Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 41–51.

Решение физических задач с помощью дифференциальных уравнений

Журавель С. С.
1720846@bsuedu.ru

Аннотация. Исследование посвящено применению обыкновенных дифференциальных уравнений для решения физических задач. Цель работы — продемонстрировать, как обыкновенные дифференциальные уравнения позволяют формализовать законы природы и находить количественные зависимости в динамике физических систем. На примерах показан алгоритм решения задач, подтверждающий эффективность математических методов для анализа физических процессов. Результаты могут быть полезны для углублённого изучения математического моделирования и теоретической механики.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, физика, физические задачи

Для цитирования: Журавель С. С. 2025. Решение физических задач с помощью дифференциальных уравнений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 41–51.

---

1. Введение. В статье рассматривается применение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для решения физических задач. Элементы теории дифференциальных уравнений встречаются уже в школьном курсе физики, например, при изучении равноускоренного движения в девятом классе [5, стр. 2]. Повышенный интерес к данной тематике обусловлен важностью математических методов для моделирования физических процессов, а ОДУ представляют собой эффективный инструмент для их анализа. Цель работы – исследование и демонстрация методов решения практических физических задач с помощью ОДУ.

2. Математическая постановка физических задач через дифференциальные уравнения. Следует отметить, что часто при изучении различных физических явлений не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие то или иное явление. Но, в то же время, можно установить зависимость между их производными или дифференциалами. При этом будут получены уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком производной или дифференциала [10, стр. 262].

Например, в механике закон сохранения импульса часто используется для описания столкновений тел. Вместо того чтобы напрямую искать зависимость между силами и скоростями, можно рассматривать изменение импульса во времени, что приводит к дифференциальному уравнению.

Согласно источнику [6, стр. 7], при решении любой задачи физики сначала выполняется предметная постановка задачи.

Определение 2.1. *Под предметной постановкой задачи подразумевается выбор области мироздания, в которой лежит данная задача и выбор законов, которые будут учитываться при решении задачи, а которые – пренебрегаться [6, стр. 7].*

Далее в соответствие каждому закону ставится дифференциальное уравнение. Это математическая постановка задачи.

Например, задача о броске тела под углом к горизонту. Она относится к области физики, в частности, к механике и, более узко, к кинематике. В школьной программе физики в этой задаче обычно рассматривается только закон всемирного тяготения. Таким образом, тематическая постановка задачи завершена. Ей соответствует математическая модель, которая может быть представлена в виде уравнения, описывающего второй закон Ньютона, или как дифференциальное уравнение, основанное на этом законе. После этого математическая часть также считается завершенной, и можно приступить к решению задачи.

По мере развития науки и техники данная предметная постановка задачи становится неудовлетворительной, ибо необходимо учитывать действующие на тело эффекты других сил. Например, силу трения воздуха. В школе её эффект не удается учесть, т. к. методы школьной математики не позволяют решать такую математическую задачу. В рамках теоретической механики решение задачи о броске тела уже может учитывать трение воздуха.

По мере дальнейшего развития техники при решении данной задачи приходится учитывать всё более и более тонкие эффекты (плотность воздуха, сила Кориолиса[1] и так далее). Математическая постановка задачи тоже усложняется. По мере усложнения задачи становится все более сложным получение аналитического решения, возникает необходимость в использовании численных методов для решения дифференциальных уравнений, такие как метод Эйлера или метод Рунге-Кутты, которые позволяют получить приближённые решения для сложных систем, но в данной курсовой работе далее они упомянуты не будут.

[1] Сила Кориолиса – одна из сил инерции, прибавлением которой к действующим на материальную точку физическим силам учитывается влияние вращения подвижной системы отсчёта на относительное движение точки [8, стр. 461].

3. Основные определения для дифференциальных уравнений.

Определение 3.1. *Дифференциальное уравнение — уравнение, связывающее искомые функции, их производные и аргументы [3, стр. 76].*

Определение 3.2. *Обыкновенное дифференциальное уравнение — дифференциальное уравнение, в котором искомыми являются функции от одного переменного; в случае одной искомой функции $y = y(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n имеет общий вид*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где f – заданная функция от $(n + 2)$ переменных, y' – первая производная функции, $y^{(n)}$ – производная n-го порядка [3, стр. 179].

«Дифференциальные уравнения являются одним из основных средств для математического решения практических задач» [11, стр. 1].

В физических задачах, согласно источнику [12, стр. 12], важно правильно выбрать независимую переменную и искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y, когда независимое переменное x получит приращение Δx, т. е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию.

В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Начальные условия необходимы для того, чтобы из множества возможных решений дифференциального уравнения выбрать то, которое соответствует реальному физическому процессу. Например, для задачи о движении тела начальные условия могут задавать начальную скорость и начальное положение.

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физические законы, сформулированные в тексте перед задачей.

Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, а именно – используя значения первой и второй производных от пути. Согласно источнику [2, стр. 20], «при прямолинейном движении мгновенные скорость и ускорение определяются как первая и вторая производные соответственно от перемещения (пути), т.е. скорость $v(t) = s'(t)$ и ускорение $a(t) = s''(t) = v'(t)$, где $s(t)$ — перемещение точки за время t. Вспомним, что первая производная от перемещения $s(t)$ даёт скорость $v(t)$, которая указывает, как быстро изменяется положение тела во времени, а вторая производная, ускорение $a(t)$, характеризует, насколько быстро изменяется скорость, что позволяет описывать силы, действующие на тело».

Важно отметить, что если тело движется прямолинейно и не меняет направления, то перемещение совпадает с пройденным путем.

Рассмотрим ситуацию, когда это движение вызвано силой F, направленной вдоль направления движения. В соответствии со вторым законом Ньютона получаем уравнение $F = ma = ms''$. В большинстве задач сила обычно зависит от расстояния s или скорости v, что приводит нас к дифференциальному уравнению:

$$ms'' = F(s) \quad mv' = F(v).$$

4. Алгоритм решения физической задачи при помощи дифференциальных уравнений. Собирая всё воедино, можно сказать, что при составлении дифференциальных уравнений в физических задачах важно правильно выбрать независимую переменную и искомую функцию, описывающую происходящий процесс [4, стр. 8].

Опираясь на всё вышесказанное, можно выделить, что процесс решения физических задач с применением дифференциальных уравнений делится на несколько ключевых этапов:

- составление дифференциального уравнения;
- решение этого уравнения;
- исследование полученного решения.

Согласно источнику [1, стр. 38-39], рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Установить величины, изменяющиеся в явлении, и выявить физические законы, связывающие их.
2. Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.
3. Исходя из условий задачи, определить начальные условия.
4. Выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и её производные.
5. Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение.
6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

7. По начальным условиям найти частное решение, если задача того требует.
8. Исследовать полученное решение, если задача того требует .

Таким образом, после выполнения указанных шагов мы сможем успешно решать физические задачи, что играет ключевую роль в процессе обучения. Этот подход не только позволяет находить точные и обоснованные ответы, но и способствует более глубокому пониманию фундаментальных законов физики, что крайне важно для формирования целостного представления о предмете.

Использование чёткого алгоритма помогает нам тщательно разбирать условия задачи и учитывать все значимые детали, которые часто определяют верное решение. Грамотная запись уравнений служит надёжной основой для получения правильного результата, а умение видеть взаимосвязи между разными аспектами задачи позволяет не только справляться с конкретными примерами, но и уверенно применять знания в других разделах физики.

Далее в статье будут представлены решения пяти физических задач.

5. Решение задач.

Задача 1. *«На материальную точку массы m действует постоянная сила, сообщающая точке ускорение a. Окружающая среда оказывает движущейся точке сопротивление, пропорциональное скорости ее движения, коэффициент пропорциональности равен γ. Как изменяется скорость движения со временем, если в начальный момент точка находилась в покое?» [9, стр. 36]*

Решение задачи:

Начнём с векторной формы второго закона Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{движ}} + \vec{F}_{\text{сопр}},$$

где $\vec{F}_{\text{движ}} = m\vec{a}$ — постоянная движущая сила, а сопротивление среды описывается силой, пропорциональной скорости $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\gamma\vec{v}$.

Так как движение происходит вдоль одной прямой, удобно перейти к скалярной записи, выбрав ось в направлении движения. В этом случае векторные величины заменяются на их проекции, и знак учитывается через направление величин:

$$m\frac{dv}{dt} = ma - \gamma v. \tag{1}$$

Здесь $v(t)$ — скалярная функция, принимающая положительные или отрицательные значения в зависимости от направления движения.

Разделим обе части на m:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = a.$$

Дифференциальное уравнение соответствует виду $y' + ay = b$, следовательно, перед нами линейное ДУ первого порядка. Решим его методом Лагранжа. Сначала зануляем правую часть (решаем однородное уравнение):

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\gamma}{m}dt.$$

В результате получаем:

$$\ln|v| = -\frac{\gamma}{m}t + C_0.$$

Потенцируем и переозначаем C:

$$v(t) = Ce^{-(\gamma/m)t}.$$

Теперь же скажем, что C – функция от t:

$$v(t) = C(t)e^{-(\gamma/m)t}.$$

Найдём производную с учётом $C(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = C'(t)e^{-(\gamma/m)t} - C(t)\cdot\frac{\gamma}{m}e^{-(\gamma/m)t}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\left[C'(t)e^{-(\gamma/m)t} - \frac{\gamma}{m}C(t)e^{-(\gamma/m)t}\right] + \frac{\gamma}{m}C(t)e^{-(\gamma/m)t} = a.$$

Приведём подобные и выразим $C'(t)$:

$$C'(t)e^{-(\gamma/m)t} = a \quad \to \quad C'(t) = ae^{(\gamma/m)t}.$$

Интегрируем $C'(t)$:

$$C(t) = \frac{am}{\gamma}e^{(\gamma/m)t} + C_1.$$

Подставим в $v(t)$:

$$v(t) = \left(\frac{am}{\gamma}e^{(\gamma/m)t} + C_1\right)e^{-(\gamma/m)t}.$$

Упростим выражение:

$$v(t) = \frac{am}{\gamma} + C_1 e^{-(\gamma/m)t}.$$

Учитываем начальное условие $v(0) = 0$:

$$0 = \frac{am}{\gamma} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{am}{\gamma}.$$

Окончательное решение:

$$v(t) = \frac{am}{\gamma}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right).$$

Использование ДУ позволило учесть влияние сопротивления среды и найти точное выражение для скорости. Видно, что скорость стремится к установившемуся значению $v_\infty = am/\gamma$, а в начальный момент времени ($t = 0$) скорость равна нулю. Это показывает, что сопротивление замедляет разгон, но не мешает достижению постоянной скорости.

Ответ: $v(t) = \dfrac{am}{\gamma}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right)$.

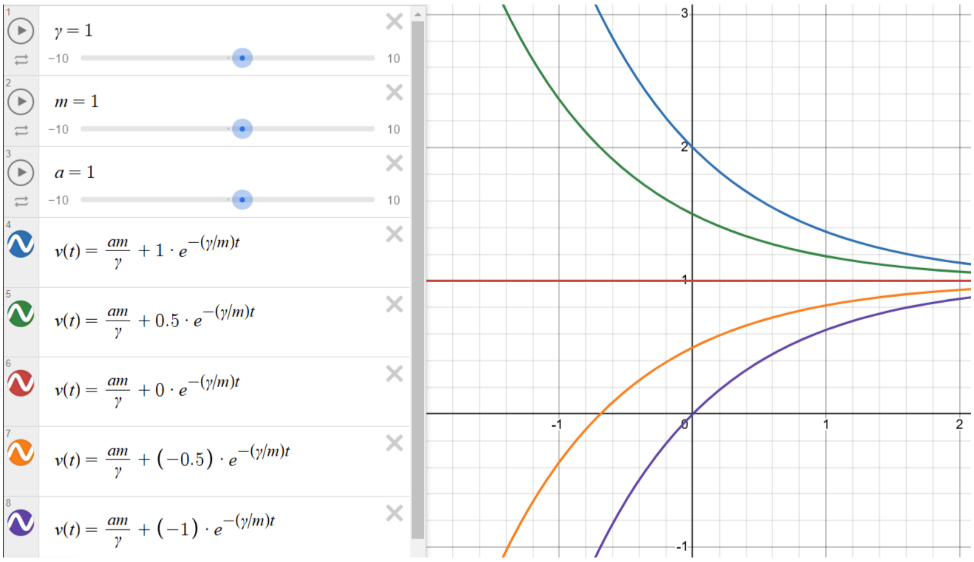

Рис. 1. Интегральные кривые задачи 1, где$a = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$

Задача 2. *«Парашютист падает под действием силы тяжести. Найти закон изменения высоты парашютиста над уровнем земной поверхности, если сопротивление воздуха пропорционально скорости его падения, а в начале падения он находился на высоте H, причём был в состоянии покоя. » [1, стр. 44]*

Решение задачи:

Начнём с применения второго закона Ньютона. Запишем его в векторной форме:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{сопр}}.$$

Сила тяжести направлена вертикально вниз: $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$, а сила сопротивления воздуха — против движения: $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\gamma\vec{v}$. Запишем уравнение движения по принципу, который использовали при решении задачи 1 в уравнении под номером (1):

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.$$

Разделим обе части на m:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = g.$$

Дифференциальное уравнение соответствует виду $y'+ay = b$, следовательно, перед нами линейное ДУ первого порядка. Решим его методом Лагранжа. Сначала зануляем правую часть и получаем однородное уравнение, идентичное уравнению из задачи 1:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = 0.$$

Его общее решение:

$$v(t) = Ce^{-(\gamma/m)t}.$$

Теперь переходим к методу вариации постоянной. Полагаем, что C — функция от t:

$$v(t) = C(t)e^{-(\gamma/m)t}. \tag{2}$$

Найдём производную с учётом $C(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = C'(t)e^{-(\gamma/m)t} - C(t)\cdot\frac{\gamma}{m}e^{-(\gamma/m)t}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\left[C'(t)e^{-(\gamma/m)t} - \frac{\gamma}{m}C(t)e^{-(\gamma/m)t}\right] + \frac{\gamma}{m}C(t)e^{-(\gamma/m)t} = g.$$

Приведём подобные и получим:

$$C'(t)e^{-(\gamma/m)t} = g.$$

Тогда $C'(t)$ равно:

$$C'(t) = ge^{(\gamma/m)t}.$$

Интегрируя, получим:

$$C(t) = \frac{gm}{\gamma}e^{(\gamma/m)t} + C_1.$$

Подставим это в уравнение под номером (1):

$$v(t) = \left(\frac{gm}{\gamma}e^{(\gamma/m)t} + C_1\right)e^{-(\gamma/m)t}.$$

Упрощаем:

$$v(t) = \frac{gm}{\gamma} + C_1e^{-(\gamma/m)t}.$$

С учётом условия $v(0) = 0$ находим:

$$0 = \frac{gm}{\gamma} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{gm}{\gamma}.$$

Тогда:

$$v(t) = \frac{gm}{\gamma}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right).$$

Теперь найдём высоту $h(t)$. Так как $v(t) = -\frac{dh}{dt}$ (высота убывает при движении вниз), получаем:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{gm}{\gamma}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right).$$

Интегрируем, заметив похожий интеграл из задачи 1. Сразу получаем ответ:

$$h(t) = -\frac{gm}{\gamma}\left(t + \frac{m}{\gamma}e^{-(\gamma/m)t}\right) + C_2.$$

Подставим начальное условие $h(0) = H$:

$$H = -\frac{gm^2}{\gamma^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = H + \frac{gm^2}{\gamma^2}.$$

Итак, окончательная формула:

$$h(t) = H - \frac{gm}{\gamma}t - \frac{gm^2}{\gamma^2}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right).$$

Таким образом, движение состоит из двух характерных фаз. В начальный момент времени преобладает ускоренное падение, при этом скорость постепенно возрастает от нуля. По мере увеличения скорости сила сопротивления воздуха растёт, и при достижении условия $mg = \gamma v$ движение переходит в равномерное. Характерное время установления этого режима определяется величиной m/γ.

При увеличении времени ($t > m/\gamma$) экспоненциальная составляющая становится пренебрежимо малой, и основной вклад дают первые два слагаемых, описывающие равномерное движение с предельной скоростью $v = mg/\gamma$. Интересно отметить, что эта предельная скорость не зависит от начальной высоты H, а определяется только соотношением между массой парашютиста и коэффициентом сопротивления воздуха.

Ответ: $h(t) = H - \frac{gm}{\gamma}t - \frac{gm^2}{\gamma^2}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right)$.

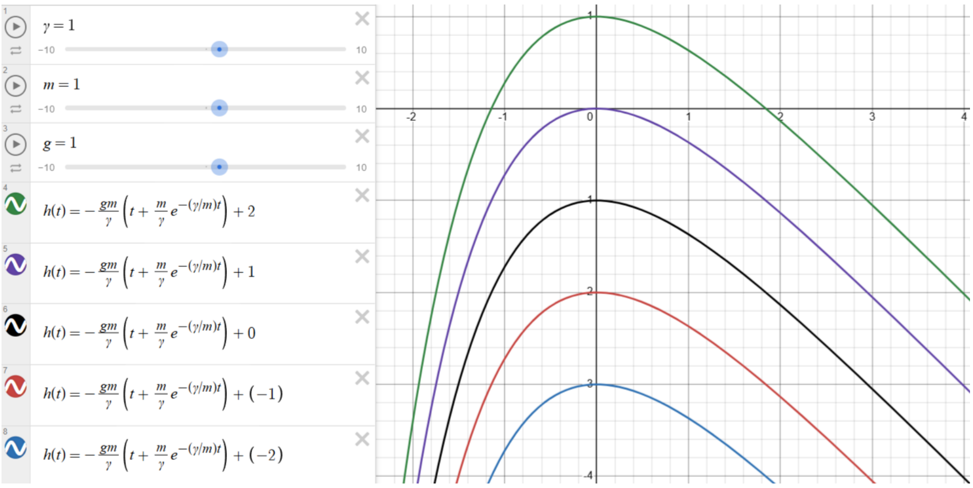

Рис. 2. Интегральные кривые задачи 2, где $g = 1, m = 1, \gamma = 1$

Задача 3. *« Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна $v_0 = 2$ м/с, а её скорость через $t_1 = 4$ с равна $v_1 = 1$ м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна $v_2 = 0.25$ м/с? Какой путь может пройти лока до остановки?» [9, стр. 38]*

Решение задачи:

По второму закону Ньютона запишем уравнение движения по принципу, который использовали при решении задачи 1 в уравнении под номером (1):

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v.$$

Разделим на m:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, так как мы легко можем получить уравнение с разделёнными переменными, поделив на v, предполагая, что оно не равно 0, и умножив на dt. Перепишем:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m}dt.$$

Теперь решим его, интегрируя обе части уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m}\int dt.$$

Решая табличные интегралы, получаем:

$$\ln|v| = -\frac{\gamma}{m}t + C.$$

Потенцируем и переозначаем C:

$$v = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

Вспоминаем, что при решении предположили, что v не равно 0. Если же $v = 0$, то, выходит, что $C = 0$. То есть наше дополнительное решение уже содержится в ответе (так как C – любое число). Теперь определим константу C из начального условия $v(0) = v_0$:

$$v_0 = Ce^0 \longrightarrow C = v_0.$$

Тогда окончательное выражение для скорости:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

Определяем коэффициент сопротивления, используя $v(4) = 1$ м/с и делим на 2 обе стороны:

$$1 = 2e^{-4\gamma/m} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-4\gamma/m}.$$

Логарифмируем и преобразовываем правую часть. Получаем:

$$-4\gamma/m = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -4\gamma/m = -\ln 2 \Rightarrow \frac{\gamma}{m} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Теперь определим время при $v = 0.25$ м/с и разделим на 2:

$$0.25 = 2e^{-\frac{\ln 2}{4}t} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-\frac{\ln 2}{4}t}.$$

Логарифмируем, преобразовываем правую часть и сокращаем:

$$-\frac{\ln 2}{4}t = \ln\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{\ln 2}{4}t = -3\ln 2 \Rightarrow t \cdot \ln 2 = 12\ln 2 \Rightarrow t = 12.$$

Далее определим пройденный путь, вспомнив, что $v = dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{\ln 2}{4}t}.$$

Интегрируем и получаем:

$$x = \int_0^\infty 2e^{-\frac{\ln 2}{4}t}dt = 2\frac{-4}{\ln 2}e^{-\frac{\ln 2}{4}t}\Big|_0^\infty.$$

При $t \longrightarrow \infty$ экспонента зануляется и тогда:

$$x = \frac{8}{\ln 2} \approx 11.5 \text{ м}.$$

Использование дифференциального уравнения позволило нам легко найти зависимость скорости от времени. Видно, что скорость экспоненциально убывает, лодка не может двигаться бесконечно долго. Кроме того, мы нашли точное время, когда скорость уменьшится до заданного значения, и полный пройденный путь.

Ответ: Время, когда скорость уменьшится до 0.25 м/с равна $t = 12$ с, а пройденный путь до остановки равен $x \approx 11.5$ м.

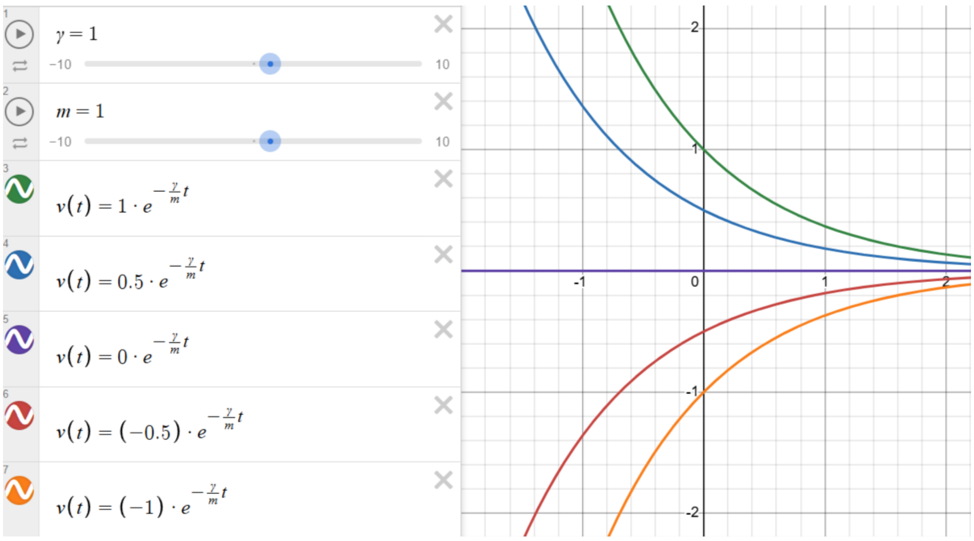

Рис. 3. Интегральные кривые задачи 3, где $m = 1, \gamma = 1$

Задача 4. *« В замкнутую электрическую цепь последовательно включены источник тока с электродвижущей силой (ЭДС) $\mathcal{E}(t)$, меняющейся с течением времени, активное сопротивление R и катушка с индуктивностью L. Вывести закон изменения силы тока $I(t)$ с течением времени, если вначале (при $t = 0$) она равнялась нулю.» [1, стр. 46]*

Решение задачи:

По закону Кирхгофа[2] сумма напряжений в замкнутом контуре равна нулю, что для данной цепи даёт:

$$\mathcal{E}(t) = IR + L\frac{dI}{dt}.$$

Перенесём всё с I влево, поделив на L и получим:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}(t)}{L}.$$

Решим его, рассматривая случай постоянной ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}_0}{L}.$$

Дифференциальное уравнение соответствует виду $y' + ay = b$, следовательно, перед нами линейное ДУ первого порядка. Решим его методом Лагранжа. Сначала зануляем правую часть и получаем однородное уравнение, идентичное уравнению из задачи 1:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

Разделим переменные, предполагая, что $I \neq 0$, и проинтегрируем:

$$\int \frac{dI}{I} = \int -\frac{R}{L}dt.$$

Получим:

$$\ln|I| = -\frac{R}{L}t + C_0.$$

Потенцируем обе части и заметим, что если $I = 0$, то $C = 0$, то есть решение уже содержится в общем решении:

$$I(t) = Ce^{-(R/L)t}.$$

Теперь представим C как функцию от t:

$$I(t) = C(t) \cdot e^{-(R/L)t}.$$

Найдём производную:

$$\frac{dI}{dt} = C'(t) \cdot e^{-(R/L)t} - \frac{R}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-(R/L)t}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\left[C'(t) \cdot e^{-(R/L)t} - \frac{R}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-(R/L)t}\right] + \frac{R}{L} \cdot C(t)e^{-(R/L)t} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}.$$

Приведём подобные:

$$C'(t) \cdot e^{-(R/L)t} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}.$$

Выразим $C'(t)$:

$$C'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}e^{(R/L)t}.$$

Интегрируем:

$$C(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\int e^{(R/L)t}dt + C_1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(e^{(R/L)t} - 1\right) + C_1.$$

[2]Второй закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих вдоль того же контура [3, стр. 79].

Тогда:

$$I(t) = e^{-(R/L)t} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(e^{(R/L)t} - 1 \right) + C_1 \right].$$

Используем начальное условие $I(0) = 0$:

$$0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(e^0 - 1 \right) + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Окончательное решение для тока:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right).$$

Таким образом, сила тока экспоненциально возрастает от нуля до установившегося значения $I_{уст} = \mathcal{E}_0/R$. Скорость роста тока зависит от соотношения L/R, называемого постоянной времени цепи. Чем больше индуктивность L или меньше сопротивление R, тем медленнее ток достигает своего максимального значения. То есть, индуктивность в цепи приводит к плавному нарастанию тока, а не к мгновенному установлению, как в чисто резистивной цепи.

Ответ: $I(t) = \dfrac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right)$.

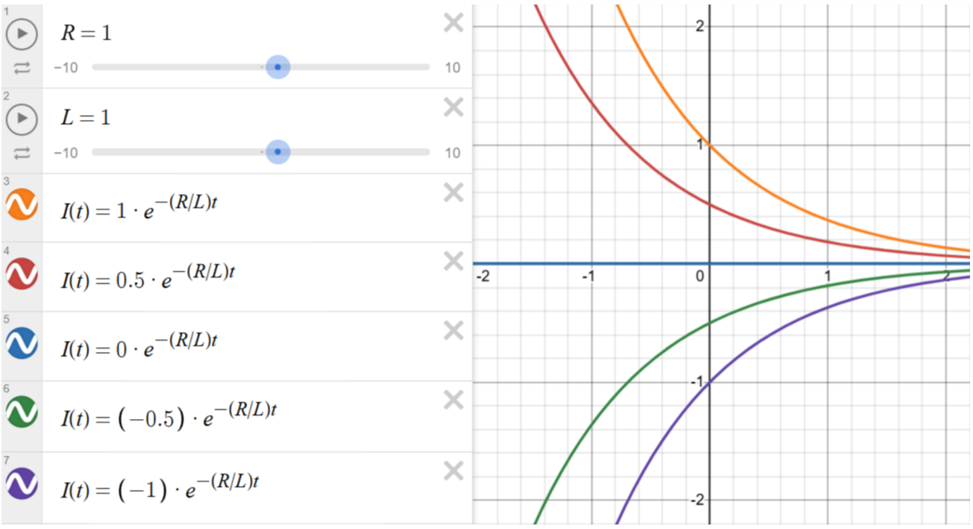

Рис. 4. Интегральные кривые задачи 4, где $R = 1, L = 1$

Задача 5. *«Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и длине его. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу* 150 *м, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра* $v_0 = 12$ *м/с, если после прохождения в лесу пути* $S = 1$ *м, скорость ветра уменьшилась до величины* $v_1 = 11.8$ *м/с. » [7, стр. 35-36]*

Решение задачи:

Скорость ветра уменьшается пропорционально пройденному пути S, то есть:

$$\frac{dv}{dS} = -\alpha v,$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Это уравнение с разделяющимися переменными, так как мы легко можем получить уравнение с разделёнными переменными, поделив на v, предполагая, что оно не равно 0, и умножив на dS. Перепишем:

$$\frac{dv}{v} = -\alpha dS.$$

При интегрировании обеих сторон получаем:

$$\ln |v| = -\alpha S + C.$$

Потенцируем и переозначаем C, получая:

$$v = Ce^{-\alpha S}.$$

Можно заметить, что при $v = 0$ выходит, что $C = 0$. То есть наше дополнительное решение уже содержится в ответе (так как C – любое число). Теперь используем начальное условие $v(0) = v_0 = 12$ м/с и выражаем C:

$$12 = Ce^{-\alpha \cdot 0} \Rightarrow C = 12.$$

Следовательно,

$$v(S) = 12e^{-\alpha S}.$$

Определим коэффициент α. Подставим $v(1) = 11.8$:

$$11.8 = 12e^{-\alpha \cdot 1} \to \alpha = -\ln\frac{11.8}{12} \approx 0.017.$$

Теперь, зная α, найдём скорость при $S = 150$ м:

$$v(150) = 12e^{-0.017 \times 150} \approx 0.934 \text{ м/с}.$$

Таким образом, скорость ветра монотонно убывает по мере проникновения в лесной массив. Коэффициент затухания α, определённый из экспериментальных данных, характеризует плотность лесного покрова. При прохождении 150 метров скорость ветра снижается до менее чем 8% от начального значения, что подтверждает эффективность леса как природного ветрозащитного барьера и позволяет количественно оценивать его аэродинамические свойства. То есть, метод дифференциальных уравнений позволил учесть постепенное уменьшение скорости ветра и получить точный закон её изменения.

Ответ: $v(150) \approx 0.934$ м/с.

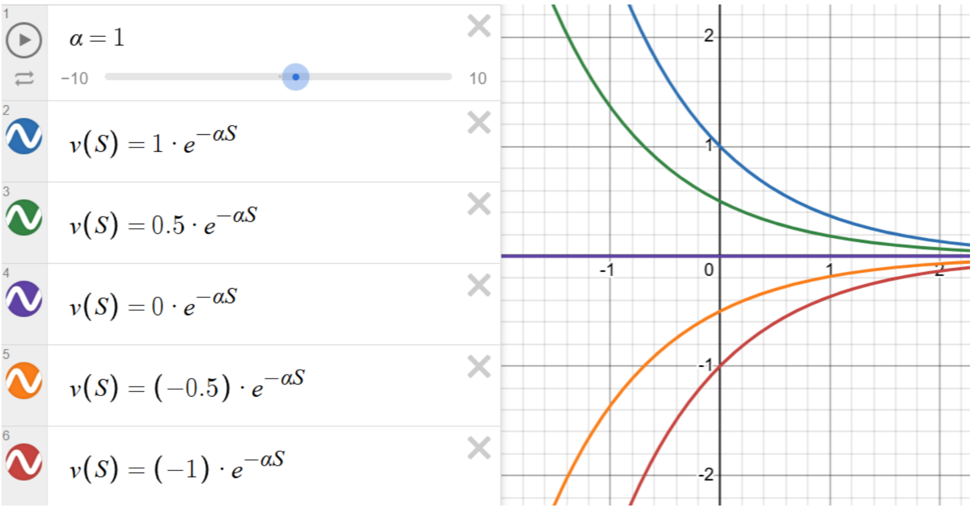

Рис. 5. Интегральные кривые задачи 5, где $\alpha = 1$

6. Заключение. Проведя исследование, стало ясно, что дифференциальные уравнения являются универсальным инструментом математического описания физических процессов. Их применение позволяет формализовать законы природы и находить количественные зависимости между величинами, описывающими динамику систем. На основе полученных знаний был сформирован общий алгоритм решения физических задач с использованием дифференциальных уравнений. Проведённые исследования подтвердили, что применение математических методов не только упрощает процесс решения физических задач, но и позволяет глубже понять суть явлений, лежащих в их основе. Полученные результаты могут быть полезны для дальнейшего изучения математического моделирования физических процессов и углублённого освоения теоретической механики и других разделов физики.

Благодарность. *Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Черновой О. В. за ценные советы и поддержку.*

Список литературы

1. Виленкин Н. Я., Доброхотова М. А., Сафонов А. Н. 1984. Дифференциальные уравнения. М., Просвещение, 176.
2. Гриншпон Я. С. 2011. Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Томск, «Изд. ТГУСУИР», 74.
3. Каазик Ю. Я. 2007. Математический словарь. Таллин, ФИЗМАЛИТ, 334.
4. Киясов С. Н., Шурыгин В. В. 2011. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач. Казань, КФУ, 112.

5. Лобанова Н. И., Аммосова Н. В. 2017. Обучение методу математического моделирования при решении геометрических и физических задач с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования. Оленегорск, МУДО «ЦВР», 6.
6. Лукьяненко Д. В., Некрасов А. Д. 2020. Дифференциальные уравнения. М., ФИЗФАК МГУ, 106.
7. Пономарёв К. К. 1962. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М., «Учпедгиз», 184.
8. Прохоров. А. М., Алексеев Д. М., Балдин А. М. 1990. Физическая энциклопедия Т. 2 Добротность — Магнитооптика. М., «Советская энциклопедия», 704.
9. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. 1989. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., «Высшая школа», 383.
10. Сахнович А. Д., Кураленко М. В. 2020. Применение дифференциальных уравнений для решения физических задач. Минск, БНТУ, 5.
11. Смакова Ф. Ф., Сабитова Ю. К. 2014. Составление дифференциального уравнения по условию физической задачи. Стерлитамак, СФ УУНиТ, 6.
12. Филиппов А. Ф. 2000. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск, НИЦ «РиХД», 176.

Поступила в редакцию 26.05.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Журавель София Сергеевна – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию