Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 61–71.

Метод последовательных приближений

Кочуров В. О.
1722840@bsuedu.ru

Аннотация. Исследование посвящено применению метода последовательных приближений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель работы – продемонстрировать, как метод последовательных приближений позволяет решать сложные уравнения, сводя их к последовательности более простых задач. На примерах показан алгоритм построения приближённых решений, подтверждающий эффективность итерационных методов для анализа нелинейных и интегральных уравнений. Результаты могут быть полезны для углублённого изучения вычислительной математики и математического моделирования динамических систем.

Ключевые слова: метод Пикара, дифференциальные уравнения, последовательные приближения, сходимость, условие Липшица

Для цитирования: Кочуров В. О. 2025. Метод последовательных приближений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 61–71.

---

1. Введение. В статье рассматривается применение метода последовательных приближений к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), возникающих в различных прикладных задачах. Данный метод играет важную роль в математическом моделировании, особенно в случаях, когда невозможно получить точное аналитическое решение. Элементы использования ОДУ с приближёнными методами встречаются в школьном курсе и активно развиваются в высшем образовании при решении задач механики, электричества, биомоделирования и других направлений.

Актуальность темы обусловлена универсальностью метода Пикара и его способностью обеспечивать пошаговое приближение к решению с заданной точностью. Цель работы — изучение теоретических основ метода последовательных приближений и демонстрация его практического применения к решению нелинейных и интегральных уравнений.

Структура работы включает введение, теоретическую часть (основы и условия применения метода), практическую часть с примерами и их графическим анализом (5 графиков), а также заключение. В работе использованы 8 источников научной литературы, отражающих как классические, так и современные подходы к данной теме.

2. Основные понятия метода последовательных приближений. Особую значимость метод Пикара приобретает при работе с нелинейными уравнениями, где он часто оказывается единственным доступным аналитическим инструментом. В практическом аспекте он служит теоретической основой для многих численных алгоритмов [7, стр. 87]. Несмотря на появление современных компьютерных технологий, метод сохраняет свою актуальность благодаря простоте и наглядности, а также позволяет глубже понять природу дифференциальных уравнений.

Метод используется для:

- Решения нелинейных уравнений;
- Интегральных уравнений;
- Дифференциальных уравнений;
- Оптимизационных задач.

Для обоснования сходимости метода последовательных приближений при решении дифференциальных уравнений важно, чтобы правая часть уравнения удовлетворяла условию Липшица. (Далее будет приведено в формуле 1).

Определение 2.1. *«Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y на множестве D, если существует постоянная $L > 0$ такая, что:*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le L|y_2 - y_1|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \tag{1}$$

» [3, стр. 6].

Это условие гарантирует, что отклонения в значениях y не приводят к чрезмерному отклонению значения f, обеспечивая устойчивость итерационного процесса.

Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной y, то константу Липшица можно оценить через частную производную:

$$L = \sup_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|.$$

Такой подход позволяет эффективно проверить выполнение условия Липшица при анализе конкретных задач. В качестве примера рассмотрим несколько функций:

Линейная функция: «$f(x,y) = 3x^2y + e^{-x}$ на прямоугольнике $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2], y \in \mathbb{R}\}$» [4, стр. 6].

Вычислим частную производную и константу Липшица:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad L = \sup_{(x,y)\in D} |3x^2| = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Таким образом, для любых y_1, y_2:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |3x^2(y_2 - y_1)| \leq 12|y_2 - y_1|.$$

Тригонометрическая функция: «$f(x,y) = \sin(2y) + xy$ на прямоугольнике $D = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [-\pi,\pi]\}$» [8, стр. 6].

Оценим константу Липшица:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2\cos(2y) + x| \leq 2|\cos(2y)| + |x| \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Следовательно, для произвольных значений $y_1, y_2 \in [-\pi,\pi]$ выполняется:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |\sin(2y_2) + xy_2 - \sin(2y_1) - xy_1| \leq 3|y_2 - y_1|.$$

Теорема Пикара о существовании и единственности [6, стр. 124].

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x и y в прямоугольнике $R = \{(x,y) \colon |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ и удовлетворяет условию Липшица по y. Данная информация представлена в определении 1.

Тогда существует интервал $|x - x_0| \leq h$, где

$$h \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|,$$

на котором задача Коши имеет единственное решение $y(x)$, и оно может быть получено как предел последовательности Пикара:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Данная теорема служит фундаментальным обоснованием метода последовательных приближений применительно к дифференциальным уравнениям.

3. Применение метода последовательных приближений к интегральным уравнениям. Метод последовательных приближений особенно эффективен для решения интегральных уравнений различных типов [8, стр. 201]. Рассмотрим его применение к основным классам интегральных уравнений.

Уравнения Фредгольма II рода.

Для уравнения вида:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

последовательные приближения строятся по схеме:

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y_n(t)dt.$$

Условия сходимости определяются нормой интегрального оператора:

$$\|\mathcal{K}\| = |\lambda| \cdot \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,t)|dt < 1.$$

Для уравнений Вольтерры:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

метод всегда сходится при непрерывном ядре, так как:

$$\|y_{n+1} - y_n\| \le \frac{(|\lambda| M(b-a))^n}{n!} \|y_1 - y_0\|,$$

где $M = \max |K(x,t)|$.

Для n-го приближения справедлива оценка погрешности:

$$\|y_n - y\| \le \frac{q^n}{1-q} \|y_1 - y_0\|, \quad \text{где} \quad q = \|\mathcal{K}\|.$$

Рассмотрим уравнение:

$$y(x) = 1 + \int_0^1 xty(t)dt.$$

Последовательность приближений:

$$\begin{aligned} &y_0(x) = 1; \\ &y_1(x) = 1 + x\int_0^1 tdt = 1 + \frac{x}{2}; \\ &y_2(x) = 1 + x\int_0^1 t(1+\frac{t}{2})dt = 1 + \frac{7x}{12}. \end{aligned}$$

При численной реализации важно учитывать:

- Выбор метода численного интегрирования;
- Оптимизацию вычисления повторных интегралов;
- Критерии остановки итерационного процесса.

4. Применение к нелинейным уравнениям и системам. Метод последовательных приближений эффективно применяется для решения нелинейных операторных уравнений и систем [6, стр. 154]. Рассмотрим основные случаи применения.

Нелинейные операторные уравнения.

Для уравнения общего вида $x = \mathcal{A}(x)$, где $\mathcal{A}$ – нелинейный оператор, итерационный процесс сохраняет стандартную форму: $x_{n+1} = \mathcal{A}(x_n)$. Условия сходимости требуют выполнения:

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\| \le q\|x - y\|, \quad q \in (0,1).$$

Системы нелинейных уравнений.

Для системы вида:

$$\begin{cases} x_1 = \mathcal{A}_1(x_1, ..., x_n), \\ \vdots \\ x_n = \mathcal{A}_n(x_1, ..., x_n), \end{cases}$$

метод реализуется через покомпонентные итерации:

$$x_i^{(k+1)} = \mathcal{A}_i(x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \quad i = 1, ..., n.$$

Достаточным условием сходимости является:

$$\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j} \right\| < 1, \quad i = 1, ..., n.$$

Модификации метода.

Для ускорения сходимости применяют:

- Релаксационный метод: $x_{n+1} = (1-\omega)x_n + \omega\mathcal{A}(x_n), \quad \omega \in (0,1)$;
- Метод Ньютона-Канторовича: $x_{n+1} = x_n - [I - \mathcal{A}'(x_n)]^{-1}(x_n - \mathcal{A}(x_n))$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos y, \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\sin x. \end{cases}$$

Итерационный процесс:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos y_n,\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\sin x_n.$$

При начальном приближении $(0.5, 0.5)$ последовательность сходится к решению.

Области применения:

- Решение нелинейных алгебраических систем;
- Нелинейные интегральные уравнения;
- Краевые задачи для нелинейных ОДУ и УЧП;
- Оптимизационные задачи.

5. Решение задач.

Задача 1. *«Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши:*

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

»[5, стр. 86].

Решение: метод Пикара основывается на представлении решения в виде интегрального уравнения, показанного в формуле (3). В нашем случае $f(x, y) = x + y$, и начальное условие $y(0) = 1$. Таким образом, интегральное уравнение для функции $y(x)$ примет вид:

$$y(x) = 1 + \int_0^x (t + y(t))\, dt.$$

Пояснение замены переменных:

- В левом интеграле t — переменная интегрирования, заменяющая x во избежание конфликта обозначений;
- В правом интеграле:
  - Верхний предел x — текущее значение аргумента;
  - t — «прошлые» значения аргумента на отрезке $[0, x]$;
  - $y(t)$ — значение функции в точке t.

Важные замечания:

1. Переменная t в интеграле — формальный параметр, который «исчезает» после интегрирования.
2. На каждом шаге под интегралом используется предыдущее приближение $y_n(t)$.
3. Все вычисления ведутся аналитически, что гарантирует точность.

Первое приближение. Для того чтобы посчитать первое приближение, воспользуемся значением нулевого приближения $y_0(x) = y(0) = 1$.

Тогда: $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t + 1)\, dt = 1 + \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + x$.

Второе приближение. Подставим $y_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + t$ в интегральное уравнение:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t + 1 + \frac{t^2}{2} + t\right) dt = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right) dt.$$

Вычисляем:

$$\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right) dt = \left[\frac{t^3}{6} + t^2 + t\right]_0^x = \frac{x^3}{6} + x^2 + x.$$

Итак, $y_2(x) = 1 + \dfrac{x^3}{6} + x^2 + x$.

Третье приближение. Подставим $y_2(t) = 1 + \dfrac{t^3}{6} + t^2 + t$:

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(t + 1 + \frac{t^3}{6} + t^2 + t\right) dt = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right) dt.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right) dt = \left[\frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{3} + t^2 + t\right]_0^x = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

Таким образом: $y_3(x) = 1 + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x$.
Четвёртое приближение:

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x (t + y_3(t))\, dt = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 1\right) dt =$$

$$= 1 + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

Обобщённый вид $y_n(x)$:
Обратим внимание на структуру приближений:

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Это частичная сумма ряда Тейлора:

$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - x - 1.$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, находим решение исходной задачи Коши:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - x - 1 = 2e^x - x - 1.$$

График приближений:

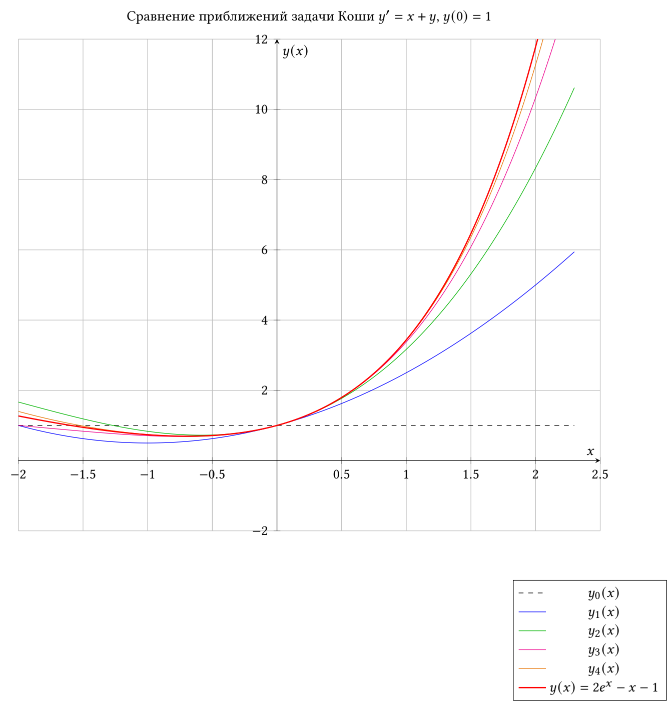

Рис. 1. Приближённые и точное решения задачи $y' = x + y$, $y(0) = 1$

Ответ: $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Задача 2. *«Построить последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению задачи Коши:*

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (1+x)y + y^2, \quad y(0) = 1,$$

» [5, стр. 87].

Решение: последовательные приближения к решению данной задачи определим по рекуррентной формуле, представленной в уравнении (3). Для того чтобы посчитать первое приближение, воспользуемся значением нулевого приближения $y_0(x) = y(0) = 1$. Подставляем $y_0(x)$ в интегральное уравнение:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left[1 - (1+t)\cdot 1 + 1^2\right] dt = 1 + \int_0^x (1-t)dt = 1 + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = 1 + x - \frac{x^2}{2}.$$

Теперь найдём второе приближение. Подставляем $y_1(x)$ в интегральное уравнение:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[1 - (1+t)\left(1 + t - \frac{t^2}{2}\right) + \left(1 + t - \frac{t^2}{2}\right)^2\right] dt.$$

Распишем выражение внутри интеграла:

$$(1+t)\left(1 + t - \frac{t^2}{2}\right) = 1 + 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}, \quad \left(1 + t - \frac{t^2}{2}\right)^2 = 1 + 2t - t^3 + \frac{t^4}{4}.$$

Подставляя в интеграл:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[1 - 1 - 2t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + 1 + 2t - t^3 + \frac{t^4}{4}\right] dt = 1 + \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{4}\right] dt.$$

Интегрируя, получаем $y_2(x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^5}{20}$.

График приближений:

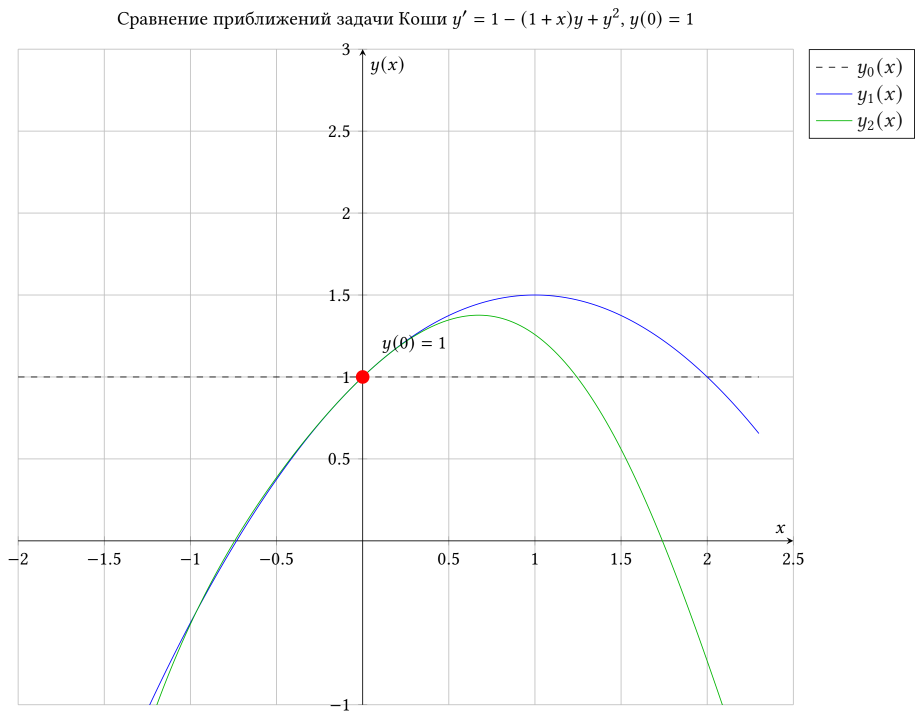

Рис. 2. Приближённые решения задачи $y' = 1 - (1+x)y + y^2$, $y(0) = 1$

Таким образом, получены последовательные приближения решения уравнения методом Пикара.

Ответ:

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}.$$

Задача 3. *«Методом последовательных приближений найти третье приближение к решению задачи Коши:*

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \quad y(0) = 0,$$

рассматривая уравнение в квадранте[3] *при* $|x| \le 1$, $|y| \le 1$» [3, *стр. 18*].

Решение: преобразуем дифференциальное уравнение в интегральную форму, показанную в формуле (3). Исходное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2.$$

Проинтегрируем обе части от начальной точки $x = 0$ до текущего значения x:

$$\int_0^x \frac{dy}{dt} dt = \int_0^x (t - y^2(t))dt.$$

После интегрирования получаем:

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (t - y^2(t))dt.$$

С учетом начального условия $y(0) = 0$ приходим к интегральному уравнению:

$$y(x) = \int_0^x (t - y^2(t))dt.$$

Для решения строим последовательные приближения:

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (t - y_n^2(t))dt, \quad y_0(x) = 0.$$

Вычисление приближений:
Первое приближение:

$$y_1(x) = \int_0^x (t - 0^2)dt = \frac{x^2}{2}.$$

Второе приближение. Подставим в интегральное уравнение первое приближение $y_1(t) = \dfrac{t^2}{2}$:

$$y_2(x) = \int_0^x f(t, y_1(t))\, dt = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt.$$

Упростим выражение под интегралом:

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 = \frac{t^4}{4}.$$

Тогда:

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4}\right) dt.$$

Вычислим интеграл:

$$y_2(x) = \int_0^x t\, dt - \int_0^x \frac{t^4}{4}\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \frac{1}{4}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}.$$

Третье приближение. Используем второе приближение $y_2(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^5}{20}$ и подставим его в интегральное уравнение:

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20}\right)^2\right) dt.$$

Раскроем квадрат разности:

$$\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20}\right)^2 = \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \frac{t^5}{20} + \left(\frac{t^5}{20}\right)^2.$$

[3]Квадранты представляют собой области на декартовой системе координат, ограниченные осями Xи Y, нумеруются против часовой стрелки: I ($x > 0$, $y > 0$), II ($x < 0$, $y > 0$), III ($x < 0$, $y < 0$), IV ($x > 0$, $y < 0$).

Посчитаем каждый член:

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 = \frac{t^4}{4}; \quad 2\cdot\frac{t^2}{2}\cdot\frac{t^5}{20} = \frac{t^7}{20}; \quad \left(\frac{t^5}{20}\right)^2 = \frac{t^{10}}{400};$$

Тогда:

$$\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20}\right)^2 = \frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{20} + \frac{t^{10}}{400}.$$

Подставим обратно в интеграл:

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{20} + \frac{t^{10}}{400}\right)\right) dt = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{20} - \frac{t^{10}}{400}\right) dt.$$

Вычислим интеграл по частям:

$$y_3(x) = \int_0^x t\,dt - \int_0^x \frac{t^4}{4}\,dt + \int_0^x \frac{t^7}{20}\,dt - \int_0^x \frac{t^{10}}{400}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \frac{1}{4}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^x + \frac{1}{20}\left[\frac{t^8}{8}\right]_0^x - \frac{1}{400}\left[\frac{t^{11}}{11}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

График приближений:

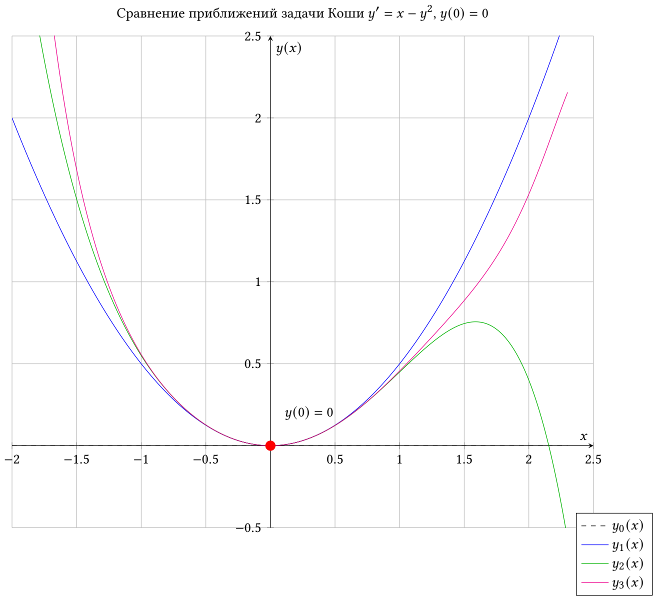

Рис. 3. Приближённые решения задачи $y' = x - y^2$

Анализ сходимости в $|x| \le 1, |y| \le 1$:

Функция $f(x,y) = x - y^2$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2$ (подробный вывод см. в Приложении 1). На отрезке $[0,h]$ при $h < \frac{1}{2}$ метод сходится, а в полной области $[0,1]$ требуется анализ дополнительных приближений.

Ответ: получено третье приближение

$$y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

В области $x \in [0, 0.6]$ приближения хорошо согласуются. При $x > 0.6$ требуется больше итераций для точности. Все приближения остаются в заданной области $|y| \le 1$.

Задача 4. *«Найти три первых последовательных приближения $y' = x^2 - y^2$, $y(-1) = 0$, » [3, стр. 18].*

Решение: преобразуем дифференциальное уравнение в интегральную форму, показанную в формуле (3). Вычисление приближений:

Первый шаг метода последовательных приближений начинается с подстановки нулевого приближения $y_0(x) = y(-1) = 0$ в интегральное уравнение:

$$y_1(x) = \int_{-1}^x \left(t^2 - \underbrace{y_0^2(t)}_{=0}\right) dt = \int_{-1}^x t^2 dt.$$

Вычисляем простой интеграл от степенной функции:

$$\int t^2 dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{t^3}{3} + C, \quad \int_{-1}^{x} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}.$$

Упрощаем полученное выражение:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{x^3+1}{3}.$$

Таким образом, первое приближение: $y_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$.
Второе приближение:

$$y_2(x) = \int_{-1}^{x} \left(t^2 - \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}\right)^2\right) dt = \int_{-1}^{x} \left(t^2 - \frac{t^6}{9} - \frac{2t^3}{9} - \frac{1}{9}\right) dt =$$
$$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{63} - \frac{t^4}{18} - \frac{t}{9}\right)\bigg|_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} - \frac{x^4}{18} - \frac{x}{9} + \frac{29}{126}.$$

Ответ: $y_0(x) = 0,\ y_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3},\ y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^7}{63} - \dfrac{x^4}{18} - \dfrac{x}{9} + \dfrac{29}{126}$.
График приближений:

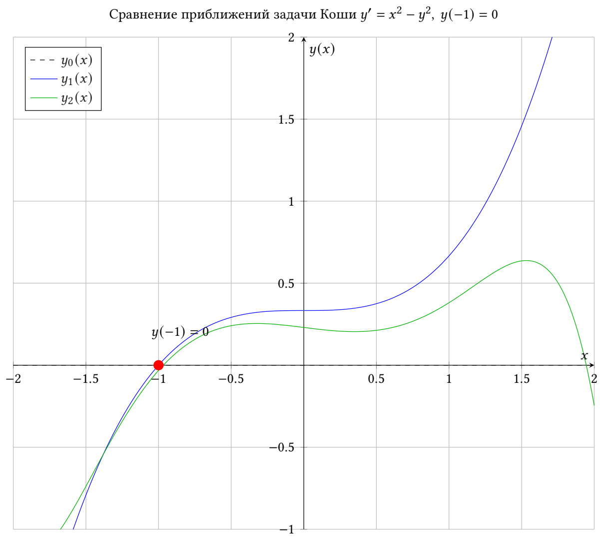

Рис. 4. Приближённые решения задачи $y' = x^2 - y^2,\ y(-1) = 0$
Fig. 4. Approximate solutions of the problem $y' = x^2 - y^2,\ y(-1) = 0$

Задача 5. *«Найти три первых последовательных приближения $y' = x + y^2,\ y(0) = 0$, » [3, стр. 18].*

Проверка условия Липшица: перед построением последовательных приближений проверим выполнение условия Липшица, представленное в определении 1. Правая часть $f(x, y) = x + y^2$ непрерывна и частная производная по y равна $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. На любом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, например при $|y| \leq M$, можно выбрать константу Липшица $L = 2M$. Следовательно, условие Липшица выполняется, и метод последовательных приближений применим.

Решение: преобразуем уравнение к интегральной форме, указанной в формуле (3).
Последовательные приближения:

Нулевое приближение: нулевое приближение задаётся начальными условиями:

$$y_0(x) = 0.$$

Подставим $y_0(x)$ в интегральное уравнение:

$$y_0(x) = \int_0^x \left(t + y_0^2(t)\right) dt = \int_0^x t\, dt.$$

Вычислим интеграл:

$$y_0(x) = \frac{t^2}{2}\bigg|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Проверим начальное условие:

$$y_0(0) = \frac{0^2}{2} = 0.$$

Первое приближение: подставляем $y_0(x)$ в интегральное уравнение:

$$y_1(x) = \int_0^x (t + y_0^2(t))dt = \int_0^x tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Второе приближение: используем $y_1(x)$ для следующего приближения:

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{4}\right) dt = \left.\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20}\right)\right|_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}.$$

Проверка начального условия. Убедимся, что все приближения удовлетворяют $y(0) = 0$:
$y_0(0) = 0,\ y_1(0) = \frac{0^2}{2} = 0,\ y_2(0) = \frac{0^2}{2} + \frac{0^5}{20} = 0.$

Ответ: $y_0(x) = 0,\ y_1(x) = \frac{x^2}{2},\ y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}.$
График приближений:

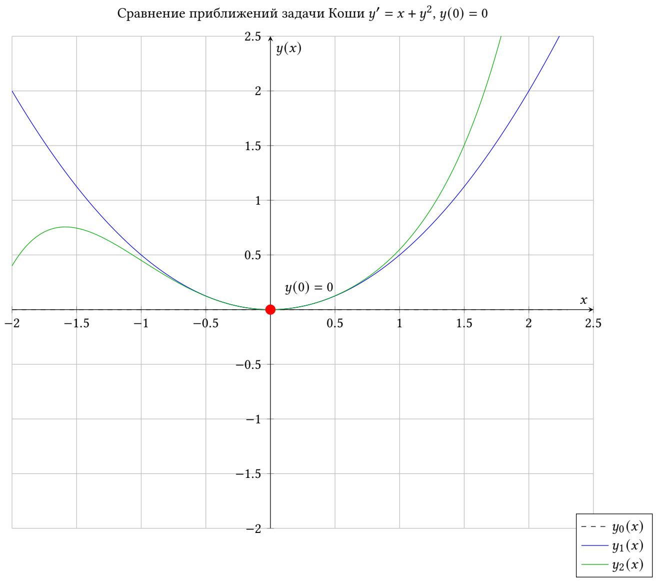

Рис. 5. Приближённые решения задачи $y' = x + y^2$
Fig. 5. Approximate solutions of the problem $y' = x + y^2$

6. Заключение. Исследование показало, что метод последовательных приближений, основанный на подходе Пикара, является эффективным инструментом для решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Последовательное уточнение приближённых решений позволяет не только получить качественное представление о поведении системы, но и при определённых условиях гарантирует сходимость к точному решению. В процессе изучения стало ясно, что данный метод даёт возможность формализовать и численно реализовать решение многих физических задач, что существенно расширяет возможности математического моделирования. Применение метода Пикара подтвердило его ценность как в теоретическом, так и в прикладном аспекте, особенно при анализе динамики физических процессов. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения дифференциальных уравнений и их роли в описании естественнонаучных явлений.

Благодарность. *Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Черновой О. В. за ценные советы и поддержку.*

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. 1974. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 504.
2. Зорич В. А. 1997. Математический анализ. Ч. 1. М., МЦНМО, 554.
3. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. 2001. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., Наука, 368.

4. Понтрягин Л. С. 1965. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 314.
5. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. 1990. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. К., Наукова думка, 272.
6. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. 2005. Дифференциальные уравнения. М., Физматлит, 256.
7. Филиппов А. Ф. 2018. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Интеграл-Пресс, 176.
8. Эльсгольц Л. Э. 2012. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Либроком, 320.

Поступила в редакцию 28.05.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кочуров Владимир Олегович – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию