Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 95–99.

Линейные операторы в нормированных пространствах

Короплясов К. Р.
korop.kir5@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются основные понятия, свойства и приложения линейных операторов в нормированных пространствах. Представлен исторический обзор развития понятий оператора и пространства, на основе которого формируется современное понимание линейного оператора. Описаны ключевые определения: линейность, ограниченность, непрерывность, норма и обратимость операторов. Раскрывается связь между непрерывностью и ограниченностью, приводятся математические примеры и доказательства. Также показаны приложения линейных операторов в различных областях математики, физики и вычислительной техники. Работа подчёркивает фундаментальное значение линейных операторов в функциональном анализе и их практическую применимость.

Ключевые слова: линейный оператор, нормированное пространство, непрерывность, ограниченность, функциональный анализ

Для цитирования: Короплясов К. Р. 2025. Линейные операторы в нормированных пространствах. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 95–99.

Введение. Линейные операторы играют фундаментальную роль в современной математике и её приложениях, включая функциональный анализ, математическую физику, теорию управления и численные методы. Особенно важное значение имеют операторы, действующие в нормированных пространствах, так как такие структуры позволяют строго описывать сходимость, непрерывность, ограниченность и другие важные свойства отображений.

В данной статье рассматриваются основные определения и свойства линейных операторов в нормированных пространствах. Приводится исторический обзор возникновения понятий оператора и пространства, формулируются ключевые определения, а также рассматриваются приложения теории линейных операторов в различных разделах математики и прикладных наук. Статья содержит как теоретические положения, так и конкретные примеры, иллюстрирующие применение рассматриваемых понятий.

1. Приложения линейных операторов в нормированных пространствах. Линейные операторы в нормированных пространствах широко применяются для описания и анализа различных процессов в математике, физике, инженерных задачах и вычислительной технике. Приведём несколько примеров.

1. *Теория дифференциальных уравнений.* Решение обыкновенных и дифференциальных уравнений в частных производных сводится к исследованию линейных операторов, действующих в пространствах функций. Операторные методы позволяют установить существование, единственность и свойства решений.

2. *Теория интегральных уравнений.* Интегральные операторы, действующие в нормированных пространствах, являются основным инструментом в решении задач математической физики и инженерных приложений. Их свойства, такие как непрерывность и компактность, имеют ключевое значение для анализа решений.

3. *Спектральная теория.* Изучение спектра линейных операторов важно для понимания устойчивости систем и характеристик процессов, описываемых данными операторами. Спектральная теория находит применение в колебательных системах, квантовой механике и теории колебаний.

4. *Теория управления и оптимизация.* Модели динамики управляющих систем формулируются через линейные операторы, действующие на пространства состояний. Исследование спектральных свойств операторов позволяет анализировать устойчивость и оптимальность функционирования систем.

5. *Численные методы и вычислительная математика.* Приближённое решение уравнений сводится к работе с операторами в конечномерных подпространствах. Методы, такие как метод Галёркина и метод конечных элементов, основаны на свойствах линейных операторов в нормированных пространствах.

6. *Обработка сигналов и изображений.* Функциональные преобразования сигналов и изображений описываются действиями линейных операторов на пространствах функций. Это позволяет эффективно проектировать фильтры, восстанавливать сигналы и анализировать их частотные характеристики.

2. Основные определения и типы пространств. Прежде чем рассматривать линейные операторы, необходимо ввести основные типы пространств, в которых они определяются. Это топологические, линейные, топологические линейные и нормированные пространства.

Определение 2.1 *Пусть X – некоторое множество. Система подмножеств τ называется топологией на X, если выполнены следующие условия:*

1. *$\varnothing \in \tau$ и $X \in \tau$;*
2. *Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;*
3. *Пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит τ.*

Пара (X, τ) называется топологическим пространством.

Топология определяет, какие множества в пространстве считаются «открытыми». Это позволяет ввести понятия близости, непрерывности, сходимости и т.д., даже без понятия расстояния. Топологические пространства обобщают привычную геометрию и лежат в основе многих разделов анализа.

Определение 2.2 *Линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ называется множество L, в котором определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие следующим аксиомам:*

1. *Коммутативность: $x + y = y + x$;*
2. *Ассоциативность: $(x + y) + z = x + (y + z)$;*
3. *Существование нуля: $\exists 0 \in L$, такое что $x + 0 = x$;*
4. *Существование противоположного: для каждого $x \in L$ существует $-x$, такое что $x + (-x) = 0$;*
5. *Дистрибутивность: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;*
6. *Ассоциативность умножения: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;*
7. *Мультипликативная единица: $1 \cdot x = x$.*

Линейное пространство – это обобщение векторного пространства. В нём можно складывать элементы и умножать их на числа, при этом сохраняются основные алгебраические свойства. Это основа всей линейной алгебры и функционального анализа.

Определение 2.3 *Топологическим линейным пространством называется множество T, которое одновременно является линейным и топологическим пространством, причём операции сложения и умножения на скаляр непрерывны относительно заданной топологии.*

Это пространство объединяет алгебраические и топологические свойства. В нём можно выполнять действия как в алгебре и одновременно исследовать поведение функций с помощью понятий топологии, например, непрерывности.

Определение 2.4 *Пусть L – линейное пространство. Функция $p : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если для всех $x, y \in L$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

1. *$p(x) \geq 0$, причём $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;*
3. *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника).*

Норма – это способ измерить «длину» или «размер» вектора. С её помощью мы можем ввести понятие расстояния, а значит, анализировать сходимость и непрерывность уже в количественном смысле.

Определение 2.5 *Нормированным пространством называется линейное пространство L, на котором задана норма $\|\cdot\|$, то есть существует отображение $L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям нормы.*

Такие пространства часто используются при изучении функций, операторов, решений уравнений и других объектов анализа. Благодаря норме они обладают богатой геометрической и аналитической структурой.

Определение 2.6 *В нормированном пространстве $\mathbb{R}^n$ евклидовой нормой называется отображение*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Это самая знакомая норма — длина вектора в привычной геометрии. Она используется, например, в физике и инженерии, а также в численных методах.

Определение 2.7 *Пример топологического пространства: множество $\mathbb{R}$ с топологией, состоящей из всех открытых интервалов вида (a, b), где $a < b$.*

Это позволяет анализировать сходимость последовательностей, поведение функций и многое другое без использования расстояний – только через открытые множества.

Определение 2.8 *Пример линейного пространства: множество всех пар (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, с операциями сложения и умножения на число:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Это двумерное пространство векторов на плоскости. Здесь работают все свойства линейных пространств, которые мы привыкли использовать.

Определение 2.9 *Пример топологического линейного пространства: пространство $\mathbb{R}^2$ с евклидовой топологией (открытые шары) и линейной структурой.*

Такое пространство удобно для анализа непрерывных отображений, дифференцируемых функций и операторов.

Определение 2.10 *Пример нормированного пространства: пространство $\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой:*

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В этом пространстве можно не только складывать векторы, но и измерять расстояние между ними, углы, направления и т.д., что делает его очень удобным в практических задачах.

3. Линейные операторы: определения и свойства. В этом разделе приводятся формальные определения линейных операторов и рассматриваются их важнейшие свойства: линейность, ограниченность, непрерывность, обратимость, а также действия над операторами.

Определение 3.1 *Пусть T_1 и T_2 – линейные топологические пространства. Линейным оператором, действующим из T_1 в T_2, называется отображение $A : T_1 \longrightarrow T_2$, удовлетворяющее условию:*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in T_1$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Это означает, что оператор «сохраняет» сложение и умножение на число. То есть сначала сложить и потом применить A — то же самое, что применить A к каждому вектору отдельно, а потом сложить. Такие операторы называются линейными, потому что они работают по линейным законам.

Определение 3.2 *Линейный оператор $A : X \longrightarrow Y$ называется ограниченным, если существует число $M > 0$ такое, что:*

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Если оператор ограничен, это означает, что он не может «вытянуть» вектор слишком далеко — результат его действия по норме всегда контролируется и не превышает M раз длину входного вектора. Такие операторы играют особую роль, поскольку они хорошо себя ведут при сходимости и устойчивости.

Определение 3.3 *Областью определения оператора A называют множество $D_A \subseteq E$, состоящее из всех x, для которых значение $A(x)$ определено.*

Оператор можно применять не ко всем векторами, а только к тем, которые лежат в его области определения. За её пределами результат просто не существует.

Определение 3.4 *Оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in D_A$, если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует окрестность U точки x_0, такая что для всех $x \in U \cap D_A$ выполняется $Ax \in V$. Если это условие выполняется во всех точках области определения, оператор называется просто непрерывным.*

Проще говоря, если x и x_0 близки друг к другу, то и Ax и Ax_0 тоже будут близки. То есть оператор ведёт себя «плавно» и не вызывает скачков при малых изменениях входных данных.

Определение 3.5 *Нормой оператора A называется число*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Норма оператора показывает, насколько сильно он может увеличить вектор длиной не более одного. Это максимальный «масштаб» действия оператора. Если норма оператора мала, то он мало искажает векторы, если велика – может сильно их растягивать.

Определение 3.6 *Линейный оператор $A : X \longrightarrow Y$ между нормированными пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Это важное и полезное свойство: чтобы проверить непрерывность линейного оператора, достаточно доказать его ограниченность, и наоборот. Для линейных операторов эти два понятия эквивалентны.

Определение 3.7 *Линейный оператор $A : X \longrightarrow X$ называется обратимым, если существует оператор $A^{-1} : X \longrightarrow X$, такой что:*

$$A^{-1}(Ax) = x, \quad A(A^{-1}x) = x \quad \text{для всех } x \in X.$$

Если оператор обратим, значит можно не только применить A, но и «отменить» его действие. Это важно для решения уравнений вида $Ax = b$ — если существует обратный оператор, можно всегда найти решение.

Определение 3.8 *Пусть A и B — линейные операторы из E в E_1. Их суммой называется оператор $A+B$, определяемый правилом:*

$$(A + B)x = Ax + Bx.$$

Сумма операторов действует на вектор так же, как сумма их значений. Это похоже на сложение функций: результат – сумма того, что делает каждый оператор.

Определение 3.9 *Пусть $A : E \longrightarrow E_1$, $B : E_1 \longrightarrow E_2$ — линейные операторы. Их произведением называется оператор $BA : E \longrightarrow E_2$, определяемый как:*

$$(BA)(x) = B(A(x)).$$

Произведение операторов – это последовательное применение: сначала действует A, потом результат передаётся в B. Порядок важен: BA и AB обычно разные операторы.

Теорема 3.1 *Пусть A — ограниченный линейный оператор. Тогда его норма может быть вычислена по формуле:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Эта формула показывает два равных способа вычисления нормы оператора. Первый – по всем векторам с нормой не более 1. Второй – по отношению норм результата и аргумента для всех $x \neq 0$.

Доказательство. Обозначим:

$$\alpha = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Поскольку A – ограниченный оператор, по определению его нормы:

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \quad \Rightarrow \quad \alpha \le \|A\|.$$

Предположим, что $\|A\| > \alpha + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда:

$$\|Ax\| < (\alpha + \varepsilon) \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \alpha + \varepsilon,$$

что противоречит определению α как супремума.

Следовательно, $\|A\| = \alpha$ ■.

Таким образом, норма оператора отражает его «максимальное растяжение». Это полезно при анализе устойчивости, приближённых методов и при оценке ошибок.

4. Практические примеры решения задач.

Пример 1. Пусть задан линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по правилу:

$$A(x, y) = (3x,\ 4y),$$

а в пространстве $\mathbb{R}^2$ задана норма

$$\|x\| = \max(|x|, |y|).$$

Решение. Пусть $x = (x, y)$, и $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) \le 1$. Тогда: $A(x, y) = (3x, 4y)$, а норма образа: $\|A(x, y)\| = \max(|3x|,\ |4y|)$. Так как $|x| \le 1 \Rightarrow |3x| \le 3$, и $|y| \le 1 \Rightarrow |4y| \le 4$, то:

$$\|A(x, y)\| \le 4.$$

Максимум достигается, если $x = 0$, $y = 1$. Тогда:

$$A(0, 1) = (0, 4), \quad \|A(0, 1)\| = \max(|0|,\ |4|) = 4.$$

Ответ: $\|A\| = 4$.

Пример 2. Доказать, что линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданный с помощью матрицы с конечными элементами, является непрерывным.

Решение. Пусть A задан как

$$A(x) = Ax = (a_{ij})_{n\times n} \cdot x, \tag{1}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ — элементы матрицы.

Норма оператора A в $\mathbb{R}^n$ (например, в евклидовой норме) определяется как

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|. \tag{2}$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ — конечномерное пространство, все нормы на нём эквивалентны. Тогда оператор, заданный конечной матрицей, обязательно ограничен:

$$\|Ax\| \le C \cdot \|x\| \quad \text{для некоторого } C > 0. \tag{3}$$

А в нормированных пространствах известно, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Следовательно, такой оператор A является непрерывным на всём $\mathbb{R}^n$, ч. т. д.

Пример 3. Проверить, является ли линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданный формулой

$$A(x, y) = (2x + y,\ 3x + 4y),$$

обратимым.

Решение. Представим оператор A в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, существует ли обратный оператор. Для этого вычислим определитель матрицы:

$$\det A = (2)(4) - (1)(3) = 8 - 3 = 5 \neq 0.$$

Так как определитель отличен от нуля, матрица A обратима. А значит, существует линейный оператор $A^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который является обратным к A.

Ответ: оператор A обратим.

Заключение. В данной статье были рассмотрены основные понятия, связанные с линейными операторами в нормированных пространствах. Приведены определения и пояснения таких понятий, как линейный оператор, его ограниченность, непрерывность, норма и обратимость. Также были разобраны примеры, иллюстрирующие применение этих понятий на практике.

Особое внимание было уделено теоретическим свойствам операторов и доказательству важной теоремы о норме ограниченного линейного оператора. Кроме того, были приведены примеры вычисления нормы оператора, анализа его непрерывности и обратимости, что подтвердило применимость теоретических положений в задачах, связанных с линейными отображениями.

Полученные результаты подтверждают, что теория линейных операторов в нормированных пространствах является мощным инструментом как в чисто теоретических исследованиях, так и в прикладных задачах различных научных направлений, включая физику, инженерию и численные методы.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ковалевой Лидии Александровне за помощь в подготовке работы и ценные рекомендации.*

Список литературы

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1981. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 512 с.
2. Кудрявцев Л. Д. 1981. Курс математического анализа. Т. 2. М., Наука, 544 с.
3. Красносельский М. А., Забарян М. М. 1975. Основы функционального анализа. М., Наука, 320 с.
4. Рудин У. 1974. Функциональный анализ. Пер. с англ. М., Мир, 432 с.
5. Константинов М. Ю., Гаврилов С. А. 2010. Функциональный анализ. М., Физматлит, 256 с.

Поступила в редакцию 06.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Короплясов Кирилл Романович – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsuedu.ru

К содержанию