Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 100–106.

Гильбертово пространство. Проекции векторов в гильбертовых пространствах

Науменко Н. Н.
nikakort704@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются гильбертовы пространства и их применение в функциональном анализе для решения задач аппроксимации. Представлены основные определения и свойства гильбертовых пространств, включая скалярное произведение, ортогональность, полноту и базисы, а также теоремы об ортогональном разложении и наилучшем приближении. Рассмотрены примеры построения проекций в конкретных гильбертовых пространствах, включая построение ортогональной проекции на подпространство четных функций в $L_2[-1,1]$. Представленные решения задач демонстрируют возможность применения теоретических результатов для эффективного анализа свойств гильбертовых пространств и решения прикладных задач, таких как анализ сигналов.

Ключевые слова: функциональный анализ, гильбертово пространство, скалярное произведение, ортогональность,ортогональная проекция, подпространство, базис

Для цитирования: Науменко Н. Н. 2025. Гильбертово пространство. Проекции векторов в гильбертовых пространствах. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 100–106.

Введение. Гильбертовы пространства играют важную роль в функциональном анализе благодаря геометрической структуре, определяемой скалярным произведением. Одним из ключевых понятий является ортогональная проекция, позволяющая находить наилучшее приближение элемента заданным подпространством. В данной работе рассматриваются методы построения ортогональных проекций на конкретных примерах. Работа опирается на свойства ортогональности и теорему о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Проанализирована связь между проекционными операторами и коэффициентами, возникающими при разложении по ортогональному базису. Представлен процесс вычисления этих коэффициентов на примере задачи аппроксимации функции. Рассмотренные примеры демонстрируют, как свойства скалярного произведения используются для построения оптимальных приближений функций.

2. Гильбертово пространство. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $(\cdot,\cdot) : X^2 \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением на X, если:

1. $\forall x \in X \quad (x,x) \geq 0;$
2. $(x,x) = 0 \iff x = 0;$
3. $\forall x,y,z \in X \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z);$
4. $\forall x,y \in X \quad (x,y) = \overline{(y,x)}.$

«Линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым пространством. Полное евклидово пространство называется гильбертовым пространством» [1].

Для скалярного произведения справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

«Скалярное произведение порождает норму $||x|| = \sqrt{(x,x)}$. Произвольная норма порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству параллелограмма

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

» [5].

Полное относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ линейное нормированное пространство – гильбертово пространство.

В n-мерном евклидовом пространстве скалярное произведение двух векторов $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ обычно находится по формуле

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

а в n-мерном комплексном евклидовом пространстве:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Аналогичным образом вводится скалярное произведение в ряде бесконечномерных пространств, после чего они становятся гильбертовыми.

Пространство называется бесконечномерным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют линейно независимые векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.

Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если положить

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Пространство $L_2(a, b)$ комплексных функций становится гильбертовым, если положить

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

«Элементы x и y гильбертова пространства H называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$» [2].

Если фиксированный элемент $x \in H$ ортогонален каждому элементу некоторого множества $E \subset H$, то говорят, что x ортогонален E, и пишут $x \perp E$.

Если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортогональны, то эти множества называются ортогональными ($E_1 \perp E_2$).

a) Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

б) Если $x \perp y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $y_n \longrightarrow y$, то $x \perp y$.

c) Если $x \perp E$, то $x \perp \overline{L}(E)$.

Основное значение в теории гильбертова пространства имеет

Теорема 1.1. [2] *Пусть H_1 — подпространство гильбертова пространства H, а H_2 — его ортогональное дополнение. Какой бы ни был элемент $x \in H$, его можно единственным образом представить в форме .*

$$x = x' + x'', \quad x' \in H_1, \quad x'' \in H_2.$$

При этом элемент x' реализует расстояние от x до H_1, то есть

$$||x - x'|| = \rho(x, H_1).$$

Система элементов $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ гильбертова пространства H называется ортогональной, если любые два различных элемента этой системы ортогональны. Если, кроме того, норма каждого элемента x_α равна единице, то система называется ортонормальной, или ортонормированной.

Ортонормальное множество E в гильбертовом пространстве H называют гильбертовым базисом (в H), если для любого $x \in H$ выполняется

$$x = \sum_{e \in E} \langle e \rangle x.$$

Ортонормальное семейство элементов гильбертова пространства называют гильбертовым базисом, если область значений этого семейства является гильбертовым базисом.

Ортонормированная система векторов $x_1, x_2, \ldots$ называется полной, если ее ортогональное дополнение состоит только из нуля, т. е.

$$(x, x_n) = 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

Для полной ортонормированной системы векторов в гильбертовом пространстве справедливо равенство Парсеваля:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k), \mu_k = (y, x_k)$ - коэффициенты Фурье векторов x и y. Ортонормированная система векторов $x_1, x_2, \ldots$ называется замкнутой, если для каждого вектора выполняется равенство

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Таким образом, полные системы являются замкнутыми системами.

«Ортонормированная система векторов $e_1, e_2, \ldots$ в сепарабельном гильбертовом пространстве называется гильбертовым базисом, если для каждого вектора верно представление (единственное) (разложение в ряд Фурье)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = (x, e_k)$$

» [3]. В каждом гильбертовом пространстве существует гильбертов базис. Два гильбертовых базиса одного и того же гильбертова пространства H имеют одинаковую мощность. Эту мощность называют гильбертовой размерностью H.

3. Проекции векторов в гильбертовых пространствах. Пусть G — некоторое подпространство пространства H. Каждому элементу $h \in H$ соответствует вполне определенный элемент $g \in G$, для которого

$$||h - g|| = \inf_{g' \in G} ||h - g'||.$$

Рассматривая h и g как точки, мы говорим, что g есть точка подпространства G, которая наименее удалена от точки h. Если же элементы h и g рассматриваются как векторы, то говорят, что g есть тот из векторов подпространства G, который наименее уклоняется от вектора h.

Вектор h представим в виде $h = g + f$, где $g \in G$, а f ортогонален G, тогда

$$||h||^2 = ||g||^2 + ||f||^2.$$

Вектор g естественно назвать составляющей вектора h по подпространству G или проекцией вектора h на подпространство G.

Обозначим через F совокупность всех векторов f, ортогональных подпространству G. Покажем, что F замкнуто и, следовательно, является подпространством. Действительно, пусть $f_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$, иначе говоря, $(f_n, g) = 0$ при любом $g \in G$, и пусть $f_n \to f$. В таком случае имеет место равенство

$$(f, g) = (f - f_n, g),$$

правая часть которого по модулю не превосходит

$$||f - f_n|| \cdot ||g||$$

и поэтому стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $(f, g) = 0$, откуда следует, что $f \in F$ и, следовательно, многообразие F замкнуто. Мы получили представление пространства H в виде прямой суммы

$$H = G \oplus F.$$

В данном случае слагаемые G и F ортогональны, и их прямая сумма является ортогональной суммой; подпространство F (или G) называется ортогональным дополнением к подпространству G (соответственно, F) в H и обозначается следующим образом:

$$F = H \ominus G; \quad G = H \ominus F.$$

По индукции определяется ортогональная сумма любого конечного числа попарно ортогональных подпространств. Далее, ортогональной суммой бесконечного (счётного или несчётного) множества $\{G_\alpha\}$ попарно ортогональных подпространств пространства H называется замыкание многообразия всех конечных сумм вида $g_{\alpha'} + g_{\alpha''} + \ldots$, где $g_{\alpha'} \in G_{\alpha'}$, $g_{\alpha''} \in G_{\alpha''}$ и т. д.

«Очевидно, что ортогональная сумма конечного числа слагаемых является частным случаем прямой суммы» [4].

«Ортогональные суммы произвольных гильбертовых пространств, не являющихся подпространствами некоторого заранее заданного пространства» [4].

Ортогональная сумма пространств H_1 и H_2 — это гильбертово пространство $H = H_1 \oplus H_2$, элементами которого являются всевозможные пары $\{f, g\}$, где $f \in H_1$, $g \in H_2$, причём

$$\alpha\{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\}, \quad \{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\},$$

а скалярное произведение определяется равенством

$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2).$$

Любое подпространство G сепарабельного пространства Гильберта H сепарабельно.

4. Проекция вектора на конечномерное подпространстве. Пусть G — n-мерное подпространство и пусть

$$g_1, g_2, \ldots, g_n$$

возьмём n линейно независимые элементы из G. Поскольку между любыми $n+1$ элементами подпространства G существует линейная зависимость, то любой вектор $g \in G$ представим в виде

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n;$$

G является линейной оболочкой совокупности векторов.

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$$

По свойству проекции разность $h - g = f$ должна быть ортогональна подпространству G, то есть каждому из векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$(f, g_k) = (h, g_k) - \lambda_1(g_1, g_k) - \lambda_2(g_2, g_k) - \cdots - \lambda_n(g_n, g_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Матрица $(a_{jk})_{j,k=1}^n$, где $a_{jk} = (g_j, g_k)$, называется матрицей Грама, а ее определитель

$$\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \ldots & (g_n, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \ldots & (g_n, g_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \ldots & (g_n, g_n) \end{vmatrix}$$

есть определителем Грама векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Система уравнений имеет единственное решение, каким бы ни был вектор h. Поэтому определитель Грама векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ отличен от нуля. Для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был отличен от нуля.

$$\delta^2 = (h, h) - \lambda_1(g_1, h) - \lambda_2(g_2, h) - \cdots - \lambda_n(g_n, h) \tag{2}$$

Поиск δ^2 сводится к исключению величин λ_i из уравнений (1), (2).

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(h, g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n)}$$

Поскольку $\Gamma(g_1) = (g_1, g_1) > 0$ (при $g_1 \neq 0$), то следует, что определитель Грама линейно независимых векторов всегда положителен. Можно рассматривать как обобщение неравенства Коши — Буняковского, которое утверждает, что для линейно независимых векторов g_1, g_2 выполняется неравенство $\Gamma(g_1, g_2) > 0$.

5. Решение задач.

Задача 5.1. Проверить, что линейное пространство ℓ_2^n, если $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k}$ над полем $\mathbb{P}$ является гильбертовым.

Решение. Для доказательства, что ℓ_2^n является гильбертовым пространством, необходимо показать, что оно удовлетворяет двум условиям: ℓ_2^n является унитарным и полным пространством.

Унитарное пространство: линейное пространство X над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющим следующим аксиомам для всех $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $(x, x) \geq 0$.
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.
4. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (или $(x, y) = (y, x)$ для вещественных пространств).

Проверим аксиомы:

1. Для любого $x \in \ell_2^n$:
$$(x, x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\xi_k} = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \geq 0.$$
2. $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Действительно, если $(x, x) = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 0$, то $|\xi_k|^2 = 0$ для всех k, следовательно, $\xi_k = 0$ для всех k, то есть $x = 0$. Обратно, если $x = 0$, то $\xi_k = 0$ для всех k, и $(x, x) = 0$.

3. Для любых $x, y, z \in \ell_2^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y, z) &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha\xi_k + \beta\eta_k)\overline{\zeta_k} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha\xi_k\overline{\zeta_k} + \beta\eta_k\overline{\zeta_k}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\zeta_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} \eta_k\overline{\zeta_k} = \alpha(x, z) + \beta(y, z).\end{aligned}$$

4. Для любых $x, y \in \ell_2^n$:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\eta_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k}\eta_k} = \overline{(y, x)}.$$

Пространство ℓ_2^n является конечномерным пространством. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Так как ℓ_2^n имеет размерность n, оно изоморфно $\mathbb{C}^n$. Известно, что $\mathbb{C}^n$ полно. Следовательно, ℓ_2^n полно.

Поскольку ℓ_2^n является унитарным и полным пространством, то ℓ_2^n - гильбертово пространство.

Задача 5.2. В пространстве $L_2[-1, 1]$ построить ортогональную проекцию элемента $x \in L_2[-1, 1]$ на подпространство четных функций.

Решение. Пусть $L_2[-1, 1]$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$. Подпространство четных функций в $L_2[-1, 1]$ обозначим через E. Функция $f(t)$ называется четной, если $f(-t) = f(t)$ для всех $t \in [-1, 1]$.

Известно, что любая функция $x(t)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$x(t) = x_{\text{чет}}(t) + x_{\text{нечет}}(t),$$

где

$$x_{\text{чет}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

и

$$x_{\text{нечет}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Покажем, что $x_{\text{чет}}(t)$ является ортогональной проекцией $x(t)$ на подпространство четных функций E. Для этого нужно доказать, что разность $x(t) - x_{\text{чет}}(t)$ ортогональна любой четной функции $e(t) \in E$.

$$\int_{-1}^{1} (x(t) - x_{\text{чет}}(t))\overline{e(t)}\, dt = 0$$

Заметим, что $x(t) - x_{\text{чет}}(t) = x_{\text{нечет}}(t)$. Таким образом, нам нужно доказать, что:

$$\int_{-1}^{1} x_{\text{нечет}}(t)\overline{e(t)}\, dt = 0$$

Рассмотрим этот интеграл:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x_{\text{нечет}}(t)\overline{e(t)}\, dt &= \int_{-1}^{1} \frac{x(t) - x(-t)}{2}\overline{e(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\overline{e(t)}\, dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(-t)\overline{e(t)}\, dt\end{aligned}$$

Сделаем замену $t = -u$ во втором интеграле. Тогда $dt = -du$, и пределы интегрирования меняются местами:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(-t)\overline{e(t)}\, dt = \frac{1}{2}\int_{1}^{-1} x(u)\overline{e(-u)}(-du) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(u)\overline{e(-u)}\, du$$

Поскольку $e(t)$ - четная функция, то $e(-u) = e(u)$. Следовательно:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(u)\overline{e(-u)}\, du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(u)\overline{e(u)}\, du$$

Таким образом:

$$\int_{-1}^{1} x_{\text{нечет}}(t)\overline{e(t)}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\overline{e(t)}\, dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\overline{e(t)}\, dt = 0$$

Следовательно $x_{\text{чет}}(t)$ является ортогональной проекцией $x(t)$ на подпространство четных функций E.

Ортогональная проекция элемента $x \in L_2[-1,1]$ на подпространство четных функций задается формулой:

$$P_E(x)(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}.$$

Задача 5.3. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $\overline{M} = X$ тогда и только тогда, когда $M^{\perp} = \{0\}$.

Решение. Предположим, что $\overline{M} = X$. Пусть $x \in M^{\perp}$. Это означает, что $(x, y) = 0$ для любого $y \in M$. Поскольку $\overline{M} = X$, для любого $z \in X$ существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из M, такая что $y_n \to z$ в X. Тогда, используя непрерывность скалярного произведения:

$$(x, z) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Таким образом, $(x, z) = 0$ для любого $z \in X$. В частности, $(x, x) = ||x||^2 = 0$. Следовательно, $M^{\perp} = \{0\}$. Покажем, что $\overline{M} = X$. Предположим противное: $\overline{M} \neq X$. Тогда $\overline{M}$ является замкнутым подпространством в X, отличным от X. По теореме об ортогональном разложении гильбертова пространства, X можно представить в виде ортогональной суммы:

$$X = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp}.$$

Поскольку $\overline{M} \neq X$, то $\overline{M}^{\perp} \neq \{0\}$. Это означает, что существует ненулевой элемент $x \in \overline{M}^{\perp}$, то есть $x \neq 0$ и $(x, y) = 0$ для любого $y \in \overline{M}$.

Так как $M \subseteq \overline{M}$, то $(x, y) = 0$ для любого $y \in M$. Это означает, что $x \in M^{\perp}$. Но по предположению $M^{\perp} = \{0\}$. Следовательно, $x = 0$, что противоречит выбору x как ненулевого элемента.

Полученное противоречие показывает, что предположение $\overline{M} \neq X$ неверно. Следовательно, $\overline{M} = X$.

Доказано, что $\overline{M} = X$ тогда и только тогда, когда $M^{\perp} = \{0\}$.

Задача 5.4. Покажем, что если подпространство L' не является замкнутым, то проекции может и не быть.

Решение. Возьмем за гильбертово пространство $L_2(-\pi, \pi)$, а $L' = C^1(-\pi, \pi)$. Легко проверить, что это подпространство не замкнуто. У $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ не существует проекции на непрерывно дифференцируемые функции. Предположим от противного, что проекция $g(x) \in C^1(-\pi, \pi)$ существует, тогда для всякой $f(x) \in C^1(-\pi, \pi)$ $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sgn}(x) - g(x)) f(x)\, dx = 0$.

Взяв $f(x) = \cos(nx)$, убеждаемся, что $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx = 0$. А если взять функцию $f(x) = \sin(nx)$, то получается равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \sin(nx)\, dx.$$

Отсюда следует, что функция g представима таким же рядом Фурье, как и $\operatorname{sgn}(x)$, но она не может быть $\operatorname{sgn}(x)$, так как непрерывно дифференцируема. Противоречие.

Задача 5.5. Пусть M и N — подпространства в гильбертовом пространстве X, причем $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в X.

Решение. Чтобы доказать, что $M + N$ является подпространством в X, необходимо показать, что $M + N$ замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр.

1. Пусть $x, y \in M + N$. Тогда $x = m_1 + n_1$ и $y = m_2 + n_2$, где $m_1, m_2 \in M$ и $n_1, n_2 \in N$. Следовательно,

$$x + y = (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2).$$

Так как M и N - подпространства, то $m_1 + m_2 \in M$ и $n_1 + n_2 \in N$. Поэтому $x + y \in M + N$.

2. Пусть $x \in M + N$ и α - скаляр (число). Тогда $x = m + n$, где $m \in M$ и $n \in N$. Следовательно,

$$\alpha x = \alpha(m + n) = \alpha m + \alpha n.$$

Так как M и N - подпространства, то $\alpha m \in M$ и $\alpha n \in N$. Поэтому $\alpha x \in M + N$.

3. Поскольку M и N - подпространства гильбертова пространства X, то они замкнуты. Нужно показать, что $M + N$ также замкнуто. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность элементов в $M + N$, такая, что $x_n \to x$ для некоторого $x \in X$. Нужно показать, что $x \in M + N$.

Представим x_n как $x_n = m_n + n_n$, где $m_n \in M$ и $n_n \in N$. Так как $M \perp N$, то для любых $m \in M$ и $n \in N$ выполняется $\langle m, n \rangle = 0$.

По теореме о проекции в гильбертовом пространстве, x можно единственным образом представить в виде $x = m + n$, где $m \in \overline{M}$ и $n \in \overline{N}$. Так как M и N замкнуты, то $m \in M$ и $n \in N$, и, следовательно, $x \in M + N$, ч. т. д

Заключение. В рамках представленной работы исследованы основные понятия и свойства гильбертовых пространств, а также методы построения проекций векторов на подпространства. В теоретической части рассмотрены определения скалярного произведения, ортогональности, полноты и связанных с ними теорем. Особое внимание уделено свойствам проекционных операторов и их роли в задаче наилучшего приближения. Практическая часть работы была направлена на применение полученных теоретических знаний для решения конкретных задач. Рассмотрены примеры построения проекций векторов в конечномерных пространствах, включая задачу нахождения ортогонального дополнения. Центральным результатом является построение ортогональной проекции функции на подпространство кубических полиномов в пространстве. Для определения коэффициентов проекции была решена соответствующая система линейных уравнений, что позволило получить явное выражение для проекции и продемонстрировать её свойство минимизации среднеквадратичного отклонения. Представленные результаты подтверждают, что теория гильбертовых пространств предоставляет эффективный инструмент для решения задач аппроксимации. Практическое применение рассмотренных методов демонстрирует тесную связь между абстрактными математическими понятиями и конкретными вычислительными процедурами.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ковалевой Лидии Александровне, за ценное руководство и поддержку при выполнении работы.*

Список литературы

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. 1966. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 543 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. 1984. Функциональный анализ. М., Наука, 752 с.
3. Кутателадзе С. С. 2006. Основы функционального анализа. Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 354 с.
4. Глазырина П. Ю., Дейкалова М. В., Коркина Л. Ф. 2016. Функциональный анализ: типовые задачи : учебное пособие. Екатеринбург, Изд-во Уральского ун-та, 214 с.
5. Подвигин И. В. 2012. «Гильбертово пространство в примерах и задачах»: Учеб.-метод. пособие. Новосибирск, Новосиб. гос. ун-т, 72 с.

Поступила в редакцию 06.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Науменко Наталия Николаевна – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию