Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Жукова С. А.
1759013@bsuedu.ru

Аннотация. Работа носит реферативный характер. Рассматриваются необходимые понятия теории дифференциальных уравнений. Приведены различные примеры. В том числе и пример дифференциального уравнения, решение которого, как функция заданная одим и тем же аналитическим выражением, но определена на разных интервалах, понимаются как два различных решения этого уравнения. Сформулированы теоремы существования и единственности для уравнения первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, задача Коши, теоремы существования и единственности

Для цитирования: Жукова С. А. 2025. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 72–82.

Введение. Уравнения, представляющие функциональную связь независимой переменной $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, неизвестной функции $y(x)$ и ее производных до порядка n, т. е. уравнения вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

есть предмет изучения теории дифференциальных уравнений. Предполагается, что переменная x одномерна, т. е. принадлежит некоторому интервалу или любому связанному множеству числовой прямой, например $x \in [a, b)$ или $x \in (a, b]$ или $x \in [a, b]$ в разном контексте, главное, что это должно быть связное множество числовой прямой и неизвестная функция y вообще говоря может и не принадлежать $\mathbb{R}$.

«Следующее уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

называют дифференциальным уравнением (ДУ), разрешенное относительно старшей производной» [12].

Определение. *«Решением дифференциального уравнения* (1) *называется n раз дифференцируемая функция* $\varphi(x)$, *определенная на интервале* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *обращающая уравнение в тождество на этом интервале» [13].*

Необходимо отметить, что когда мы говорим, что произвольная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, необходимо одновременно понимать, где это условие выполняется. Достаточно часто, ниже приведен соответствующий пример такой ситуации, получается, что функция, которая задаётся одим и тем же аналитическим выражением, но определена на разных интервалах, понимаются как два различных решения.

Пример.

$$y' = -y^2. \tag{3}$$

Решение. Используя метод подбора устанавливаем, что функция $y = \frac{1}{x}$, определенная на определена на двух полуосях: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, является решением (3). Если к этой функции прибавить константу, причем константа может прибавляться разная в каждом из этих интервалов, то решение все-равно останется решением. Значит,

$$y_1 = \frac{1}{x} + C_1, \quad x \in (-\infty; 0) \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1}{x} + C_2, \quad x \in (0; +\infty) \tag{4}$$

два разных решения, каждое со своей областью определения. Гиперболы, которые описывает решение y_1 «скользят» при изменении константы в левой полуплоскости, см. рисунок 1, а гиперболы, которые описывает решение y_2 – в правой, см. рисунок 2. Т. е. мы не можем

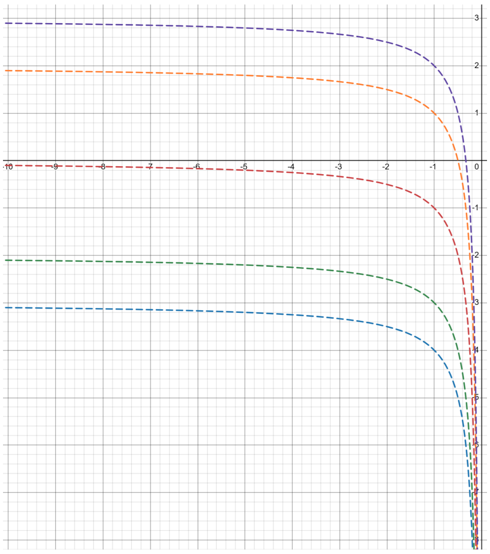

Рис. 1. семейства решений уравнения (3) при $x \in (-\infty; 0)$

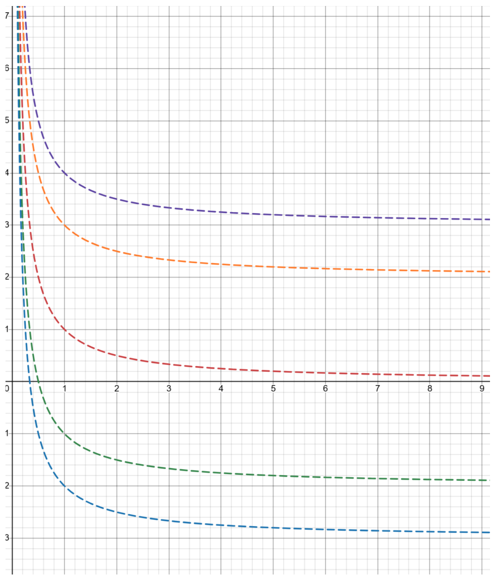

Рис. 2. семейства решений уравнения (3) при $x \in (0; +\infty)$

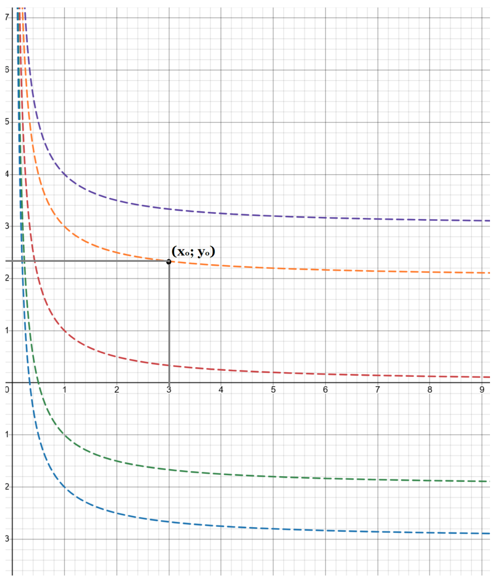

Рис. 3. задача Коши для решения уравнения (3) при $x \in (0; +\infty)$

сказать, что разрывная функция $\frac{1}{x}$, определенная на всей числовой прямой, будет является решеним.

Более того, ограничив какое решение (3) на некоторый конечный интервал, получаем тоже другое решение на этом интервале, которое может быть продолжимо за его границы.

Вопрос продолжения решения один из существенных вопросов проведенного исследования в данной работе.

Если найти решение дифференциального уравнения в квадратурах (т. е. выразить его через элементарные функции и интегралы от них) не удается, то требуется выяснять вопрос о существовании решения этого уравнения на некотором заданном множестве. В основном обсуждается вопрос, так называемого, локального существования решения – существование решения в окрестности данной точки. К вопросам исследования относится и следующий вопрос: является ли это решение единственным, если наложить на него некоторые дополнительные условия. Как было показано в примере 0.1 для дифференциального уравнения первого порядка решение определяется с точностью до константы, даже если задать интервал его существования, например, в виде полуоси $(0;+\infty)$.

В случае уравнения (3) можно заметить (см. рисунок 3), что зафиксировав на плоскости, например, в первой четверти, точку с координатами $(x_0; y_0)$ можно выделить единственную ветвь гиперболы, описываемой решением y_1, которая пройдет через указанную точку (задача Коши[4]). Это можно сразу видеть исходя из вида решения и также будет обсуждать в данной работе. Отметим, что для уравнений первого порядка при определенной гладкости правой части одного условия $y(x_0) = y_0$ будем достаточно для гарантирования единственности решения. Для уравнений более высоко порядка, в тех же условия, уже необходимо указывать значения не только функции, но и ее производных, в том числе, до порядка $n-1$. Также будет обсуждаться вопрос о максимальном интервале существования решения. Как видно из примера , функция $\frac{1}{x}$ является решением и на любом связном множестве, которое является подмножеством полуоси, например $(0;+\infty)$. Глобально решение можно продолжить на полуось $(0;+\infty)$, которая в данном случае и будет максимальным интервалом существования решения. Единственность решения будет гарантироваться теоремами именно локально, т. е. в окрестности точки $(x_0; y_0)$, а вот насколько дальше можно распространить это решение определяется уже другим набором теорем и является предметом дополнительного исследования. Отметим, что если известно о существовании решения и определен максимальный интервал его существования этого решения, то естественно понять какие у него свойства. При выражении решения в квадратурах, эти свойства можно уяснить из аналитического вида выражения решения , а если решение в квадратурах не находится, тогда нужны дополнительные исследования, которые составляют предмет качественной теории дифференциальных уравнений [7].

Опираясь на все выше сказанное, можно сформулировать основную *цель* исследования – рассмотреть формулировки и доказательства теорем, которые обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши (ЗК).

1. Общие сведения. Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. *«Дифференциальное уравнение*

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \tag{5}$$

есть ДУ первого порядка, не разрешённое относительно производной» [10].

Пока, чтобы была выполнена теорема о неявной функции[5], кроме непрерывности функции F и $F'_{y'}$ никаких дополнительных ограничений на F не накладывается.

Определение. *«Уравнение*

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \tag{6}$$

называется уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной» [12].

Такие уравнения изучать очень удобно, так как для них доказательства и существования решения и единственность решения, которое наделено дополнительным условием, например $y(x_0) = y_0$ гораздо удобнее, чем для уравнений общего вида.

Заметим, что уравнение (6) обладает интересным *геометрическим смыслом*: если в правой части уравнения зафиксировать точку $(x_0; y_0)$,то в каждой точке можем определить значение производной. Таким образом, если считать функцию y решением этого уравнения, то можно определить тангенс угла наклона касательной к графику решения в данной точке.

Определение. *«Решением дифференциального уравнения* (5) *называется дифференцируемая функция $\varphi(x)$, определенная на интервале (a, b) числовой прямой $\mathbb{R}$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале» [13].*

[4]«Коши́ Огюсте́н Луи́ (Augustin Louis Cauchy) (21.8.1789, Париж – 23.5.1857, Со), французский математик. В теории дифференциальных уравнений с именем Коши связаны постановка задачи Коши, основные теоремы существования решений» [5].

[5]Теорема о неявной функции является одной из важнейших теорем математического анализа. Она гарантирует локальное существование и описывает свойства неявной функции [2].

Согласно этому определению, у решения каждому значению x из области определения соответствовало единственное значение y. Но есть такие уравнения у которых решениями являются функции, заданные параметрически.

Пример. Уравнение

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{7}$$

имеет в качестве решений кривые $x^2 + y^2 = C, y \neq 0$ т. е. окружность с выколотыми концами горизонтального диаметра.

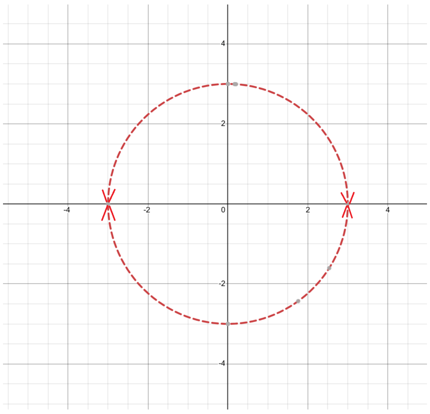

Рис. 4. решений уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ при $C = 9$

Очевидно, что выразив y через x из выражения $x^2 + y^2 = C$, получим $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ – два решения (см. рисунок 4) уравнения (7) и их совокупность функцией не является.

Чтобы можно было рассматривать всю эту кривую, как решение уравнения вводятся понятия поле направлений [5] и интегральных кривых [1].

Таким образом, если решение – функция, то интегральная кривая поля направлений функцией быть не обязана. Если интегральная кривая функция, то она является графиком решения. Иногда понятия график решения и интегральная кривая отождествляются, но, как видно из примера их лучше все-таки различать.

2. Теоремы существования и единственности. Как известно, см., например [3], или [8]

Определение. *Общим решением уравнения называется такая функция или их совокупность, которая содержит все решения данного уравнения и только их.*

Таким образом, если

$$y = \varphi(x, C) \tag{8}$$

есть общее решение, то эта функция при любом C является решением и любое решение уравнения может быть получено из формулы (8) при некотором C. Наряду с общим решением будем рассматривать *частное решение* уравнения, которое получается из (8) при подстановке конкретного значения C. При интегрировании равнений первого порядка возникает семейство решений. При каждом C получаем своё решение уравнения, которые заполняют всю плоскость в области определения x. Если мы хотим выбрать какое-то одно, исключительное, решение из этого семейства, то какие имеются для этого возможности? Одна из возможностей – поставить для уравнения задачу Коши, т. е. зафиксировать значение решения в фиксированной точке.

Для уравнения первого порядка (6) задача Коши ставиться условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

где функция $f(x, y)$ из (6), определенная на некотором множестве числовой прямой по x и y, непрерывна в односвязной [?] области $D \subset \mathbb{R}^2$. Эту задачу еще называют начальной задачей, потому что задаём значение функции в начальной точке $(x_0; y_0) \in D$ и смотрим, как ведет себя решение, выходящее из этой точки. Возникает вопрос: *можно сделать такой выбор интегральной кривой единственным образом*? Или есть такие уравнения, у которых существует несколько решений, которые проходят через эту точку.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt{y}$. Проинтегрировав его как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\left[\begin{array}{l} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx, \quad \text{при} \quad y \neq 0; \\ \qquad y = 0 - \text{решение.} \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} y = \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2; \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Эта совокупность задаёт общее решение уравнения. Заметим, что для этого уравнения если $y_0 \neq 0$, то решение, удовлетворяющее условию (9) единственно. При этом, если необходимо рассматривать его не локально, а глобально, определенное на всей числовой прямой, то его можно гладко «склеить» (производная параболы $\left(\frac{x+C}{2}\right)^2$ и прямой $y = 0$ на оси Ox совпадают и равны 0) с нулевым решением $y = 0$ и функция, которая получится в результате будет непрерывным, более точно, непрерывно дифференцируемым решением уравнения, удовлетворяющим начальному условию (9). Если определить данные задачи Коши на прямой $y = 0$, то получим неединственность: бесконечное множество решений, проходящих через данную точку.

Чтобы перейти к формулировке теоремы, напомним определения понятий точка единственности и точка неединственности.

Определение. *«Точка $(x_0; y_0)$ называется точкой единственности решения $y = \varphi(x)$, если не существует другого решения, проходящего через эту точку, не совпадающего с ним и в какой окрестности этой точки. Остальные точки называются точками неединственности» [8].*

Из определение следует, что если через точку проходит другое решение уравнения, несовпадающее ни в какой окрестности данной точки с решением $y = \varphi(x)$, то это точка неединственности. Из только точек неединственности состоит прямая $y = 0$ в примере .

Определение. *«Решение, состоящее из точек неединственности называется особым решением дифференциального уравнения»[15].*

Таким образом, в формулу общего решения уравнения может включаться особое решение, которое будет также являться частным решением для данного уравнения, но которое не содержится в семействе решений. Отметим, что решение, не содержащее в семействе может быть и не особым. Перейдём к формулировке теоремы $\exists$ и ! решения задачи Коши (9) для уравнения (6).

Теорема.[15] Пусть в уравнении (6) функция $f(x, y)$:

1. определена и непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x; y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$$

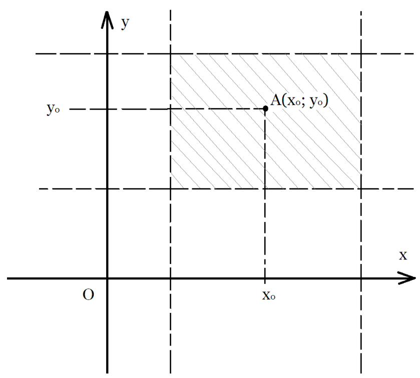

Рис. 5. прямоугольник П

2. $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица [6][9] по переменной y :

$$\exists\, C : \forall (x, y_1), (x, y_2) : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|.$$

Тогда решение задачи Коши (6) – (9) существует и единственно в некоторой окрестности

$$U_h(x_0) = (x_0 - h; x_0 + h),$$

где $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_{\Pi} |f(x, y)|$.

Замечание 1. Так как $\exists$ и ! гарантируется лишь в окрестности точки, то теорема носит локальный характер.

[6] «Ру́дольф О́тто Си́гизмунд Ли́пшиц (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz; 14 мая 1832, Кёнигсберг, Пруссия, ныне Россия – 7 октября 1903, Бонн, Германия) — немецкий математик » [5].

Замечание 2. Теорема предоставляет только достаточное условие $\exists$ и ! решения задачи Коши.

Замечание 3. Для существования решения достаточно выполнения первого условия теоремы . В противном случае, решение уравнения (6) может не существовать.

Пример (К замечанию 3). Рассмотрим уравнение

$$y' = \operatorname{sign} x$$

Решением такого уравнения естественно претендует быть $|x|$, но функция модуль не дифференцируемая в точке ноль, значит решение в точке ноль не определено. Это связано с тем, что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в нуле. И естественное, в предположении, решение $y = |x|$ не удовлетворяет нашему уравнению в силу не существования его производной в точке разрыва.

Замечание 4. Второе условие теоремы выполнено, если функция $f(x, y)$ принадлежит классу C^1 по y.

Пример (К замечанию 1). Приведем пример нелинейного уравнения первого порядка в которое входят линейные слагаемые и квадратичная нелинейность неизвестной функции:

$$y' = y^2 - 2y + 1, \tag{10}$$

Данное уравнение – частный случай уравнения Риккати [3, стр. 51]. Интегрируя его как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx, \quad \text{при} \quad y \neq 1; \\[2ex] \qquad y = 1 - \text{тоже решение.} \end{array}\right.$$

или интегрируя первое уравнение, получаем семейство решений

$$y = -\frac{1}{x+C} + 1$$

и решение $y = 1$, которое не входит в семейство ни при каком C.

Вопрос о том решение $y = 1$ особое или частное будем разбирать отдельно?

Изобразим это семейство решений:

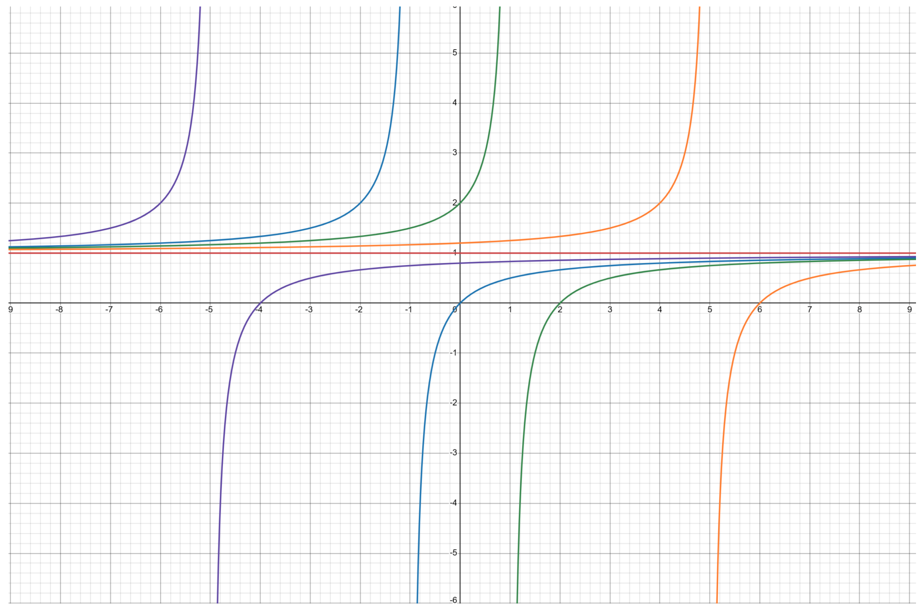

Рис. 6. интегральные кривые уравнения (10)

Из рисунка 6 видим, что никакие интегральные кривые не пересекаются, но решение всегда «привязано» к области определения: у этого уравнения есть три группы решений. Первая группа – это решение $y = 1$, которое определено на всей числовой прямой. Вторая группа – решения $y = -\dfrac{1}{x+C} + 1$, которые определены на интервале $(-\infty; -C)$, т. е. решения, с ограниченной областью определения. Третья группа – решения, также с ограниченной областью определения $(-C; +\infty)$ – $y = -\dfrac{1}{x+C} + 1$, причем константы в решениях второй и третьей групп, вообще говоря, разные. Так как $\forall\ y$ правая часть уравнения (10), функция

$$y^2 - 2y + 1 \in C^1$$

второе условие теоремы выполнено. Но, как видно из рисунка 6, глобальное существование решения имеется только для функции $y = 1$, которая в данном случае является частным решением уравнения (10) в силу того, что никакие другие интегральные кривые его не пересекают. Т. е. теорема действительно носит *локальный характер.* Факт локального существования решения задачи Коши сохранится и в случае удовлетворения условию Липшица правой части уравнения.

Рассмотрим теперь уравнения вида

$$y' = f(y), \tag{11}$$

где функция $f(y)$ принадлежит классу $C(a, b)$. Здесь используется интервал, описанный выражением $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Рассмотрим такой пример.

Пример. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y' = f(y), \quad y(0) = 0, \quad \text{если} \quad f(y) = \begin{cases} 1, \text{при } y < 0; \\ -1, \text{при } y \geq 0. \end{cases}$$

Интегрируя, получим

$$y = \begin{cases} x + C_1, \text{при } y < 0; \\ -x + C_2, \text{при } y \geq 0. \end{cases}$$

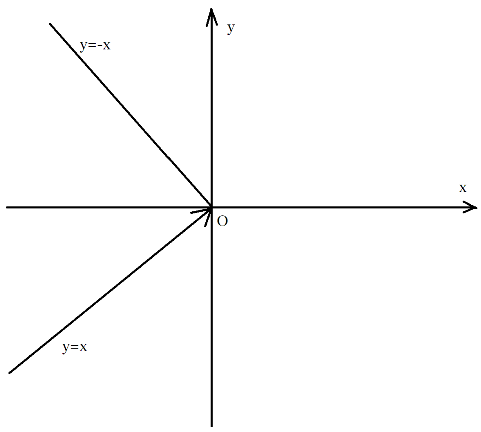

Рис. 7. интегральные кривые уравнения $y' = f(y)$ при $C_1 = C_2 = 0$ из примера

Возникает вопрос: в какой области решение задачи Коши для этого уравнения существует? Как видно из рисунка 7, функция $y = -x$ при $x \leq 0$ решение, а функция $y = x$ решением задачи не является. При $x > 0$ решений нет.

Отметим, что если правая часть уравнения (6) не содержит x, то условия теоремы можно ослабить: *может быть невыполненным условие Липшица, а факт единственности будет иметь место.* В разобранных выше примерах, где правые части уравнений не зависели от x наблюдались разные возможности решения задачи Коши: единственность, но не продолжаемость решения в примере и нарушение единственности в примере при $y = 0$.

Перейдем к решению вопроса: *найти условия, при которых $y = C$ особое решение или содержит их.* Разделим переменные в уравнении (11):

1. $f(y) = 0 \Rightarrow y = C$ – решения, графики которых есть горизонтальные прямые.

2. $f(y) \neq 0 \Rightarrow$ можно разделить переменные $\frac{dy}{f(y)} = dx$ и проинтегрировать не только как определенный интеграл, но и на конкретном множестве.

Возьмем на плоскости, см. рисунок 8, произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и «выпустим» из этой точки интегральную кривую. Для определенности считаем, что $0 < x_0, y_0 < C$.

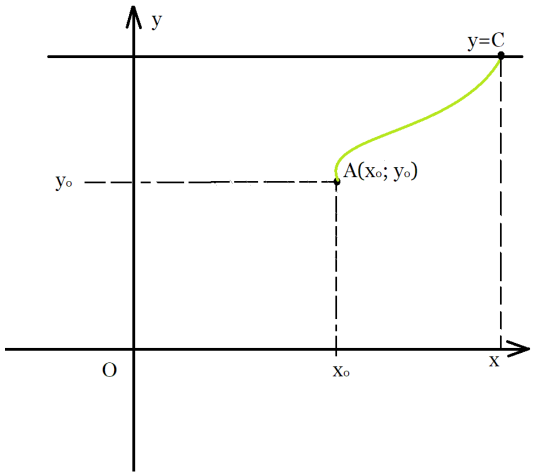

Рис. 8. интегральные кривые уравнения (10)

Зададимся вопросом: *найдется ли для каждой точки решения $y = C$ интегральная кривая, проходящая через произвольную точку плоскости $A(x_0, y_0)$, которая пересечёт прямую $y = C$ в произвольной точке на ней?* Проинтегрируем равенство $\dfrac{dy}{f(y)} = dx$ от x_0 до x, см. рисунок 8

$$\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)} = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}.$$

Отсюда делаем вывод, что x конечно если несобственный интеграл, с особенностью в точке C, сходится. Т. е. решение уравнения (11), выходящее из точки $A(x_0, y_0)$ за *конечное* время пересечёт прямую $y = C$. Таким образом получили критерий для того, что бы решение $y = C$ было особым.

Теорема.

$$y = C\text{– особое решение} \Leftrightarrow \int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)} < \infty.$$

Заметим, что так как правая часть уравнения (11) не зависит x и значит от сдвига по x, то сформулированный критерий справедлив для любого $x \in \mathbb{R}$. Приведём пример «односторонней» единственности решения задачи Коши.

Пример. Рассмотрим задачу $y' = f(y)$, где

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, \text{при } y \geq 0; \\ y, \text{при } y < 0. \end{cases}$$

В данном случае на единственность будем исследовать прямую $y = 0$. Решения будем «выпускать» из точки y_0, которая лежит над этой прямой и из точки $\tilde{y}_0$ под этой прямой. Необходимо проверить сходимость следующих двух интегралов:

$$1. \quad \int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}\Big|_{y_0}^{0} = -2\sqrt{y_0} < \infty,$$

значит, выходят из точки, которая выше оси Ox, в какой-то момент времени пересечём интегральную кривую $y = 0$. В силу автономности уравнения (правая часть не зависит от x) это утверждение верно для всех $x \in \mathbb{R}$.

$$2. \quad \int\limits_{\tilde{y}_0}^{0} \frac{dy}{y} = \ln|y|\Big|_{\tilde{y}_0}^{0} = -\infty,$$

т. е. ни за какое время наша интегральная кривая, выходя из точки $\tilde{y}_0$ не достигнет прямой $y = 0$. Это будет справедливо для всех точек, расположенных под осью абсцисс.

Формулировок теоремы $\exists$ и ! достаточно много, как и методов доказательств.

Теорема. (Пикара) Пусть П – прямоугольник, см. рисунок 5. Функция $f(x,y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi)$. Тогда решение задачи (6) – (9) существует и единственно на отрезке $(x_0 - h; x_0 + h)$, где $h = \min\left(a; \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$, $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, L – константа Липшица.

Главное отличие формулировки этой теоремы от формулировок других теорем $\exists$ и ! в том, что и при доказательстве существования и при доказательстве единственности сразу предполагается выполнение одновременно двух условий: $f(x,y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi)$, что существенно упрощает доказательство Кроме того, теорема даёт конструктивный метод построения решения уравнения в отличие от большинства теорем существования, которые не показывают как строить решение, существование которого утверждается. В конце этой главы сформулируем теоремы о продолжении решения.

Теорема. Пусть $D \in \mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная область и $(x_0, y_0) \in D$. Пусть правая часть уравнения (6) $f(x,y) \in C(D) \cap Lip_{loc_y}(D)$ (или можно взять более сильное условие $f'_y \in C(D)$). Тогда решение задачи Коши (6) – (9) продолжается вплоть до выхода на границу D.

Следствие. Пусть $D \in \mathbb{R}^2$ такая область, что любая ее подобласти, ограниченная прямыми $x = c$ и $x = d$ является ограниченной. Тогда решение либо выйдет на границу области, либо уйдет сколь угодно далеко от точки (x_0, y_0).

Ответ на вопрос о продолжимости решения задачи Коши в случае неограниченной области даёт следующая **Теорема.** «Пусть $D \in \mathbb{R}^2$ – неограниченная область, $(x_0, y_0) \in D$ и функция $f(x,y)$ ограничена в этой области. Тогда решение задачи Коши (6) – (9) можно продолжить или до выхода на границу D или до сколь угодно больших x» [13].

Если не ограничены ни функция и ни область, то

Теорема. « Пусть $D \in \mathbb{R}^2$ – неограниченная область, $(x_0, y_0) \in D$ и функция $f(x,y) \in C(D) \cap Lip_{loc_y}(D)$. Тогда решение задачи Коши (6) – (9) либо подойдет сколь угодно близко к границе области D, либо уйдёт сколь угодно далеко от точки (x_0, y_0)» [13].

Никакая из выше сформулированных теорем не гарантирует продолжение решения на заданный интервал

Замечание. Выполнение условий непрерывности $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ на всем $\mathbb{R}^2$ не гарантирует существования задачи Коши решения на интервале $(-\infty; +\infty)$.

С такой ситуацией сталкивались в примере , где интегральные кривые (ветви гипербол) не были определены на всей числовой прямой, см. рисунок 6. И даже на полупрямой нельзя гарантировать существование решения. А значит должны быть еще каки-то условия, которые бы гарантировали продолжаемость решения на заданный интервал и, в частности, на всю числовую прямую. Сформулируем теорему о продолжении решения на заданный интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Теорема. «Пусть $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны для $x \in (a,b)$, $-\infty < y < \infty$, $x_0 \in (a,b)$ и пусть существуют непрерывные функции $a(x), b(x)$, такие что, $|f(x,y)| \leq a(x)y + b(x)$, $x \in (a,b)$. Тогда решение задачи Коши (6) – (9) продолжается на весь интервал (a,b)» [13].

Приведем пример исследования функции на продолжимость на некоторую область

Пример. Доказать, что любое решение уравнения $y' = x^3 - y^3$ продолжается вправо до сколь угодно больших x. Нарисуем (см. рисунок 10) поле направлений [13]: $y' = 0 \Rightarrow x^3 - y^3 = 0, y = x$, $y' > 0 \Rightarrow x^3 - y^3 > 0, y < x, y' < 0 \Rightarrow x^3 - y^3 < 0, y > x$.

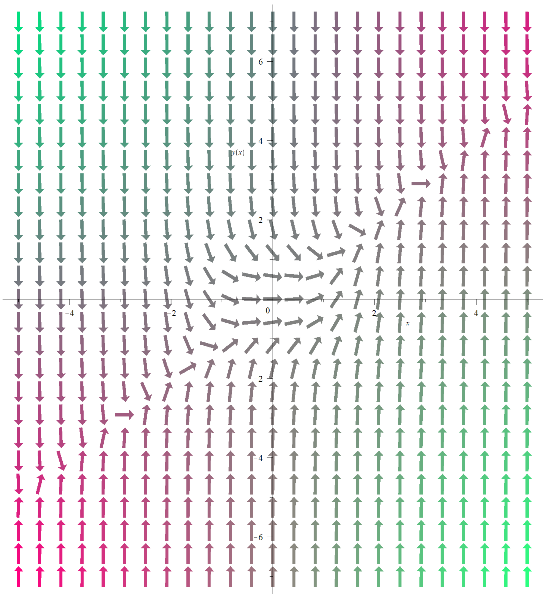

Рис. 9. поле направлений уравнения $y' = x^3 - y^3$

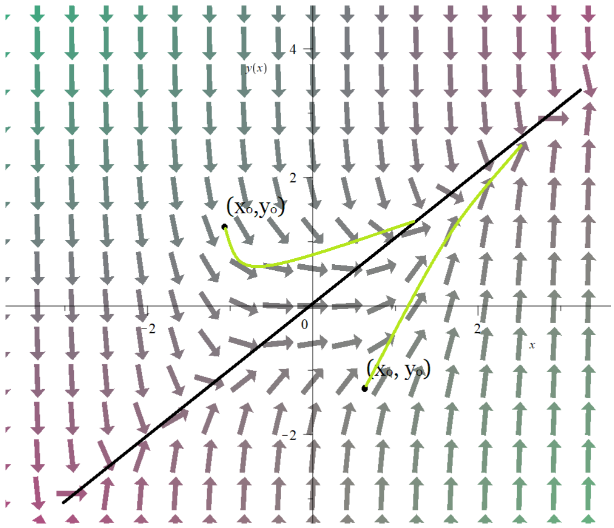

Рис. 10. интегральные кривые уравнения $y' = x^3 - y^3$

Пусть интегральная кривая выходит из некоторой точки (x_0, y_0), расположенной над прямой $y = x$. В силу убывания кривая может или дойти на этой прямой, получим точку локального минимума. Войдя в область под прямой $y = x$ решение уже выйти из этой области не может, так как мешает направление поля, см. рисунок 10. Выходя из точки, расположенной под прямой $y = x$, в силу возрастания, функция не сможет пересечь этой прямой. Напомним [14], что непродолжаемость решения означает, что в какой-то точке оно уходит на $\pm\infty$. В нашем случае решение не уйдет в $-\infty$ в силу возрастания. А в $+\infty$ оно не уйдет, так как в этом случае решению нужно пересекать прямую $y = x$, но направление поля направлений препятствует этому.

Следовательно решение продолжимо на всю числовую прямую.

Заключение. Проведя исследования по этой теме, мне стало ясно, что изучение теорем существования и единственности решений задачи Коши – основополагающий аспект в теории дифференциальных уравнений. И в наше время тема сохраняет свою актуальность в современных математических исследованиях и приложениях, поскольку от результатов этих теорем зависит дальнейшее применение методов решения уравнений в различных областях науки и техники. Кроме того, с развитием численных методов и компьютерного моделирования, важно иметь чёткие теоретические основания для гарантии корректности получаемых результатов. Многие численные алгоритмы основываются на предположениях единственности решения, что подчеркивает важность изучения данной темы как в теоретическом, так и в практическом аспектах. Также стоит отметить, что парадигма существования и единственности решений находит применение не только в классических задачах, но и в более сложных, например, в задачах с частными производными, векторных полях и динамических системах. Это расширяет возможности применения теории дифференциальных уравнений в современных научных исследованиях.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Ольге Викторовне Черновой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Виленкин Н. Я., Доброхотова М. А., Сафонов А. Н. Дифференциальные уравнения. М.: Просвещение, 1984. – 176 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 – 618 с.
3. Коддинтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. – 474 с.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: издательство ЛГУ, 1963. – 564 с.
5. Математики [Электронный ресурс]: Большая Российская Энциклопедия. – Режим доступа: [https://bigenc.ru/c/koshi-ogiusten-lui-9cc9cf] (дата обращения: [24.03.2025])
6. Мельникова И. В., Бовкун В. А. Основы линейного функционального анализа: учебное пособие. М-во науки и ВО РФ, УФУ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-таб 2022 – 184 с.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.:; Л.: Гостекиздат, 1949. – 550 с.4 3-е изд. М.: УРСС, 2004.

8. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.Ж Изд-во МГУ, 1984. – 296.; 6-е изд. М: УРСС, 2003. – 272 с.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. – 331 с.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1959. – 470 с.
11. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. – 367 с.
12. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. – 413 с.
13. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М. Ленанд, 2024. – 248 с.
14. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. – 720 с.
15. Эльсгольц Л. Е. Дифференциальные уравнения. М.: издательство ЛКИ, 200. – 424 с.

Поступила в редакцию 01.06.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Жукова Светлана Алексеевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию