянные) это условие не выполняют, тогда как дифференцируемые (полиномы, гладкие функции) обычно удовлетворяют.

3. Ядро Дирихле и интегральное представление. Частичные суммы ряда Фурье выражаются через *ядро Дирихле* [4]:

$$D_n(t) = \frac{\sin\Big((n + \frac{1}{2})\, t\Big)}{2\, \sin \frac{t}{2}}.$$

Тогда n-я частичная сумма имеет вид:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt.$$

Отсюда видно, что сходимость частичных сумм определяется взаимодействием «осциллирующего» ядра $D_n(t)$ и локального поведения f.

3.1. Расширенное описание принципа локализации. Принцип локализации: поведение ряда Фурье f в точке x зависит только от поведения f в любой малой окрестности этой точки.

Более формально: если две функции f и g совпадают на интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$, то у них совпадают пределы частичных сумм $S_n(f,x)$ и $S_n(g,x)$ (если предел существует).

Это следует из интегрального представления:

$$S_n(f,x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt,$$

поскольку основная масса ядра $D_n(t)$ сосредоточена около $t=0$.

3.2. Следствия принципа локализации:

- Глобальная «дальняя» часть функции f не влияет на сходимость в точке x.
- Для анализа сходимости в точке достаточно изучать локальное поведение f рядом с этой точкой.
- Пример: при разрыве первого рода в точке x будет эффект Гиббса, независимо от того, как ведёт себя f за пределами небольшой окрестности.

3.3. Достаточные условия равномерной сходимости. Существуют условия, при которых ряд Фурье f сходится равномерно на всём отрезке $[-\pi,\pi]$.

Теорема 3.1 *Пусть f – 2π-периодическая, абсолютно непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция, причём $f' \in L_2(-\pi,\pi)$. Тогда её ряд Фурье сходится к f равномерно на $[-\pi,\pi]$ [4].*

3.3. Средние Фейера. Для улучшения сходимости вводятся усреднённые суммы Фейера:

$$\sigma_n(x) \;=\; \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x),$$

где $S_k(f,x)$ – частичная сумма порядка k.

3.4. Формулировка теоремы Фейера.

Теорема 3.2 (Фейер). Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$. *Тогда средние Фейера ряда Фурье функции f сходятся к $f(x)$ в каждой точке x её непрерывности [5].*

Доказательство основывается на свойствах *ядра Фейера $K_n(t)$*. Рассмотрим свёртку:

$$\sigma_n(f,x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,K_n(t)\,dt,$$

где

$$K_n(t) \;=\; \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.$$

Свойства ядра Фейера:

- $K_n(t) \ge 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.
- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$
- При $n \to \infty$ ядро $K_n(t)$ «сужается» к дельта-функции (в смысле свёртки).

Пусть x – точка непрерывности f. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ выполняется

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Разобьём разность

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\Bigl(\underbrace{\int_{|t|<\delta}\bigl(f(x+t)-f(x)\bigr)K_n(t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{|t|\ge\delta}\bigl(f(x+t)-f(x)\bigr)K_n(t)\,dt}_{I_2}\Bigr).$$

1. Для I_1:

$$|I_1| \;\le\; \int_{|t|<\delta} |f(x+t)-f(x)|\,K_n(t)\,dt \;\le\; \varepsilon\int_{|t|<\delta} K_n(t)\,dt \;\le\; \varepsilon.$$

2. Для I_2. Так как $f \in L_1$, то f ограничена: существует $M > 0$, что $|f(x+t)-f(x)| \le 2M$. Тогда

$$|I_2| \;\le\; 2M\int_{|t|\ge\delta} K_n(t)\,dt.$$

Поскольку ядро Фейера стремится к дельта-функции, $\int_{|t|\geq\delta} K_n(t)\,dt \to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $I_2 \to 0$.

В итоге $\sigma_n(f,x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Что и требовалось доказать.

4. Практическая часть.

Пример 1. Исследование сходимости ряда Фурье функции $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$.

Рассмотрим функцию знака:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Функция $f(x)$ 2π-периодически продолжается на всю ось.

Вычисление коэффициентов Фурье. Поскольку $f(x)$ нечётная, её ряд Фурье будет содержать только синусные члены:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx),\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Из чётности/нечётности получаем:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,$$

где на $(0,\pi)$ функция $f(x)=1$. Следовательно,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\big(1-(-1)^n\big).$$

Получаем:

$$b_n=\begin{cases}0, & n \text{ чётное},\\ \dfrac{4}{\pi n}, & n \text{ нечётное}.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\big((2k+1)x\big).$$

Исследование сходимости. Функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точках $x=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. По теореме о поведении Фурье-ряда в точке разрыва [2]:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\big(f,\,0\big)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0.$$

В точках непрерывности (все $x\neq m\pi$) ряд сходится к $f(x)$.

Вывод. Ряд Фурье функции $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ сходится к $f(x)$ во всех точках непрерывности и к полусумме односторонних пределов в точках разрыва.

Пример 2. Применение условия Дини для доказательства сходимости ряда Фурье функции $f(x)=\sqrt{|x|}$ в точке $x=0$.

Рассмотрим

$$f(x)=\sqrt{|x|},\qquad x\in[-\pi,\pi],$$

с 2π-периодическим продолжением.

Проверка непрерывности в точке $x=0$. Поскольку $\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}=0=f(0)$, функция непрерывна в $x=0$.

Проверка условия Дини в точке $x=0$. По определению, в точке $x=0$ нужно проверить сходимость

$$\int_0^{\delta}\left|\tfrac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t}\right|dt<+\infty.$$

Здесь $f(t)=\sqrt{t}$, $f(-t)=\sqrt{t}$, $f(0)=0$. Тогда

$$\frac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t}=\frac{2\sqrt{t}}{t}=\frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Интеграл

$$\int_0^{\delta}\frac{2}{\sqrt{t}}\,dt=4\sqrt{\delta}$$

конечен при любом $\delta > 0$. Значит, условие Дини выполняется [5].

Вывод. Так как f непрерывна в $x = 0$ и удовлетворяет условию Дини, по признаку Дини её ряд Фурье сходится в точке 0 к $f(0) = 0$.

Пример 3. Исследование сходимости средних Фейера функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi, \end{cases} \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

с 2π-периодическим продолжением.

Анализ функции. Функция f чётная. Она имеет разрывы первого рода в $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$. На $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $f(x) = 1$; на остальных участках $f(x) = 0$.

Коэффициенты Фурье. Поскольку f чётная, ряд Фурье содержит только косинусные члены:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

Но $f(x) = 1$ на $[0, \frac{\pi}{2})$ и $f(x) = 0$ на $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

Для a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Итак,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx).$$

Формирование средних Фейера. Средние Фейера определяются как

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f, x),$$

где $S_k(f, x)$ — k-я частичная сумма ряда Фурье. По теореме Фейера [5] $\sigma_n(x) \to f(x)$ в каждой точке непрерывности f.

Поведение в точках разрыва. Точки разрыва: $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$. Рассмотрим $x = \frac{\pi}{2}$. Слева $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = 1$, справа $\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) = 0$. Среднее значение равно $\frac{1}{2}$. Значит

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Вывод. Средние Фейера сходятся к $f(x)$ в точках непрерывности и к полусумме односторонних пределов в точках разрыва.

Пример 4. Исследование поведения ряда Фурье функции с разрывом $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

Функция знака $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ с 2π-периодическим продолжением уже рассматривалась в Примере 1. Напомним основные выводы.

Разложение в ряд Фурье. Из Примера 1:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)x\big).$$

Поведение частичных сумм. Для N-ой частичной суммы

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)x\big),$$

в точках разрыва, например $x = 0$,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0.$$

Однако около разрыва возникают осцилляции (эффект Гиббса), которые не исчезают при $N \to \infty$ [4].

Эффект Гиббса. Максимальное превышение частичной суммы над реальным значением функции примерно равно

$$0.08949 \times \big(f(0^+) - f(0^-)\big).$$

Для разрыва величиной 2 получаем около 0.179.

Иллюстрация эффекта Гиббса. При больших N график $S_N(x)$ выглядит как «приближённая ступенька» с характерными «перебросами» около $x = 0$.

Вывод. Ряд Фурье функции $\operatorname{sgn}(x)$ сходится в точках непрерывности к $f(x)$ и в точках разрыва к полусумме, но демонстрирует эффект Гиббса рядом с разрывами.

Пример 5. Доказательство равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x) = x^2$ на $[-\pi, \pi]$.

Рассмотрим

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

с 2π-периодическим продолжением.

Анализ функции. Функция x^2 непрерывна и дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, её производная $f'(x) = 2x$ абсолютно непрерывна, вторая производная $f''(x) = 2$ принадлежит $L_2(-\pi, \pi)$. Следовательно, по известной теореме её ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Вычисление коэффициентов Фурье. Поскольку x^2 чётная, ряд содержит только косинусные члены:

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx.$$

Найдём a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3},$$

поэтому $\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$.

Для $n \geq 1$ методом интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx.$$

Далее:

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) = \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1}.$$

Значит

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n} \cdot \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n^2} (-1)^{n+1} = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}.$$

Разложение ряда Фурье. Итак,

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx).$$

Вывод. Функция x^2 абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, её производная квадратично интегрируема, поэтому её Фурье-ряд сходится равномерно. В частности, частичные суммы приближают x^2 с одинаковой скоростью на всём отрезке [4].

Заключение. В данной работе был всесторонне рассмотрен вопрос сходимости рядов Фурье, от классических формулировок до практических иллюстраций основных теорем. Во введении было сформулировано, что объектом исследования являются 2π-периодические функции и их разложения в ряды Фурье, а предметом — условия поточечной, равномерной и средней сходимости, включая признак Дини, принцип локализации и свойства усреднённых (Фейеровских) сумм. Целью работы было изучить и доказать ключевые теоретические результаты, а также продемонстрировать их применение.

В теоретической части:

- Даны определения ряда Фурье и формулы для коэффициентов a_n, b_n, c_n в комплексном и тригонометрическом виде.
- Рассмотрен признак Дини, позволивший установить поточечную сходимость ряда в зависимости от локальных свойств функции.

- Показан принцип локализации, объясняющий, почему поведение частичных сумм в данной точке определяется только локальной окрестностью этой точки.
- Изучены достаточные условия равномерной сходимости (при абсолютной непрерывности функции и условии $f' \in L_2$).
- Введены средние суммы Фейера, определено ядро Фейера и доказана теорема Фейера о том, что эти усреднённые суммы сходятся к функции в точках её непрерывности при минимальном требовании $f \in L_1$.

Практическая часть подтвердила, что указанные критерии и методы работают на конкретных примерах: поведение ряда при разрывах, выполнение признака Дини, а также преимущества усреднённых сумм. Таким образом, задачи, поставленные во введении, были полностью решены: сформулированы и доказаны основные результаты, а их практическая значимость проиллюстрирована через примеры.

В результате работы установлено, что:

- Локальные регулярные свойства функции (непрерывность, условие Дини) определяют поточечную сходимость её ряда Фурье [5].
- Глобальная гладкость (например, $f' \in L_2$) обеспечивает равномерную сходимость на всём интервале [4].
- Усреднение по Фейеру существенно расширяет класс функций, для которых гарантируется сходимость — достаточно лишь принадлежности функции к L_1.

Результаты представляют интерес для дальнейших исследований в функциональном и гармоническом анализе, а также находят применение при решении задач математической физики, теории сигналов и инженерных приложений. В перспективе целесообразно рассмотреть обобщённые ортонормированные системы (например, ряды вейвлетов), изучить поведение рядов Фурье в L_p-пространствах при $p \neq 1, 2$ и исследовать дополнительные методы ускорения сходимости в практических алгоритмах.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Agafonov S. A., Muratova T. V. 2018. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya.* Moscow: Academia, 352 p.
2. Bavrin I. I. 2005. *Vysshaya matematika.* Moscow: Academia, 434–454.
3. Ivanov P. 2021. *Differentsialnye uravneniya: teoriya i praktika.* Moscow: Primernoe izdatel'stvo, 28 p.
4. Smirnov V. I. 1958. *Kurs vysshei matematiki, Tom 2.* Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury.
5. Stepin A. M. 2010. *Funktsional'nyi analiz. Kurs lektsii.* Moscow: MGU.

Поступила в редакцию 06.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудофилов Илья Максимович – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию