Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 52–60.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Солодилова Е. В.
kaaatya.ss.10@mail.ru

Аннотация. Исследование посвящено изучению линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Работа с уравнениями первого порядка позволяет не только освоить базовые математические навыки, но и заложить основу для дальнейшего изучения более сложных математических моделей. В статье рассмотрены основные методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения первого порядка, решение задач

Для цитирования: Солодилова Е. В. 2025. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 52–60.

---

1. Введение. В статье рассматривается решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Изучение теории дифференциальных уравнений встречаются уже в школьном курсе физики, например, при изучении равноускоренного движения в девятом классе. Выбор темы обусловлен личным интересом к углубленному изучению методов решения дифференциальных уравнений и стремлением лучше понять их прикладное значение. Цель работы — изучение линейных дифференциальных уравнений и применение их для решения примеров.

В современном математическом анализе и его приложениях линейные дифференциальные уравнения первого порядка занимают одно из центральных мест. Эти уравнения, обладая относительно простой структурой, служат основой для изучения более сложных функциональных зависимостей и являют собой важнейший инструмент в различных областях науки и техники, от физики и инженерии до экономики и биологии. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют обширный спектр решений, который можно эффективно анализировать и интерпретировать.

2. Линейные дифференциальные уравнения. Основные понятия.

Определение 2.1. *«Уравнение вида*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

связывающее аргумент x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные до некоторого порядка $n \geq 1$, называется обыкновенным дифференциальным уравнением» [5, стр. 97].

Определение 2.2. *«Решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка на промежутке I, называется функция $y = \phi(x)$, определенная на этом промежутке, имеющая производные до порядка n и удовлетворяющая этому уравнению, то есть такая, что при подстановке ее в исходное уравнение, оно обращается в верное числовое тождество на этом промежутке» [1, стр. 133].*

Определение 2.3. *«Обыкновенное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, то есть*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)),$$

называют уравнением в нормальной форме или в форме Коши» [6, стр. 144].

Определение 2.4. *«Уравнение вида*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка в общем виде.»

Определение 2.5.*Решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, зависящее от n параметров, или произвольных постоянных, то есть*

$$y = \phi(x, C_1, ..., C_n),$$

называют общим решением.

Определение 2.6.*«Всякое решение $y = \phi(x, C_0)$, получающееся из общего решения уравнения $y = \phi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением» [3, стр. 33].*

Определение 2.7.*«График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой» [4, стр. 89].*

Определение 2.8.*«Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x),$$

где $a_n, a_{(n-1)}, \ldots, a_0$ - постоянные, причем $a_n \neq 0$» [1].

Если $n = 1$, то такое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Линейное дифференциально уравнение однородно в том случае, когда $r(x) \equiv 0$, иначе уравнение называется неоднородным.

3. Метод Бернулли. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x), \tag{1}$$

где $a_0(x)$ и $r(x)$ – заданные непрерывные функции на некотором интервале.

Для решения данного уравнения методом Бернулли предположим, что решение можно представить в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда производная функции $y(x)$ будет иметь вид:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Подставляем $y(x)$ и $y'(x)$ в исходное уравнение:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + a_0(x)u(x)v(x) = r(x).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'(x)v(x) + u(x)\left(v'(x) + a_0(x)v(x)\right) = r(x).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$v'(x) + a_0(x)v(x) = 0.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его общее решение находится разделением переменных:

$$v(x) = e^{-\int a_0(x)\,dx}.$$

После нахождения $v(x)$ подставляем её в оставшуюся часть уравнения:

$$u'(x)v(x) = r(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{r(x)}{v(x)}.$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$u(x) = \int \frac{r(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

4. Метод вариации произвольной постоянной. Рассмотрим то же линейное дифференциальное уравнение:

$$y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x).$$

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Разделяя переменные, получаем его общее решение:

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx},$$

где C – произвольная постоянная.

Для отыскания решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольной постоянной. Предположим, что константа C зависит от x, то есть $C = C(x)$. Тогда искомое решение имеет вид:

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx}.$$

Найдём производную этой функции:

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx} - C(x) \cdot a_0(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx}.$$

Подставим $y(x)$ и $y'(x)$ в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx} - C(x) \cdot a_0(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx} + a_0(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx} = r(x).$$

Упрощаем выражение:

$$C'(x) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx} = r(x).$$

Отсюда находим:

$$C'(x) = r(x) \cdot e^{\int a_0(x)\,dx}.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем:

$$C(x) = \int r(x) \cdot e^{\int a_0(x)\,dx} dx + C_0.$$

Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в формулу общего решения, приходим к окончательному результату:

$$y(x) = \left(\int r(x) \cdot e^{\int a_0(x)\,dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{-\int a_0(x)\,dx}.$$

Использование чёткого алгоритма помогает нам тщательно разбирать условия задачи и учитывать все значимые детали, которые часто определяют верное решение. Грамотная запись уравнений служит надёжной основой для получения правильного результата, а умение видеть взаимосвязи между разными аспектами задачи позволяет не только справляться с конкретными примерами, но и уверенно применять знания в других областях.

Далее в статье будут представлены решения пяти задач.

5. Решение задач.

Задача 1. *« Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:*

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$$

» [2, №2, стр. 12].

Решение. Запишем линейное дифференциальное уравнение первого порядка в стандартной форме (1):

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$$

Применим метод Бернулли. Будем искать решение в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ есть неизвестные функции. Тогда:

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляем в уравнение:

$$u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2} uv = 1.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'v + u\left(v' + \frac{1-2x}{x^2} v \right) = 1.$$

Выберем $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$v' + \frac{1-2x}{x^2} v = 0.$$

Это однородное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1-2x}{x^2} v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1-2x}{x^2} dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{1}{x} + 2\ln|x|.$$

Поэтому:

$$v = e^{\frac{1}{x} + 2\ln|x|} = x^2 e^{1/x}.$$

Теперь подставляем найденную функцию $v(x)$ в оставшуюся часть уравнения:

$$u'v = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{x^2 e^{1/x}} = x^{-2} e^{-1/x}.$$

Интегрируем:

$$u(x) = \int x^{-2} e^{-1/x} dx.$$

Сделаем замену: $t = -\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{x^2} dx$. Тогда:

$$u(x) = \int e^t dt = e^t + C = e^{-1/x} + C.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(e^{-1/x} + C\right) \cdot x^2 e^{1/x} = x^2 + Cx^2 e^{1/x}.$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = x^2 + Cx^2 e^{1/x}.$$

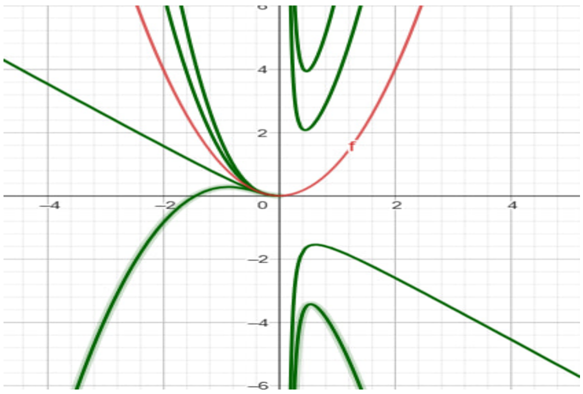

Рис. 1. Интегральные кривые для уравнения из задачи 1

Задача 2. (№5 [2, стр. 12]) *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:*

$$y' - y\,\mathrm{ctg}(x) = 2x \sin(x).$$

Решение. Уравнение уже записано в стандартной форме (1):

$$y' - \mathrm{ctg}(x)\, y = 2x \sin(x).$$

Применим метод Бернулли: предположим, что $y = u(x) \cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляем:

$$u'v + uv' - \mathrm{ctg}(x)uv = 2x \sin(x).$$

Сгруппируем:

$$u'v + u\,(v' - \mathrm{ctg}(x)v) = 2x \sin(x).$$

Выберем $v(x)$ так, чтобы выполнялось:

$$v' - \mathrm{ctg}(x)v = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dv}{dx} = \mathrm{ctg}(x)\, v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \mathrm{ctg}(x)\, dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \mathrm{ctg}(x)\, dx = \ln|\sin(x)| \quad \Rightarrow \quad v = \sin(x).$$

Теперь подставляем $v(x)$ в уравнение:

$$u' \cdot \sin(x) = 2x \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u' = 2x.$$

Интегрируем:

$$u(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = u(x) \cdot v(x) = (x^2 + C) \cdot \sin(x).$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = (x^2 + C)\sin(x).$$

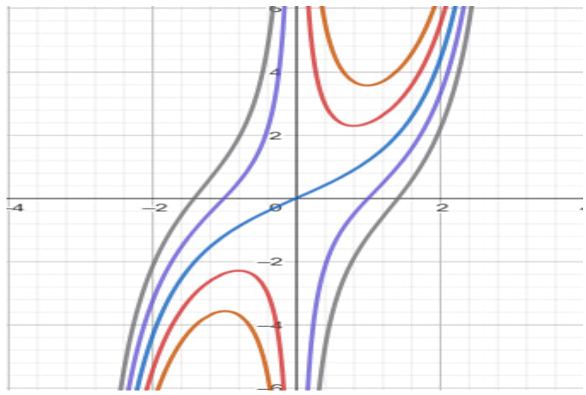

Рис. 2. Интегральные кривые для уравнения из задачи 2

Задача 3. (№8 [2, стр. 12]) *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:*

$$y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x.$$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$y' - \frac{1}{x\ln x} y = \frac{3x^3 \ln^2 x}{x \ln x} = 3x^2 \ln x.$$

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{1}{x\ln x} y = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\ln x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln x}.$$

Для правой части делаем замену $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$, тогда:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|\ln x| + C.$$

Поэтому:

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + C \quad \Rightarrow \quad y = C \ln x.$$

Теперь применим метод вариации произвольной постоянной: пусть $C = C(x)$. Тогда:

$$y = C(x)\ln x, \quad y' = C'(x)\ln x + C(x)\cdot\frac{1}{x}.$$

Подставляем y и y' в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(x)\ln x + C(x)\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln x}\cdot C(x)\ln x = 3x^2\ln x.$$

Упрощаем:

$$C'(x)\ln x + C(x)\cdot\frac{1}{x} - \frac{C(x)}{x} = 3x^2 \ln x$$
$$\Rightarrow \quad C'(x)\ln x = 3x^2\ln x.$$

Сокращаем на $\ln x$ (предполагая $\ln x \neq 0$):

$$C'(x) = 3x^2.$$

Интегрируем:

$$C(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C_0.$$

Подставляем y и y' в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(x)\ln x + C(x)\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln x}\cdot C(x)\ln x = 3x^2\ln x.$$

Упрощаем: Таким образом, общее решение:

$$y = (x^3 + C_0)\ln x.$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = (x^3 + C)\ln x.$$

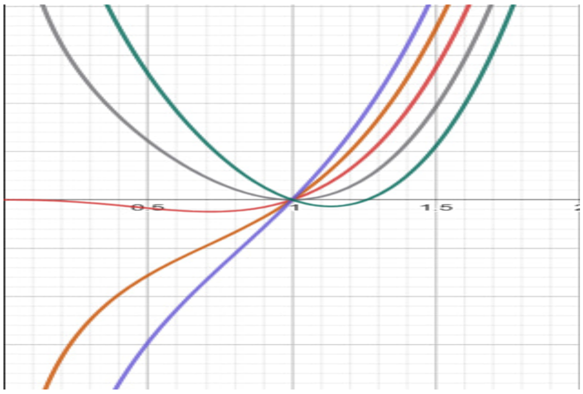

Рис. 3. Интегральные кривые для уравнения из задачи 3

Задача 4. (№6 [2, стр. 12]) *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:*

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y' - 2xy = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = x^2 + C_0 \quad\Rightarrow\quad y = Ce^{x^2}.$$

Теперь применим метод вариации произвольной постоянной, считая, что $C = C(x)$. Тогда:

$$y = C(x)e^{x^2}, \quad y' = C'(x)e^{x^2} + C(x)\cdot 2xe^{x^2}.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)\cdot 2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2}.$$

Упрощаем:

$$C'(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2} \quad\Rightarrow\quad C'(x) = 2x.$$

Интегрируем:

$$C(x) = \int 2xdx = x^2 + C_0.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = (x^2 + C_0)e^{x^2}.$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = (x^2 + C)e^{x^2}.$$

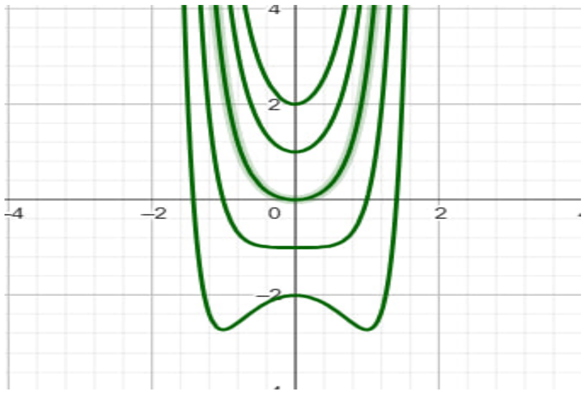

Рис. 4. Интегральные кривые для уравнения из задачи 4

Задача 5. (№9 [2, стр. 12]) *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:*

$$y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}.$$

Решение. Применим метод Бернулли, предположив, что решение можно представить в виде произведения двух функций: $y = u(x)v(x)$. Тогда:

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'v + uv' + xe^x uv = e^{(1-x)e^x}.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$u'v + u(v' + xe^x v) = e^{(1-x)e^x}.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$v' + xe^x v = 0.$$

Это однородное уравнение. Разделяем переменные:

$$\frac{dv}{dx} = -xe^x v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -xe^x dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|v| = -\int xe^x dx.$$

Вычислим интеграл по частям:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Поэтому:

$$\ln|v| = -(xe^x - e^x) = -e^x(x-1), \quad \Rightarrow \quad v = e^{-e^x(x-1)}.$$

Теперь подставляем найденную v в уравнение:

$$u'v = e^{(1-x)e^x} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{e^{(1-x)e^x}}{v(x)} = e^{(1-x)e^x} \cdot e^{e^x(x-1)}.$$

Показатель степени:

$$(1-x)e^x + (x-1)e^x = [(1-x) + (x-1)]e^x = 0.$$

Поэтому:

$$u' = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x + C.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = u(x)v(x) = (x + C)e^{-e^x(x-1)}.$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = (x + C)e^{-e^x(x-1)}.$$

Решим это же уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y' + xe^x y = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^x y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -xe^x dx.$$

Как и выше, вычислим интеграл:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int xe^x dx = -(xe^x - e^x) = -e^x(x-1).$$

Поэтому:

$$\ln|y| = -e^x(x-1) + C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-e^x(x-1)}.$$

Теперь применим метод вариации произвольной постоянной, считая $C = C(x)$. Тогда:

$$y = C(x)e^{-e^x(x-1)}, \quad y' = C'(x)e^{-e^x(x-1)} + C(x) \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-e^x(x-1)}\right).$$

Найдём производную экспоненты:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-e^x(x-1)}\right) = -e^{-e^x(x-1)} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^x(x-1)\right) = -e^{-e^x(x-1)} \cdot \left(e^x(x-1) + e^x\right) = -e^{-e^x(x-1)} \cdot e^x x.$$

Поэтому:

$$y' = C'(x)e^{-e^x(x-1)} - C(x)e^{-e^x(x-1)} \cdot xe^x.$$

Подставляем y и y' в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(x)e^{-e^x(x-1)} - C(x)e^{-e^x(x-1)} \cdot xe^x + xe^x C(x)e^{-e^x(x-1)} = e^{(1-x)e^x}.$$

Упрощаем:

$$C'(x)e^{-e^x(x-1)} = e^{(1-x)e^x}.$$

Делим обе части на $e^{-e^x(x-1)}$:

$$C'(x) = e^{(1-x)e^x} \cdot e^{e^x(x-1)} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + C_0.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = (x + C_0)e^{-e^x(x-1)}.$$

Окончательный ответ:

$$y(x) = (x + C)e^{-e^x(x-1)}.$$

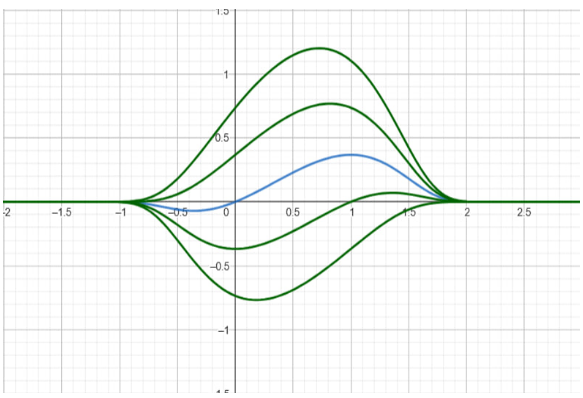

Рис. 5. Интегральные кривые для уравнения из задачи 5

6. Заключение. Проведя исследование, стало ясно, что линейные дифференциальные уравнения первого порядка представляют собой важный и хорошо изученный класс уравнений, допускающий строгое аналитическое решение. Практическая значимость таких уравнений заключается в их широкой применимости при моделировании реальных процессов в физике, технике, экономике и других науках. Методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, такие как метод Бернулли и метод вариации произвольной постоянной, являются эффективными и универсальными. Они позволяют находить общее решение в явном виде и применимы к широкому классу задач. Оба подхода демонстрируют устойчивость и практическую ценность при аналитическом исследовании дифференциальных уравнений.

Благодарность. *Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Черновой О. В. за ценные советы и поддержку.*

Список литературы

1. Агафонов С. А. Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т.В. Муратова. – М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с.
2. Асташова И. В. Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения». Учебное пособие / Асташова И.В., Никишин В.А. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. – 94 с.
3. Бумагина А. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие / А.Н. Бумагина, В.А. Таланова, А.А. Митрофанова; Иван. гос. хим.- технол. ун-т. – Иваново: ИГХТУ, 2018. – 96 с.
4. Гончаренко В. М. Математические методы в экономике и финансах : учебник / коллектив авторов; под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. – М.: КНОРУС, 2016. – 602 с.
5. Липовцев Ю. В. Основы высшей математики для инженеров. / Ю.В. Липовцев, О.Н. Третьякова. – Москва: Вузовская книга 2009. – 305 с.
6. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Поступила в редакцию 26.05.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Солодилова Екатерина Владимировна –бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

E-mail: Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию