Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 83–92.

Линейные уравнения второго порядка

Деловая К. С.
1759020@bsuedu.ru

Аннотация. Статья носит реферативный характер. Рассматриваются необходимые сведения о линейных уравнениях второго порядка и их свойства. Сформулированы некоторые важные утверждения и следствия. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, вариация постоянных, задача Коши, определитель Вронского, тождество Лагранжа

Для цитирования: Деловая К. С. 2025. Линейные уравнения второго порядка. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 83–92.

---

1. Введение. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка занимают важное место в математике и её приложениях. Сама теория ЛДУ начала развиваться в XVIII веке благодаря работам Л. Эйлера[7] и Ж. Л. Лагранжа[8], которые разработали теорию малых колебаний и теорию линейных систем дифференциальных уравнений. На данный момент она активно используется как в различных областях математики: для описания кривых и поверхностей *в геометрии*; для изучения уравнений с частными производными *в математической физике*; для определения скорости и ускорения тела как функций времени *в механике*; для расчётов прочности конструкций и проектирования электрических и электронных схем *в инженерном деле*, так и в смежных науках: *в экономике* – при анализе рыночного равновесия, для прогнозирования спроса и предложения, оптимизации производственных процессов и управления финансовыми потоками; *в химии* – для решения задач, связанных со стехиометрией, определением состава смесей и расчётом химических реакций; *в биологии* – для изучения динамики популяций, распространения заболеваний, анализа генетических данных и моделирования биологических процессов.

Интерес к детальному изучению этих уравнений связан с тем, что среди всех обыкновенных дифференциальных уравнений данный вид – один из простых видов ДУ. Для этих уравнений хорошо и достаточно полно разработана общая теория, поэтому их изучению отведена существенная часть общего курса теории ОДУ. При изучении нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности заданного решения линейные возникают, как первое приближение. К этим уравнениям приходят при решении уравнений с частными производными. Актуальность изучения линейных дифференциальных уравнений второго порядка очень высока, владеть знаниями о решении таких уравнений необходимо для специалистов, которые собраются проводить дальнейшее изучение различных математических наук и смежных дисциплин.

Цель данной работы – изучить основные факты, касающиеся линейных дифференциальных уравнений второго порядка и их свойства.

2. Предварительные сведения. На некотором t-интервале J для непрерывных [2] функций $f(t), g(t), h(t)$ и $p(t), q(t)$, вещественных или комплексных, рассмотрим линейные уравнения второго порядка:

$$u'' + g(t)u' + f(t)u = h(t) \tag{1}$$

или

$$(p(t)u')' + q(t)u = h(t) \tag{2}$$

Замечание 1. *t-интервал J может быть как ограниченным, так и нет.*

Замечание 2. *Предполагается, что $p(t) \neq 0$. Необходимость этого условия будет пояснена далее.*

Очевидно, что равенство (2) есть общий вид для (1) и (2) , так как уравнение (1), определив функцию $p(t)$ через

$$p(t) = \exp \int_a^t g(s)\, ds, \quad a \in J \tag{3}$$

можно представить следующим образом:

$$(p(t)u')' + p(t)f(t)u = p(t)h(t), \tag{4}$$

[7] «Леона́рд Э́йлер – швейцарский, прусский и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Наряду с Лагранжем — крупнейший математик XVIII века» [3].

[8] «Жозе́ф Луи́ Лагра́нж – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером является крупнейшим математиком XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала»[3].

С другой стороны, если выбирать в качестве $p(t)$ непрерывно дифференцируемую функцию, то уравнение (2) можно переписать так:

$$u'' + \frac{p'(t)}{p(t)}u' + \frac{q(t)}{p(t)}u = \frac{h(t)}{p(t)},$$

т. е. в виде уравнения (1).

Замечание 2. [7] *В случае, если функция* $p(t)$ *непрерывна, но не имеет непрерывной производной, уравнение* (2) *не может быть записано в виде* (1)

Если мыслить пару $(u, p(t)u')$ как неизвестный двумерный вектор $x = (x^1, x^2)$, причем

$$x^{1\prime} = \frac{x^2}{p(t)}, \quad x^{2\prime} = -q(t)x^1 + h(t), \tag{5}$$

то уравнение (2) представляет собой линейную систему из двух уравнений первого порядка.

Из вида уравнения (2) понятно, что его решение – функция $u = u(t)$ класса C^1 [1], причём слагаемое $p(t)u'(t)$ также принадлежит классу C^1 и удовлетворяет (2).

«Если $p(t) \neq 0$ и $q(t), h(t)$ непрерывны, к системе (5), а потому и к уравнению (2) применимы стандартные теоремы существования и единственности для линейных систем» [7].

В предположении, что функции $1/p(t), q(t), h(t)$ только локально интегрируемы, то получается рассмотреть более общие (т. е. менее гладкие) типы решений.

Полагая $p(t) \equiv 1$, получаем частный случай (2):

$$u'' + q(t)u = h(t). \tag{6}$$

Используя замену независимых переменных

$$ds = \frac{dt}{p(t)}, \quad \text{т. е.} \quad s = \int\limits_a^t \frac{dr}{p(r)} + \text{const}, \quad a \in J \tag{7}$$

и считая, что функция $p(t) \neq 0$ принимает вещественные значения, уравнение (2) может быть приведено к виду (6).

Строгая монотонность функция $s = s(t)$ гарантируется наличием производной

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{p(t)}$$

не равной нулю. А значит, функция $s = s(t)$ обратима: $t = t(s)$ и определена на некотором s-интервале. Введенная замена (7) переводит уравнение (2) в уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2} + p(t)q(t)u = p(t)h(t), \tag{8}$$

где независимая переменная t в выражениях $p(t)q(t)$ и $p(t)h(t)$ заменяется на функцию $t = t(s)$. Уравнение (8) – уравнение типа (6).

Очевидно, что замена

$$u = z \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_a^t g(s)\,ds\right), \quad a \in J \tag{9}$$

приводит уравнение (1) к виду (6), в предположении, что функция $g(t)$ принадлежит классу C^1 [1]. Действительно, найдем u'' и u' с учётом замены (9) и поставим в (1), тогда получим уравнения вида (6):

$$z'' + \left(f(t) - \frac{g^2(t)}{4} - \frac{g'(t)}{2}\right)z = h(t)\exp\frac{1}{2}\int\limits_a^t g(s)\,ds. \tag{10}$$

Поэтому можно считать, что уравнения второго порядка в общем случае имеют вид (2) или (6). Перейдем к формулировке нескольких важных утверждений.

Утверждение 1. [7]

(a) Простейшими из рассматриваемых в работе уравнений являются уравнения

$$u'' = 0, \quad u'' - \sigma^2 u = 0, \quad u'' + \sigma^2 u = 0, \tag{11}$$

где $\sigma \neq 0$ – постоянная. Нетрудно проверить, см. например, [5] что общими решениями этих уравнений служат функции

$$u = c_1 + c_2 t, \quad u = c_1 e^{\sigma t} + c_2 e^{-\sigma t}, \quad u = c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t \tag{12}$$

соответственно.

(b) Пусть a, b — постоянные. Очевидно, см. [6], что функция $u = e^{\lambda t}$ удовлетворяет уравнению

$$u'' + bu' + au = 0 \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда λ является решением уравнения

$$\lambda^2 + b\lambda + a = 0. \tag{14}$$

В самом деле, подстановка $u = ze^{-bt/2}$ [8] приводит (13) к виду

$$z'' + \sigma^2 z = 0, \quad \sigma^2 = a - \frac{1}{4}b^2.$$

Поэтому, в силу (a), общее решение уравнения (13) имеет вид

$$u = e^{-bt/2}(c_1 + c_2 t) \quad \text{или} \quad u = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{15}$$

в зависимости от того, имеет ли уравнение (14) кратный корень $\lambda = \frac{1}{2}b$ или различные корни

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}b \pm \left(\frac{1}{4}b^2 - a\right)^{1/2}.$$

Если a, b вещественны и $b^2/4 - a < 0$, можно заменить комплексное представление (15) общего решения вещественным по формуле

$$u = e^{-bt/2}\left[c_1 \cos\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)^{1/2} t + c_2 \sin\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)^{1/2} t\right]. \tag{16}$$

(c) Пусть μ — постоянная. Функция $u = t^\lambda$ является решением уравнения

$$u'' + \frac{\mu}{t^2}u = 0 \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda(\lambda - 1) + \mu = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - \mu\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Поэтому, если $\mu \neq 1/4$, общее решение уравнения (17) имеет следующий вид:

$$u = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}, \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - \mu\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Если μ вещественно и $\mu > 1/4$, то общее решение можно записать в вещественном виде

$$u = t^{1/2}\left[c_1 \cos\left(\mu - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \ln t + c_2 \sin\left(\mu - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \ln t\right]. \tag{20}$$

Действительно, замена переменных $u = t^{1/2}z$ и $t = e^s$ переводит (17) в уравнение

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(\mu - \frac{1}{4}\right)z = 0. \tag{21}$$

Поэтому, в силу (a), общее решение уравнения (17) имеет вид

$$u = t^{1/2}\left(c_1 + c_2 \ln t\right) \quad \text{или} \quad u = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2} \tag{22}$$

в соответствии с тем, будет ли $\mu = 1/4$ или $\mu \neq 1/4$.

Утверждение 2. [7] Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + q(t)u = 0. \tag{23}$$

Замена переменных

$$t = e^s \quad \text{и} \quad u = t^{1/2}z \tag{24}$$

приводит (23) к виду

$$\frac{d^2z}{ds^2} + t^2\left[q(t) - \frac{1}{4t^2}\right]z = 0, \quad \text{где} \quad t = e^s. \tag{25}$$

При заданном постоянном μ рассмотрим последовательность функций

$$q_0 = \mu - \frac{1}{4}, \quad q_1(t) = \mu t^{-2}, \quad q_2(t) = t^{-2}\left(\frac{1}{4} + \mu \ln^{-2} t\right), \dots,$$

определенную соотношением $t^2\left[q_n(t) - 1/4t^2\right] = q_{n-1}(s)$, где $t = e^s$, так что $q_n(t) = t^{-2}\left[\frac{1}{4} + q_{n-1}(\ln t)\right]$ или

$$q_n(t) = t^{-2}\left[\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=1}^{k}\ln_j t\right)^{-2} + \mu\left(\prod_{j=1}^{n-1}\ln_j t\right)^{-2}\right] \quad \text{для} \quad n \geqslant 1,$$

$\ln t = \ln t, \ln_j t = \ln(\ln_{j-1} t)$, а в случае, если верхний и нижний индексы у знака произведения совпадают, мы полагаем его равным 1. Если $q(t) = q_n(t), n > 0$, в (23), замена переменных (24) приводит (23) к такому же виду, где $t, q_n(t)$ заменены на $s, q_{n-1}(s)$. В частности, если μ вещественно и $q = q_n(t), n \geqslant 0$, вещественные решения (23) имеют бесконечно много нулей при больших $t > 0$ в том и только в том случае, если $\mu > 1/4$.

3. Основные факты. Рассмотрим следствия, касающиеся однородного и неоднородного уравнений вида:

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0, \tag{26}$$

$$(p(t)w')' + q(t)w = h(t). \tag{27}$$

Для удобства можно записать скалярные уравнения (1) или (2) в виде системы двух уравнений

$$x' = A(t)x, \tag{28}$$

$$y' = A(t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где векторы

$$x = (x^1, x^2) = (u, p(t)u'),$$

$$y = (y^1, y^2) = (w, p(t)w'),$$

а $A(t)$ – матрица второго порядка:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(t)} \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Считаем, если не оговорено противное, что $p(t) \neq 0$, $q(t)$, $h(t)$ и другие коэффициенты являются непрерывными комплексными функциями на t-интервале J (который может быть замкнутым или незамкнутым, ограниченным или неограниченным).

Следствие 1. Если $t_0 \in J$ и u_0, u_0' – произвольные комплексные числа, то задача Коши для уравнения (2)

$$w(t_0) = u_0, \quad w'(t_0) = u_0' \tag{31}$$

имеет единственное решение, существующее при всех $t \in J$. См., [7, лемму IV.1.1.].

Следствие 2. Задача Коши (2) для уравнения (1) при условии, что $u_0 = u_0' = 0$ имеет единственное решение $u(t) \equiv 0$.

Получается, что нули тривиального решения уравнения (1) не имеют предельной точки в интервале J.

Следствие 3. Принцип суперпозиции: если $u(t), v(t)$ – решения уравнения (1), то линейная комбинация этих решений и констант – $c_1u(t) + c_2v(t)$ – тоже решение уравнения (1). Если $w_0(t)$ – решение уравнения (2), то функция $w_1(t)$ будет решением в том случае, если $u = w_1(t) - w_0(t)$ есть решение уравнения (1).

Определение 1. *Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми (л./з.)на некотором интервале (α, β), если*

$$\exists \,\mathrm{const}\; C_1, C_2, \dots, C_n,\; C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 \neq 0 :$$

линейная комбинация

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) = 0. \tag{*}$$

Если равенство (*) выполнено лишь при условии

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0,$$

то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *называются линейно независимыми (л./н.) на* (α, β).

Следствие 4. Пусть $x = (u(t), p(t)u'(t))$, $y = (v(t), p(t)v'(t))$ решения системы (). Для того, что эти решения были л./н. в каждой точке, необходимо и достаточно, чтобы решения уравнения (1) $u(t), v(t)$ были л./н.

Следствие 5. Пусть функции $u(t), v(t)$ – решения (1). Предполагая, что $\exists\ c$ – const, зависящая от $u(t), v(t)$, для определителя Вронского $W_{u,v}(t)$ справедливо равенство:

$$u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = \frac{c}{p(t)}. \tag{32}$$

В этом нетрудно убедиться, если к матрице-функции второго порядка

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ p(t)u'(t) & p(t)v'(t) \end{pmatrix},$$

имеющей нулевой след и определитель $p(t)W(t)$ и являющейся решением системы () применить результаты [7, теоремы 1.2, гл. IV].

Следствие 6. (Тождество Лагранжа) Пусть $f = f(t), g = g(t)$ – непрерывные функции на J, рассмотрим уравнения

$$(pu')' + qu = f, \quad (pv')' + qv = g, \tag{33}$$

Умножая второе уравнение на u, а первое – на v и вычитая результаты и используя равенство

$$[p(uv' - u'v)]' = u(pv')' - v(pu')',$$

получим соотношение:

$$[p(uv' - u'v)]' = gu - fv, \tag{34}$$

которое называется *тождеством Лагранжа.* «Его интегральная форма

$$[p(uv' - u'v)]_a^t = \int\limits_a^t (gu - fv)\, ds, \tag{35}$$

где $[a, t] \subset J$, называется *формулой Грина* [7].

Следствие 7. Согласно следствию 5, если в () $c \neq 0$, то решения уравнения (1) $u(t)$ и $v(t)$ – л./н. А значит любая линейная комбинация $c_1u(t) + c_2v(t)$ некоторых частных решений уравнения (1) и констант является его решением.

Следствие 8. Определитель Вронского любой пары решений $u(t), v(t)$ уравнения (1) будет константой, если в равенстве () $p(t) \equiv \text{const}$ (например, $p(t) \equiv 1$) .

Следствие 9. Если известно тривиальное решение уравнения (1), то чтобы найти его остальные решения требуется решить дифференциальное уравнение первого порядка [4].

Заметим, что для $u(t) \neq 0$ на подынтервале $J' \subset J$, таким уравнением будет уравнение (), которое можно записать виде

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{c}{p(t)u^2(t)}, \tag{36}$$

если поделить () на $u^2(t)$. Здесь u – известная функция, а v – искомая. Интегрируя, получим

$$v(t) = c_1u(t) + cu(t)\int\limits_a^t \frac{ds}{p(s)u^2(s)}, \quad a, t \in J'. \tag{37}$$

Замечание 1. [7] *Если* c_1, c *– произвольные постоянные и* $a, t \in J'$*, то функция* (37) *является решением уравнения* (1)*, удовлетворяющим () на любом интервале* J'*, где* $u(t) \neq 0$.

Рассмотрим решения уравнения (1) – функции $u(t), v(t)$, которые удовлетворяют () с $c \neq 0$.

Следствие 10. Если к уравнению (1) добавить начальные условия $u(s) = 0, p(s)u'(s) = 1$, то можно утверждать, что функция

$$\frac{u(s)v(t) - u(t)v(s)}{c},$$

при фиксированном $s \in J$ – решением уравнения (1). Соответвтенно, решением уравнения (2) с начальными условиям $w(t_0) = w'(t_0) = 0$ будет функция

$$w(t) = c^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} [u(s)v(t) - u(t)v(s)]h(s)ds. \tag{38}$$

Если к (38) прибавить линейную комбинацию $c_1 u(t) + c_2 v(t)$, которая является общим решением уравнения (1), то получим общее решение уравнения (2)

$$w(t) = u(t)\left[c_1 - c^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} v(s)h(s)\,ds\right] - v(t)\left[c_2 + c^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} u(s)h(s)\,ds\right]. \tag{39}$$

Переобозначив нижний предел интеграла $t_0 = a$ и константы

$$c_1 = c^{-1}\int\limits_{a}^{b} v(s)h(s)\,ds, \quad c_2 = 0,$$

считая, что $[a, b] \subset J$, следующее равенство

$$w(t) = c^{-1}\left[v(t)\int\limits_{a}^{t} u(s)h(s)\,ds + u(t)\int\limits_{t}^{b} v(s)h(s)\,ds\right]. \tag{40}$$

описывает частное решение, полученное из (39), которое, вводя обозначения

$$G(t,s) = \begin{cases} c^{-1}v(t)u(s), & \text{если } a \leqslant s \leqslant t, \\ c^{-1}u(t)v(s), & \text{если } t \leqslant s \leqslant b. \end{cases} \tag{41}$$

может быть записано в виде:

$$w(t) = \int\limits_{a}^{b} G(t,s)h(s)\,ds. \tag{42}$$

Замечание 2.[7] *Если функция $h(t)$ (не обязательно непрерывная) интегрируема по $[a, b]$, то функция $w(t)$ является «решением» уравнения (2) в том смысле, что она имеет непрерывную производную w', причем функция $p(t)w'(t)$ абсолютно непрерывна, и соотношение (2) выполняется всюду, за исключением множества точек t нулевой меры.*

Утверждение 3. [7] *Можно проверить, что если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – такие постоянные, что*

$$\alpha u(a) + \beta p(a)u'(a) = 0, \quad \gamma v(b) + \delta p(b)v'(b) = 0,$$

то частное решение (40) уравнения (2) удовлетворяет соотношениям

$$\alpha w(a) + \beta p(a)w'(a) = 0, \quad \gamma w(b) + \delta p(b)w'(b) = 0.$$

Чрезвычайно простой, но важный случай получается при $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, так что уравнение (1) переходит в $u'' = 0$. Тогда $u(t) = t - a$ и $v(t) = b - t$ суть решения уравнения (1), для которых $u(a) = 0$, $v(b) = 0$, и постоянная c в () равна $a - b$. Поэтому функция

$$w(t) = \frac{1}{a-b}\left[(b-t)\int\limits_{a}^{t} (s-a)h(s)\,ds + (t-a)\int\limits_{t}^{b} (b-s)h(s)\,ds\right] \tag{43}$$

удовлетворяет уравнению $w'' = h(t)$ и условиям $w(a) = w(b) = 0$.

Утверждение 4. [7]*Пусть $[a, b] \subset J$. Покажите, что наиболее общей функцией $G(t, s)$, определенной при $a \le s$, $t \le b$, для которой (2.16) является решением уравнения (2.2) при $a \le t \le b$ и при любой непрерывной функции $h(t)$, является функция*

$$G(t,s) = \begin{cases} c^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} a_{jk}u_j(t)u_k(s), & \text{если } a \le s \le t, \\ c^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} b_{jk}u_j(t)u_k(s), & \text{если } t \le s \le b, \end{cases}$$

где $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — *такие постоянные матрицы, что*

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $u_1 = u(t)$, $u_2 = v(t)$ — *решения уравнения* (1), *удовлетворяющие* () *с* $c \neq 0$. *В этом случае функция* $G(t,s)$ *непрерывна при* $a \leqslant s, t \leqslant b$.

Утверждение 5. [7] *Пусть* a *(а возможно, и* b*) является бесконечной граничной точкой* J, *не принадлежащей* J, *так что* $p(t), q(t), h(t)$ *и* $u(t), v(t)$ *не обязательно имеют пределы при* $t \to a+0$ *(или соответственно при* $t \to b-0$*). Пусть, однако,* h, u, v *таковы, что интегралы в* (40) *сходятся (возможно, только условно). Тогда функция* (40) *удовлетворяет уравнению* (2) *на* J.

Это можно проверить дифференцируя (40) или прямо подставляя (40) в (2).

Вариация постоянных. Рассмотрим одновременно с (1) уравнение

$$(p_0(t)w')' + q_0(t)w = 0, \tag{44}$$

где функции $p_0(t) \neq 0$, $q_0(t)$ также непрерывны на J. Уравнение (44) эквивалентно соответствующей системе уравнений первого порядка

$$y' = A_0(t)y, \tag{45}$$

где

$$y = (u, p_0(t)u') \quad \text{и} \quad A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/p_0(t) \\ -q_0(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Пусть $u_0(t), v_0(t)$ – линейно независимые решения системы (44), такие, что матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_0 & v_0 \\ p_0u_0' & p_0v_0' \end{pmatrix} \tag{47}$$

является фундаментальной для системы (45) и $\det Y(t) \equiv 1$, т. е.

$$p_0(u_0v_0' - u_0'v_0) = 1.$$

Отсюда

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} p_0v_0' & -v_0 \\ -p_0u_0' & u_0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x = Y(t)y = \begin{pmatrix} u_0y^1 + v_0y^2 \\ p_0u_0'y^1 + p_0v_0'y^2 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

входящих в систему (). Вектор y удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$y' = C(t)y, \tag{50}$$

где $C(t) = Y^{-1}(t)[A(t) - A_0(t)]Y(t)$. см. [7, теорема IV.2.1]. Прямой подсчет, использующий (), (46), (47) и (48), показывает, что

$$C(t) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right) p_0^2 \begin{pmatrix} u_0'v_0' & {v_0'}^2 \\ -{u_0'}^2 & -u_0'v_0' \end{pmatrix} + (q - q_0) \begin{pmatrix} u_0v_0 & v_0^2 \\ -u_0^2 & -u_0v_0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

В частности, при $p_0(t) = p(t)$, когда уравнение (44) имеет вид

$$(pw')' + q_0w = 0, \tag{52}$$

матрица $C(t)$ *зависит от* $u_0(t), v_0(t)$, *но не зависит от их производных.* В этом случае уравнение (1) и эквивалентная ему система () сводятся к системе

$$y' = (q - q_0) \begin{pmatrix} u_0v_0 & v_0^2 \\ -u_0^2 & -u_0v_0 \end{pmatrix} y. \tag{53}$$

Пример 1. Введем обозначение $w = u(t)$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$(w')' + q_0t = h(t),$$

где $h = [q_0(t) - q(t)]u(t)$. Тогда его решение можно представить в виде (39), где $c = 1$, а $u(t), v(t)$ заменены на $u_0(t), v_0(t)$. Применяя замену (49), в которой $p = p_0$, а $x = (u(t), p(t)u'(t))$, видим, что коэффициентами при $u_0(t), v_0(t)$ в формуле, аналогичной (39), служат компоненты y^1, y^2 соответствующего решения $y(t)$ системы (53). Таким образом стал понятен смысл этих решения системы (53) для соответствующего решения $u(t)$ уравнения (1).

Следствие 11. Зная нетривиальное на J частное решение $u_0(t)$ уравнения (52) используя следствие 9, можно найти л./н. решения этого уравнения с помощью квадратур. А значит и получит матрицу из (53).

Результат следствия 11 достаточно просто получается напрямую: выберем ненулевой на J решение $w(t)$ уравнения (52) и сделаем замену

$$u = w(t)z, \tag{54}$$

в уравнении (1). Тогда получим уравнение

$$w(pz')' + 2pz'w' + [(pw')' + qw]z = 0,$$

или, если умножить на w:

$$(pw^2z')' + w[(pw')' + qw]z = 0. \tag{55}$$

Используя (52) его можно записать так:

$$(pw^2z')' + w(q - q_0)z = 0. \tag{56}$$

Получается, что наша замена (54) редуцирует уравнение (1) к (55) или к (56).

Существует и еще один подход: рассмотреть функцию не нулевую непрерывно дифференцируемую функцию $w(t)$, для которой $p(t)w'(t) \in C^1$. В этом случае, из (52) получаем $q_0(t) = -\dfrac{(pw')'}{w}$. Подстановка (54) будет называться также *вариацией постоянных*.

Подстановка Лиувилля. Рассмотрим уравнение

$$u'' + q(t)u = 0, \tag{57}$$

которое представляет собой частный случай (1): $p(t) \equiv 1$. Возьмем ненулевую вещественную функцию $q(t)$ класса C^2[1], для которой

$$\pm q(t) > 0, \quad \text{где} \quad \pm = \operatorname{sgn} q(t) \tag{58}$$

не зависит от t. В этом случае равенство

$$u = w(t)z, \quad \text{где} \quad w = |q(t)|^{-1/4} > 0 \tag{59}$$

описывается вариацию постоянных и сводит (57) к (55) с $p \equiv 1$. Имеем:

$$(|q|^{-1/2}z')' \pm \left(|q|^{1/2} - \frac{q''}{4|q|^{3/2}} \pm \frac{5q'^2}{16|q|^{5/2}}\right) z = 0. \tag{60}$$

Если заменить $t \to s$, считая, что

$$ds = \frac{dt}{|q|^{1/2}}, \tag{61}$$

то уравнение (60) упростится и получим

$$\frac{d^2z}{ds^2} \pm f(s)z = 0, \tag{62}$$

где через $f(s)$ обозначено выражение

$$1 - \frac{q''}{4|q|^2} \pm \frac{5q'^2}{16|q|^3}, \quad q' = \frac{dq}{dt}. \tag{63}$$

Здесь независимой переменной для q и ее производных является функция $t = t(s)$, обратная к функции s= $s(t)$, которые связаны (61) и могут быть получены с помощью квадратуры, см. (7).

Замена переменных (59), (61) называется *подстановкой Лиувилля*.

Утверждение 6. [7] *Подстановка Лиувилля или повторное применение ее, часто приводит к дифференциальному уравнению типа* (62), *в котором функция $f(s)$ «близка» к постоянной.*

В утверждении 1 (с) приводится пример простого предельного случая такой подстановки.

Рассматривая вариацию произвольных постоянных, подстановку Лиувилля и следствие 11, я увидела как уравнение (1) можно преобразовать в различные линейные уравнения второго порядка или в соответствующие линейные системы двух уравнений первого порядка.

А если использовать замену

$$r = \frac{p(t)u'}{u}, \tag{64}$$

где

$$r' = \frac{(pu')'}{u} - \frac{\left(\frac{pu'}{u}\right)^2}{p},$$

то уравнение (1) можно привести к соответствующему *нелинейному* уравнению или к системе. Действительно, поделив (1) на u и используя (64), получим уравнение Риккати, соответствующим (1).

$$r' + \frac{r^2}{p(t)} + q(t)r = 0. \tag{65}$$

Замечание 3. В общем случае уравнение вида $r' = a(t)r^2 + b(t)r + c(t)$, где правая часть является квадратичным полиномом от r, называется дифференциальным уравнением Риккати.

Следствие 12.[7] *Нетрудно проверить следующий факт: если* $u(t)$ *– решение уравнения* (1), *не равное нулю на* t*-интервале* $J'(\subset J)$, *то функция* (64) *является решением уравнения* (65) *на* J'. *Обратно, если* $r = r(t)$ *– решение уравнения* (65) *на* t*-интервале* $J'(\subset J)$, *то, интегрируя* (64), *мы получаем решение*

$$u = c \quad exp \int^t \frac{r(s)ds}{p(s)} \tag{66}$$

уравнения (1), *не равное нулю ни в одной точке из* J'.

Преобразование Прюфера. [7] Пусть $u = u(t) \not\equiv 0$ – вещественное решение уравнения (1), и пусть

$$\rho = (u^2 + p^2u'^2)^{1/2} > 0, \quad \phi = \operatorname{Arctg}\frac{u}{pu'}. \tag{67}$$

Поскольку uu' не могут обратиться в нуль одновременно, то, фиксируя соответствующее значение функции ф в некоторой точке $t_0 \in J$ мы определяем с помощью второго из равенств (67) непрерывно дифференцируемую функцию $\phi(t)$. Соотношения (67) переводят уравнение (1) в систему

$$\phi' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\phi + q(t)\sin^2\phi, \tag{68}$$

$$\rho' = -\left[q(t) - \frac{1}{p(t)}\right]\rho\sin\phi\cos\phi. \tag{69}$$

В уравнение (68) входит лишь одна из неизвестных функций ϕ. Если решение $\phi = \phi(t)$ уравнения (68) известно, то соответствующее решение уравнения (69) может быть найдено с помощью квадратуры. Преимущество уравнения (68) по сравнению с (65) состоит в том, что всякое решение уравнения (68) существует на всем интервале J, где непрерывны p и q. Это видно из соотношения, связывающего решения уравнений (1) и (68).

Пример 2. Нетрудно проверить, что если функция $\tau(t) > 0$ непрерывна на J и имеет локально ограниченную вариацию (т. е. имеет ограниченную вариацию на всех замкнутых ограниченных подынтервалах из J) и если $u = u(t) \not\equiv 0$ – вещественное решение уравнения (1), то равенства

$$\rho = (\tau^2u^2 + p^2u'^2)^{1/2} > 0, \quad \phi = \operatorname{Arctg}\frac{\tau u}{pu'} \tag{70}$$

при фиксированном значении $\phi(t_0)$ для некоторого $t_0 \in J$ однозначно определяют непрерывные функции $(t), \phi(t)$, имеющие локально ограниченную вариацию и

$$d\phi = \left(\frac{\tau}{p}\cos^2\phi + \frac{q}{t}\sin^2\phi\right)dt + (\sin\phi\cos\phi)d(\ln\tau), \tag{71}$$

$$d(\ln p) = -[\left(\frac{q}{\tau} - \frac{\tau}{p}\right)\sin\phi\cos\phi]dt + (\sin^2\phi)d(\ln\tau). \tag{72}$$

Соотношения (71) и (72) следует понимать так, что интегралы Римана – Стильтьеса (см. [?]) от обеих их частей равны. Обратно, (непрерывные) решения системы уравнений (71), (72) определяют решения уравнения (1) с помощью соотношений (70). Заметим, что если $q(t) > 0, p(t) > 0$ и функция $q(t)p(t)$ имеет локально ограниченную вариацию, то, полагая

$$\tau(t) = p^{\frac{1}{2}}(t)q^{\frac{1}{2}}(t) > 0$$

получаем

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\tau}{p} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}},$$

а соотношения (70), (71) и (72) переходят в равенства

$$\rho = (pqu^2 + p^2u'^2)^{1/2} > 0, \quad \phi = \operatorname{arctg}\frac{q^{1/2}u}{p^{1/2}u'}, \tag{73}$$

$$d\phi = \frac{q^{1/2}}{p^{1/2}}dt + \left(\frac{1}{2}\sin\phi\cos\phi\right)d(\ln pq), \tag{74}$$

$$d(\ln\ p) = \left(\frac{1}{2}\sin^2\phi\right)d(\ln\ pq). \tag{75}$$

Заключение. В результате проведенного исследования были изучены необходимые сведения о линейных уравнениях второго порядка и их свойства. Занимаясь изучением разнообразного научного материала по выбранной теме, мне стало понятно, что выбранная тема занимает ключевое место в математике, физике, инженерии и других областях, где моделируются динамические процессы и системы. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка не только представляют собой теоретический интерес, но и являются важным инструментом для построения моделей, которые способствуют более глубокому пониманию и более точному прогнозированию динамики различных процессов в природе и технике.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ольге Викторовне Черновой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Крейн С. Г. и др. Функциональный анализ. М, 1972. – 544 с.
2. Крейн С. Г., Ушакова В. Н. Математический анализ элементарных функций. – М. : Физматгиз, 1963. – 168 с.
3. Математики [Электронный ресурс]: Большая Российская Энциклопедия. – Режим доступа: [https://bigenc.ru/c/koshi-ogiusten-lui-9cc9cf] (дата обращения: [24.03.2025])
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1959. – 470 с.
5. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. – 413 с.
6. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М. Ленанд, 2024. – 248 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. – 720 с.

Поступила в редакцию 01.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Деловая Кристина Сергеевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию