Студенческий математический журнал, 2022 С. 24–33.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

С. В. Мешков

E-mail: 259149@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача Штурма – Лиувилля, приводятся основные определения. Задача рассматривается на отрезке, на концах которого задаются различные краевые условия, в связи с этим возникает ряд краевых задач. В статье выписано общее решение в каждом случае.

Ключевые слова: краевая задача, задача Штурма – Лиувилля, дифференциальные уравнения

Для цитирования: Мешков С.В. 2022. Краевая задача Штурма – Лиувилля. Студенческий математический журнал. 2022: 24–33.

---

1. Введение. Рассмотрим отрезок [a,b] на концах которого закреплена струна. Её колебания описываются дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) + \lambda p(t)x(t) = 0.$$

В точках закрепления струны функция может принимать различные значения, называемые в дальнейшем краевыми условиями. Сформулированная задача называется задачей Штурма – Лиувилля. Основателями, развития и изучения данной задачи являются Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville).

В процессе изучения задачи были использованы новые методы, введены новые понятия, которые в дальнейшем сыграли огромную роль в развитии большого числа направлений в математики, а так же в физике.

Теория созданная Штурмом и Лиувиллем до сих пор является кузницей новых идей и задач для спектральной теории операторов и анализа. Теория дифференциальных уравнений в частных производных использует множество задач на собственные значения. Например, рассматривается смешанная задача, которая допускает разделение переменных, то ей может быть поставлена в соответствие спектральная задача на собственные значения.

В настоящее время, особенно после открытия связи с некоторыми нелинейными эволюционными уравнениями математической физики, эта теория стала востребована как никогда раньше.

2. Основные определения. Задачи на собственные значения играют огромную роль при решении однородных краевых задач.

Задача Штурма – Лиувилля является одной из ведущих задач на собственные значения для линейного дифференциального уравнения. Теоретический материал, приведенный в настоящей главе был изучен в книгах [6]-[1]. Рассмотрим ОДУ второго порядка

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) + \lambda p(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

с заданными краевыми условиями в граничных точках

$$\begin{cases} a_1x'(a) + a_2x(a) = 0, \quad \beta_1x'(b) + \beta_2x(b) = 0; \\ \qquad |a_1| + |a_2| \neq 0 \qquad\qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Функции $\varphi'(t), q(t), p(t)$ будем предполагать непрерывными на отрезке $[a, b]$. В дальнейшем будем считать $\varphi(t) > 0, q(t) > 0, p(t) > 0$. Число λ — параметр уравнения, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные постоянные.

Определение 1.1. *Задачу об определении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения $x_\lambda(t)$ уравнения (9), удовлетворяющие граничным условиям (2), называют задачей Штурма – Лиувилля.*

Определение 1.2.*Значения параметра λ, при которых существуют решения задачи Штурма – Лиувилля (9), (2) называют собственными числами, или собственными значениями, а отвечающие им решения $x_\lambda(t)$ - собственными функциями этой задачи.*

Определение 1.3. *Граничные условия (2) называются граничными условиями Штурма.*

2. Классификация задач Штурма – Лиувилля по краевым условиям.

Определение 2.1. *Классическими граничными (краевыми) операторами краевой задачи на отрезке $[a, b]$ называются операторы*

$$\Gamma_a[y] = -y'(a)\sin\alpha + y(a)\cos\alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Gamma_b[y] = y'(a)\sin\beta + y(b)\cos\beta, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

При различных значениях α и β классические граничные операторы принимают один из трех возможных видов. Для этих трех случаев существуют специальные названия

Определение 2.2.*Классические операторы вида*

- $\Gamma_a[y] = y(a), \Gamma_b[y] = y(b)$ *называются краевыми операторами I- рода (операторами Дирихле);*
- $\Gamma_a[y] = y'(a), \Gamma_b[y] = y'(b)$ *называются краевыми операторами II- рода (операторами Неймана);*

- $\Gamma_a[y] = y'(a) - hy(a), \Gamma_b[y] = y'(b) + Hy(b)$ *при условии* $h, H > 0$ *называются краевыми операторами III- рода.*

Таким образом получаем при $x \in [a, b]$ краевая задача с граничными условиями различно рода, называются соответственно

- краевой задачей I - рода (задача Дирихле)

$$\begin{cases} y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = f(x), \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

- краевой задачей II - рода (задача Неймана)

$$\begin{cases} y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = f(x), \\ y'(a) = 0, y'(b) = 0 \end{cases}$$

- краевой задачей III - рода Краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

Очевидно, что на разных концах отрезка могут быть разные краевые условия, следовательно, количество различных постановок задач увеличивается.

В такой формулировке краевых условий задача Штурма – Лиувилля приобретает следующий вид.

Определение 2.3. *Задача нахождения нетривиальных (т.е. отличных от тождественного нуля) функций $y(x)$ и соответствующих им чисел λ из условий*

$$\begin{cases} y'' - q(x)y' = -\lambda y(x), \\ \Gamma_a[y] = 0, \Gamma_b[y] = 0 \end{cases}$$

называется задачей Штурма-Лиувилля.

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями I - рода слева и I - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода на обоих концах отрезка $[0, b]$.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda x}), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda} x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda} x)}, \text{при} \lambda < 0;$$
$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$. Рассмотрим краевое условие $y(0) = 0$, следовательно $C_2 = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$.
  Теперь обратимся ко второму краевому условию $y(b) = 0$. Из него следует, что $\sqrt{\lambda} b = \pi n$. Таким образом, получили бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Всем λ_n соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \sin(\frac{\pi n x}{b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. Рассмотрим первое равенство $y(0) = 0$ получим, что константы $C_2 = -C_1 \Rightarrow y(x) = 2C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda} x)$. Рассматривая второе краевое условие $y(b) = 0$, получаем, что $C_1 = 0$,. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет нулевое решение.
- И третий случай, когда $\lambda = 0$. Из условия на границе $y(0) = 0$ следует, что константа C_2 равна нулю $\Rightarrow$ $y(x) = C_1 x$. Переходя ко второму граничному условию $y(b) = 0$ получим равенство $C_1 = 0$, т. е. задача Штурма – Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода на обоих концах отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \quad y_n(x) = \sin(\frac{\pi n x}{b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно теореме В. А. Стеклова нам надо вычислить коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля. Это можно сделать единственный раз, а далее пользоваться найденным.

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \sin^2(\frac{\pi k t}{b}) dt = \frac{1}{2} \int_0^b (1 - \cos(\frac{2\pi k t}{b})) dt = \frac{1}{2} \left(x \Big|_0^b - \frac{b}{2\pi k} \sin(\frac{2\pi k t}{b}) \Big|_{t=0}^{t=b} \right) = \frac{b}{2}.$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями II - рода слева и II - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода на обоих концах отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) = 0, y'(b) = 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda}x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda}x)}, \text{при} \lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Из равенства $y' = 0$- граничное условие, следует, что константа C_1 равна нулю, следовательно, решение имеет принимает следующий вид $y(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Продифференцируем $y'(x) = -C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) = 0$, тогда $\sqrt{\lambda}b = \pi k$. Вывод имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \frac{2}{b}\cos(\frac{\pi n x}{b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. Из равенства $y'(0) = 0$, получаем равенство констант C_2 и C_1. Тогда $y(x)$ принимает вид $y(x) = 2C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$. Продифференцируем полученное равенство: $y'(x) = 2C_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$.

  Подставив значения из условия $y'(b) = 0$ в последнее равенство, получим, что $C_1 = 0$. Тогда рассматриваемая задача Штурма – Лиувилля имеет только нулевое решение.

- Пусть $\lambda = 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) = 0$, получим $C_1 = 0$, следовательно $y(x) = C_2$.

  Воспользуемся вторым краевым условием заданным в точке b, т.е $y'(b) = 0$,оно выполнено. Следовательно, задача имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функция $y_0(x) = \frac{1}{b}$.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода на обоих концах отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\lambda_0 = 0, y_0(x) = 1; \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \ \ y_n(x) = \frac{2}{b}\cos(\frac{\pi n x}{b}), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \cos^2(\frac{\pi k t}{b})dt = \frac{1}{2}\int_0^b (1 + \cos(\frac{2\pi k t}{b}))dt = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^b + \frac{b}{2\pi k}\sin(\frac{2\pi k t}{b})\Big|_{t=0}^{t=b}\right) = \frac{b}{2}.$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями I - рода слева и II - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода в левом конце отрезка, а II - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = 0, y'(b) = 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda}x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda}x)}, \text{при} \lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y(0) = 0$, откуда легко видеть, что $C_2 = 0$, следовательно $y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Продифференцируем $y'(x) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$.

  Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) = 0$, тогда $\sqrt{\lambda}b = \pi k - \frac{\pi}{2}$. Таким образом, имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2b}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \sin(\frac{\pi(2n-1)x}{2b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. Из $y(0) = 0$, следует, что $C_2 = -C_1$, тогда $y(x)$ принимает вид $y(x) = 2C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$. Продифференцируем $y'(x) = 2C_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$.

  Воспользуемся $y'(b) = 0$ и сразу получим равенство константы нулю, т.е. $C_1 = 0$. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет нулевое решение.

- Пусть $\lambda = 0$. Из условия $y(0) = 0$, следует, что $C_2 = 0$б значит $y(x) = C_1 x$.

  Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) = 0$, откуда $C_1 = 0$, следовательно рассматриваемая задача не имеет собственного числа, равного нулю.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода в левом конце отрезка, а II - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2b}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin(\frac{\pi(2n-1)x}{2b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \sin^2(\frac{\pi(2k-1)t}{b})dt = \frac{1}{2}\int_0^b (1 - \cos(\frac{\pi(2k-1)t}{b}))dt = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^b - \frac{b}{\pi(2k-1)t}\sin(\frac{\pi(2k-1)t}{b})\Big|_{t=0}^{t=b}\right) = \frac{b}{2}.$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями II - рода слева и I- рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода в левом конце отрезка, а I - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda}x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda}x)}, \text{при} \lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y' = 0$, откуда легко видеть, что $C_1 = 0$, следовательно, $y(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$.

  Воспользуемся вторым условием $y(b) = 0$, откуда $\sqrt{\lambda}b = \pi(-\frac{1}{2} + k)$, следовательно имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\lambda_k = \left(\frac{\pi(-\frac{1}{2} + k)}{2b}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \cos(\frac{\pi(-\frac{1}{2} + k)x}{2b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. Из $y'(0) = 0$,следует равенство констант $C_2 = C_1$, следовательно $y(x) = 2C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$.

  Из второго граничного условия $y(b) = 0$ получаем равенство константы нулю $C_1 = 0$,. Таким образом задача Штурма – Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- Пусть $\lambda = 0$. Из равенство производной нулю в граничной точке 0, следует, равенство константы C_1 нулю. Это означает, что выполнено равенство $y(x) = C_2$.

  Второе краевое условие $y(b) = 0$ означает тогда, что $C_2 = 0$, поэтому задача Штурма – Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода в левом конце отрезка, а I - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(-\frac{1}{2} + k)}{2b}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos(\frac{\pi(-\frac{1}{2} + k)x}{2b}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \cos^2(\frac{\pi(2k-1)t}{b})dt = \frac{1}{2}\int_0^b (1 + \cos(\frac{\pi(2k-1)t}{b}))dt = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^b + \frac{b}{\pi(2k-1)t}\sin(\frac{\pi(2k-1)t}{b})\Big|_{t=0}^{t=b}\right) = \frac{b}{2}.$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями I - рода слева и III - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = 0, y'(b) + hy(b) = 0, \quad h > 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda} x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda} x)}, \text{при} \lambda < 0;$$
$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y(0) = 0$, откуда легко видеть, что $C_2 = 0$, следовательно, $y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Продифференцируем $y'(x) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$.

  Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) + hy(b) = 0 = 0$, тогда получаем, что $\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} b) + h \sin(\sqrt{\lambda} b) = 0$, откуда
  $$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b).$$

  Этому уравнению удовлетворяет бесконечное число решений $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$. Эти решения можно найти с большой точностью, применяя численные методы.

  Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\text{При } \lambda_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b),\quad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x),\quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет нулевое решение.
- Пусть $\lambda = 0$. Из равенства $y(0) = 0$, следует равенство нулю константы C_2, следовательно $y(x) = C_1 x$. Продифференцировав последнее равенство, получим $y'(x) = C_1$. Из второго краевого условия видно $C_1 + C_1 hb = 0$, откуда $C_1 = 0$, следовательно, и эта задача имеет только нулевое решение при $\lambda = 0$

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями I-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\text{При} \lambda_n > 0,\ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b), y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x),\quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \sin^2(\sqrt{\lambda} t) dt = \frac{1}{2} \int_0^b (1 - \cos(2\sqrt{\lambda} t)) dt = \frac{1}{2} \left(x \Big|_0^b - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda} t) \Big|_{t=0}^{t=b} \right) = \ldots = \frac{1}{2} (b + \frac{h}{h^2 + \lambda_k})$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями II - рода слева и III - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) = 0, y'(b) + hy(b) = 0, \quad h > 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda} x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda} x)}, \text{при} \lambda < 0;$$
$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Из равенства производной нулю в граничной точке $y'(0) = 0$, следует, что C_1 равно также нулю. Тогда можно записать $y(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$. Продифференцировав последнее равенство, получим $y'(x) = -C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$.

  Согласно второму краевому условию $y'(b) + hy(b) = 0 = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} b) + h \cos(\sqrt{\lambda} b) = 0$, откуда

  $$\sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b) = h.$$

  Этому уравнению удовлетворяет бесконечное число решений $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$.

  Эти решения можно найти с большой точностью, применяя численные методы.

  Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

  $$\text{При} \lambda_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b) = h,\quad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x),\quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. Тогда рассматриваемая задача Штурма – Лиувилля имеет только нулевое решение.
- Пусть $\lambda = 0$. Из равенства $y'(0) = 0$,следует равенство нулю константы C_1. Тогда можно записать $y(x) = C_2$. Продифференцировав последнее равенство, получим $y'(x) = 0$. Согласно второму условию $y'(b) + hy(b) = 0$, получаем, что $C_2 = 0$. Значит и в этом случае рассматриваемая задача имеет только тривиальное решение.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями II-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\text{При}\lambda_n > 0, \ \ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b) = h, y_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \cos^2(\sqrt{\lambda}t)dt = \frac{1}{2}\int_0^b (1 + \cos(2\sqrt{\lambda}t))dt = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^b + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda}t)\Big|_{t=0}^{t=b} \right) = \ldots = b + \frac{h}{h^2 + \lambda_k}$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями III - рода слева и I - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а I - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) - hy(0) = 0, \ \ h > 0 y(b) = 0, \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \text{при}\lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda}x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda}x)}, \text{при}\lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при}\lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - hy(0) = 0$, и запишем

$$\sqrt{\lambda}C_1 - hC_2 = 0,$$

$$\sqrt{\lambda} = h\frac{C_2}{C_1}.$$

Воспользуемся вторым краевым условием $y(b) = 0$, получим

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda}b) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}b) = 0 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = -\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b)$$

Таким образом, учитывая последние соотношения, имеем

$$\sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b), \ \ \sqrt{\lambda}C_1 - hC_2 = 0$$

Уравнению $\sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b)$ удовлетворяет бесконечное число решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Эти решения можно найти с большой точностью, применяя численные методы.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\text{При}\lambda_n > 0, \ n \in \mathbb{N}, \ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$y_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n}x) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет нулевое решение.
- Пусть $\lambda = 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - hy(x) = 0$, откуда получаем, что $C_1 - hC_2 = 0$. Тогда можем записать $y(x) = C_2(hx + 1)$. Воспользуемся вторым краевым условием $y(b) = 0$ из которого следует соотношение $C_2(hx + 1) = 0$. Таким образом, мы получили $C_1 = C_2 = 0$, учитывая, что по условию задачи $h, b > 0$. Последнее равенство означает, что рассматриваемая задача при $\lambda = 0$ имеет только тривиальные решения.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а I - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\text{При}\lambda_n > 0, \ \ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}b), y_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n}x) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \left(h \sin(\sqrt{\lambda_n}t) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}t) \right)^2 dt = \frac{b(h^2 + \lambda_k) + h}{2}$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями III - рода слева и II - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а II - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) - hy(0) = 0, \quad h > 0 y'(b) = 0, \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda} x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda} x)}, \text{при} \lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - hy(0) = 0$, и запишем

$$\sqrt{\lambda} C_1 - hC_2 = 0,$$

$$\sqrt{\lambda} = h \frac{C_2}{C_1}.$$

Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) = 0$ получим

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda} b) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} b) = 0 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} b)$$

Таким образом, учитывая последние соотношения, имеем

$$\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} b), \quad \sqrt{\lambda} C_1 = hC_2$$

Уравнени. $\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} b)$ удовлетворяет бесконечное число решений $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$. Эти решения можно найти с большой точностью, применяя численные методы.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\text{При} \lambda_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$y_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет только тривиальное решение.
- Пусть $\lambda = 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - hy(x) = 0$,откуда получаем, что $C_1 - hC_2 = 0$. Тогда можем записать $y(x) = C_2(hx + 1)$. Воспользуемся вторым краевым условием $y(b) = 0$ из которого следует соотношение $C_2(hx + 1) = 0$. Таким образом, мы получили $C_1 = C_2 = 0$ учитывая, что по условию задачи $h, b > 0$. Последнее равенство означает, что рассматриваемая задача при $\lambda = 0$ имеет только тривиальные решения.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а II - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\text{При} \lambda_n > 0, \quad \text{решениями уравнения будут} - \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} b), y_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \left(h \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \right)^2 dt = \frac{b(h^2 + \lambda_k) + h}{2}$$

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями III - рода слева и III - рода справа

Решить задачу Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) - Hy(0) = 0, \quad H > 0, y'(b) + hy(b) = 0, \quad h > 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения $y'' + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \text{при} \lambda > 0;$$

$$y(x) = C_1 e^{(\sqrt{-\lambda} x)} + C_2 e^{(-\sqrt{-\lambda} x)}, \text{при} \lambda < 0;$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \text{при} \lambda = 0;$$

- Пусть $\lambda > 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - Hy(0) = 0$, и запишем

$$\sqrt{\lambda}C_1 - HC_2 = 0,$$

$$\sqrt{\lambda} = H\frac{C_2}{C_1}.$$

Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) + hy(b) = 0$ получим

$$\sqrt{\lambda}\big(C_1\cos(\sqrt{\lambda}b) - C_2\sin(\sqrt{\lambda}b)\big) + h\big(C_1\sin(\sqrt{\lambda}b) + C_2\cos(\sqrt{\lambda}b)\big) = 0$$

перегруппируем слагаемые, вынося за скобки константы C_1, C_2

$$C_1\left(\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b) + h\sin(\sqrt{\lambda}b\right) + C_2\left(-\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b) + h\cos(\sqrt{\lambda}b)\right) = 0$$

Тогда справедливо следующая формула

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b) + h\sin(\sqrt{\lambda}b}{-\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b) + h\cos(\sqrt{\lambda}b)}$$

Таким образом, учитывая последние соотношения, имеем

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{H} = \frac{\sqrt{\lambda}/h\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b) + 1}{\sqrt{\lambda}/h - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b)},$$

Откуда

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b)\cdot\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} + \frac{\sqrt{\lambda}}{h}\right) = \frac{\lambda}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Упростим

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) * \frac{Hh}{\sqrt{\lambda}(H+h)}$$

И, наконец,

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\text{При}\lambda_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{решениями уравнения будут} - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$y_n(x) = H\sin(\sqrt{\lambda_n}x) + \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

- Пусть $\lambda < 0$. В этом случае задача Штурма – Лиувилля имеет нулевое решение.
- Пусть $\lambda = 0$. Воспользуемся краевым условием $y'(0) - Hy(x) = 0$, откуда получаем, что $C_1 - HC_2 = 0$. Тогда можем записать $y(x) = C_2(Hx + 1)$. Воспользуемся вторым краевым условием $y'(b) + hy(b) = 0$ из которого следует соотношение $C_2(H + hHx + h) = 0$. Таким образом, мы получили $C_1 = C_2 = 0$ учитывая, что по условию задачи $h, b > 0$. Последнее равенство означает, что рассматриваемая задача при $\lambda = 0$ имеет только тривиальные решения.

В результате исследования,получили, что задача Штурма – Лиувилля с заданными граничными условиями III-рода в левом конце отрезка, а III - рода в правом конце отрезка $[0, b]$, имеет бесконечное множество нетривиальных решений:

$$\text{При}\lambda_n > 0,\ \ \text{решениями уравнения будут} - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}b) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right), y_n(x) = H\sin(\sqrt{\lambda_n}x) + \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Вычислим коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\| y_k \|^2 = \int_0^b \left(H\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\right)^2 dt = \frac{-(H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{(H^2 + \lambda_k)^2(h^2 + \lambda_k)}$$

3. Задача с заданными краевыми условиями

Решить задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$x'' - \lambda x = 0, x = x(t) \tag{3}$$

с заданными краевыми условиями

$$x'(1) = x'(3) = 0.$$

Написать условие ортогональности для собственных функций. **Решение.** Найдем общее решение уравнения (20). Для этого составим характеристическое уравнение

$$k^2 - \lambda = 0.$$

Отсюда $k = \pm\sqrt{\lambda}$. Тогда общее решение можно выписать в зависимости от λ.

Первый случай.

$$\lambda > 0 \ \ x(t) = \tilde{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}t} = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}t)$$

Второй случай.

$$\lambda = 0 \quad x(t) = c_1 + c_2 t$$

Третий случай.

$$\lambda < 0 \quad x(t) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}t$$

Теперь рассмотрим по очереди каждый случай. В первом случае, когда $\lambda > 0$. Найдем производную от $x'(t)$:

$$x'(t) = \sqrt{\lambda}(c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \cosh\sqrt{\lambda}t)$$

Найдем константы c_1 и c_2 из краевых условий.

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh\sqrt{\lambda}) = 0, \\ \sqrt{\lambda}(c_1 \sinh 3(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh 3\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Из этой системы находим, что

$$c_1 = -c_2 \frac{\cosh\sqrt{\lambda}}{\sinh\sqrt{\lambda}},$$

Подставив во второе уравнение системы, получим, что $c_2 = 0$ или $\sqrt{\lambda} = 0$. Так как по условию $\lambda > 0$, следовательно $c_2 = 0$. Вывод: при $\lambda > 0$ нетривиальных решений нет.

Во втором случае, т.е. при $\lambda = 0$, пользуясь полученными вычислениями выше сразу приходим, что при $\lambda = 0$ решение $x(t) = c_0$. Здесь константа переобозначена для удобства.

И, наконец рассмотрим третий случай, когда $\lambda < 0$. Проведем теже рассуждения, что и в первом случае. Найдем производную

$$x'(t) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + c_2 \cos\sqrt{-\lambda}t).$$

Воспользуемся краевыми условиями, получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}(-c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos\sqrt{-\lambda}) = 0, \\ \sqrt{-\lambda}(c_1 \sin 3(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos 3\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Решая систему получим

$$\sqrt{-\lambda}c_2 \sin 2\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Таким образом, чтобы существовали нетривиальные решения рассматриваемой задачи должно выполняться:

$$2\sqrt{-\lambda} - \pi k и - c_1 \sin\frac{\pi k}{2} + c_2 \cos\frac{\pi k}{2} = 0, k = \overline{1, \infty}.$$

Пусть

$$_1 = c_k \cos\frac{\pi k}{2}, \ \ _2 = c_k \sin\frac{\pi k}{2},$$

Тогда имеем:

$$\lambda_k = -(\frac{\pi k}{2})^2,$$

а решение $x(t)$ представимо в виде:

$$x_k(t) = c_k \cos\frac{\pi k}{2}(t-1), \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Объединяя полученные решения во втором и третьем случаях, получим окончательно:

$$\lambda_k = -(\frac{\pi k}{2})^2, \ \ x_k(t) = c_k(1 + \delta_{k0}) \cos\frac{\pi k}{2}(t-1).$$

Выпишем условие ортогональности.

$$< x_k(t), x_l(t) >= \int_1^3 x_k(t) x_l(t) dt.$$

отдельно посчитаем некоторые интегралы

$$\int_1^3 \cos\frac{\pi k}{2}(t-1)dt = 0, \ \ \int_1^3 dt = 2,$$

$$\int_1^3 \cos\frac{\pi k}{2}(t-1)\cos\frac{\pi l}{2}(t-1)dt = \delta_{kl}, \ \ k, l = \overline{1, \infty}.$$

Тогда окончательно получим:

$$\int_1^3 x_k(t)x_l(t)dt = c_k^2(1+\delta_{k0})\delta_{kl}, \quad k,l=\overline{0,\infty}.$$

4. Заключение. В ходе исследования был изучен различный материал (статьи, журналы, книги), которые находятся в разделе список использованных источников.

В работе представлены основные определения. Основной акцент в работе делается на классификацию задач Штурма – Лиувилля для ОДУ второго порядка в зависимости от поставленных краевых условий. Приводится подробное решение задач в каждом случае, а некоторые случаи были проиллюстрированы на конкретных задачах с заданными краевыми условиями.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору Лидии Александровне Ковалевой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2007. Об одной задачи теории функций. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. Т. 9. № 2: 30–38.
2. Коддингтон Э. А. 1958. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений М., Изд-во Иностранной литературы, 197.
3. Левитан Б. М. 1950. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М., Наука, 255.
4. Наймарк М. А. 1969. Линейные дифференциальные операторы М., Наука, 360.
5. Треногин В А. 2002. Функциональный анализ: Учебник 3-е изд. М.,Физматлит, 306.
6. Чернова О. В. 2020. Об ограниченности одного оператора. Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. Т. 35. № 1: 21-26.

Поступила в редакцию 30.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Мешков Сергей Владимирович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 259149@bsu.edu.ru

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико - математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и компьбтерного моделирования НИУ «БелГУ»)

E-mail: Kovaleva_L@bsu.edu.ru