Применение СКМ Maple в некоторых разделах теории дифференциальных уравнений

Максимов С. А.
1759037@bsuedu.ru

Аннотация. В статье обсуждается метод изоклин и его визуализация средствами системы компьютерной алгебры (СКМ) Maple. Приведен пример решения соответствующей задачи средствами СКМ Maple. Ко всем этапам решения задачи написаны программные коды и приведен их визуализации. Во второй половине статьи рассмотрен пример геометрической задачи, приводящей к дифференциальным уравнениям. Решение проведено с использованием СКМ Maple.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, метод изоклин, система компьютерной алгебры Maple

Для цитирования: Максимов С. А. 2025. Применение СКМ Maple в некоторых разделах теории дифференциальных уравнений. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 33–40.

Введение. Во все времена, преподавая математические дисциплины перед преподавателем (учителем) стояла задача не только передать прочные теоретические знания, но и развить у обучающихся мышление, познавательную деятельность и заинтересовать математической дисциплиной. Наглядность изложения любого материала всегда дает более успешные результаты, чем «сухое» теоретическое изложение основных фактов. В вузовском курсе «Обыкновенные дифференциальные уравнения» непосредственно перед изучением видов дифференциальных уравнений (ДУ) и методов их решения, студентам предлагается рассмотреть приближенный графический метод решения ДУ первого порядка – метод изоклин. Изучение данного метода построения интегральных кривых и рассмотрение некоторых других задач, на мой взгляд, и обеспечивает ту, необходимую, долю наглядности для этой дисциплины и позволяется оживить учебный процесс. Система компьютерной математики Maple (СКМ Maple) – одна из самых мощных. Достаточно большое число различных математических задач можно решить, используя ее диалоговый режим. Визуализацию обеспечивают мощные графические средства, использование которых позволяет увидеть различные пути решения задачи, добавляя тем самым «элементы эксперимента и научного исследования в учебный процесс». Кроме того, система обладает встроенным языком программирования. Этой возможностью я буду пользоваться, когда в решении задач необходимо будет использовать символьные преобразования математических выражений. *Целью* данной работы является рассмотрение визуализации метода изоклин средствами СКМ Maple и решение геометрической задачи, приводящей в дифференциальным уравнениям, полученное с использованием инструментов СКМ Maple.

1. Метод изоклин и его визуализация средствами СКМ Maple.

Определение. *Изоклинами дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ или соответствующего ему поля направлений называются множества точек одинакового наклона поля направлений $\Gamma_C = (x; y)|f(x, y) = C$.*

Можно сказать, что изоклины – линии уровня функции $f(x, y)$, которые задаются уравнениями $f(x, y) = C$, вдоль которых поле направлений имеет постоянный наклон: $\operatorname{tg}\alpha = C$. Для $C = 0$ изоклина Γ_0 дает все точки, в которых касательная к интегральным кривым горизонтальна, т. е. все критические точки решений $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Метод изоклин построения полей направлений состоит в том, что мы изображаем семейство некоторых изоклин Γ_C и вдоль каждой из них строим поле направлений прямых (отрезков) с угловыми коэффициентами, равными C.

Несмотря на то, что современные математические пакеты позволяют с большой точностью построить изображение поля направлений, метод относится к приближенным методам решения и эффективно помогает быстро и хорошо оценить решение.

Сразу отмечу, что считаю применение СКМ Maple в решении различных задач теории ДУ оправданным в том случае, когда учащиеся уже научились получать решения дифференциальных уравнений данным методом «вручную», т. е. без применения на всех этапах решению любых компьютерных технологий. Кроме того, использование данной системы облегчит преподавателю контроль за правильностью выполнения заданий обучающимися.

Задача 1. *«Используя метод изоклин построить приближенно интегральные кривые уравнения*

$$y' = 2x(1 - y) \tag{1}$$

» [6, стр. 26].

Опишем программный код для визуализации решения этой задачи в СКМ Maple. Перед решением новой задачи рекомендуется начать с команды restart. Данная команда полностью очищает внутреннюю память Maple от всех определений, совершенных в процессе работы.

1. Для построения графиков изоклин будем использовать *пакет plots*, подробное описание которого можно найти в [4]. Из всех его многочисленных команд для реализации нашей задачи понадобятся команды:

1. *plot*, для построения графика изоклины, заданной явной функцией [5].

2. *implicitplot*, отвечающая за построение двумерного графика неявной функции.

   В качестве параметров управления изображением будем использовать: установку цвета линии – параметр *color*; толщину линии – параметр *thickness=n*; установку масштаба рисунка – параметр *scaling*. Тип линии оформим через контекстное меню: *Line→SpaceDash*.

3. *textplot*, для подписей всех графиков построенных изоклин.

   В опциях команды задаём координаты точки, с которой будет начинается вывод текста. Используя

4. *display*, которая строит график для списка графических объектов.

   В нашем случае она позволит построить графики всех, заданных изоклин.

Ниже представлены программные коды задачи 1 и их реализации средствами СКМ Maple.
1. Построение изоклин уравнения (1):

```
>restart;
> with(plots);
>eq[0] := 1: eq[1] := 2*x*(1-y) = -1: eq[2] := 2*x*(1-y) = 1:
>eq[3] := 2*x*(1-y) = -2: eq[4] := 2*x*(1-y) = 2:
>eq[5] := 2*x*(1-y) = -3: eq[6] := 2*x*(1-y) = 3:
>iz[0] := plot([eq[0]], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = black, thickness = 2,
scaling = CONSTRAINED):
> iz[1] := implicitplot(eq[1], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = red, thickness
= 3,
scaling = CONSTRAINED):
> iz[2] := implicitplot(eq[2], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = blue, thickness
= 3,
scaling = CONSTRAINED):

> iz[3] := implicitplot(eq[3], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = green, thickness
= 3,
scaling = CONSTRAINED):
> iz[4] := implicitplot(eq[4], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = gray, thickness
= 3,
scaling = CONSTRAINED):
>t0 := textplot([0, 1.1, "уравнение изоклины при C=0"],
font = [TIMES, ITALIC, 20], align = RIGHT):
>t1 := textplot([-0.8, 0.5, "<-при C=-1"],
font = [TIMES, ITALIC, 20], align = RIGHT):
> t2 := textplot([0.1, 0.5, "при C=1-> "],
font = [TIMES, ITALIC, 20], align = RIGHT):
> t3 := textplot([2, 1.6, "<- уравнение изоклины при C=-2"],
font = [TIMES, ITALIC, 20], align = RIGHT):
> t4 := textplot([-3.4, 1.8, "уравнение изоклины при C=2->"],
font = [TIMES, ITALIC, 20], align = RIGHT):
>display([iz[0], iz[1], iz[2], iz[3], iz[4], t0, t1, t2, t3, t4]);
```

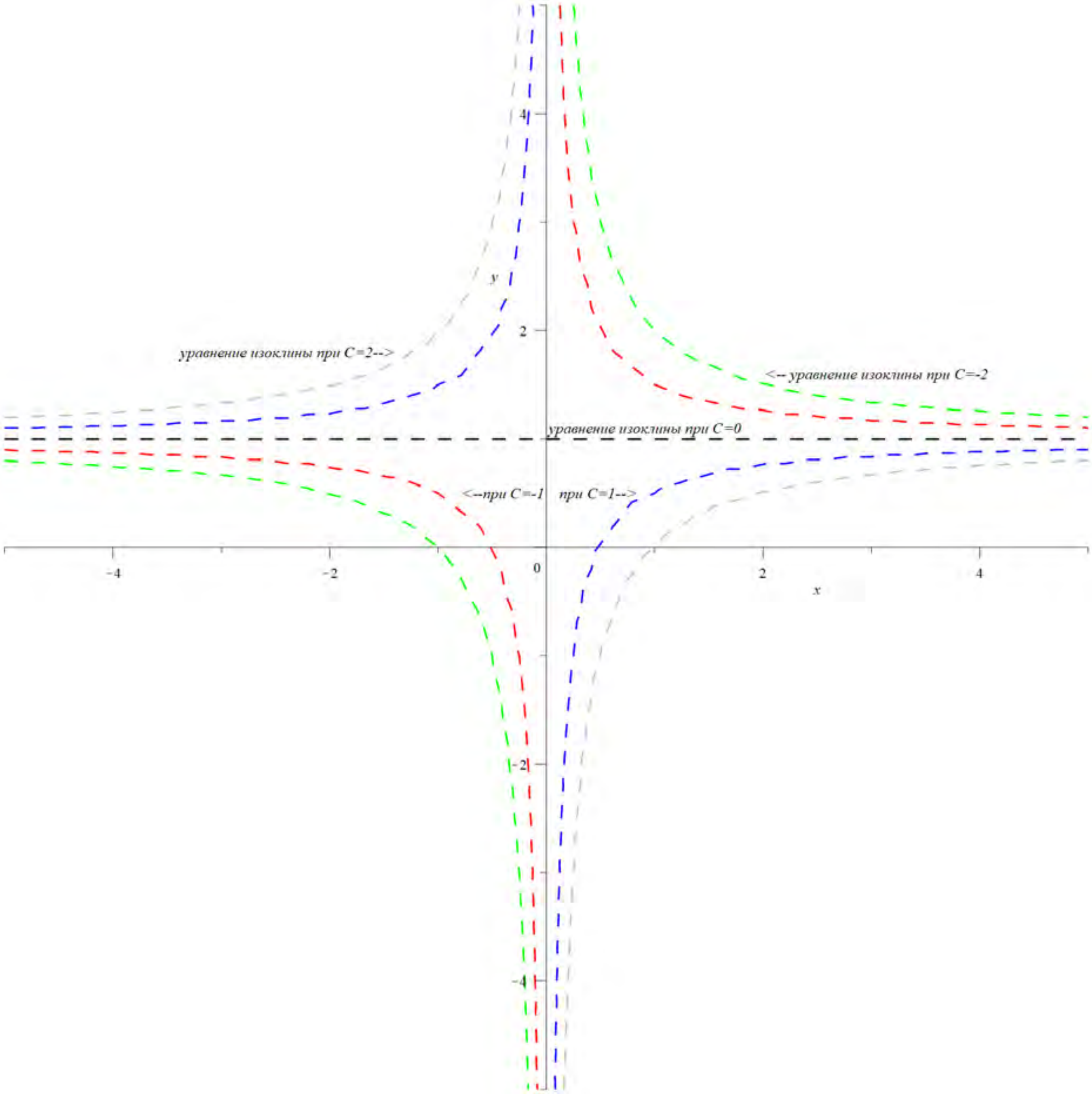

Рис. 1. Изоклины уравнения (1) при различных значениях C

Для построения поля направлений (см. рисунок 3) будем использовать команду DEplot, которая строит график численного решения ДУ. Подробное описание см., например, в [5]. Из параметров, которые будем использовать

- deqns – список обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка,

- vars – список зависимых переменных. Выберем ключевые опции: color – цвет стрелки и linecolour – цвет линии, соответственно, которые могут быть заданы различными способами; arrows – тип стрелки и dirgrid – массив, устанавливающий число точек сетки.

Программный код:

Построение поля направлений уравнения (**1**):

```
>restart;
>DEplot((D(y))(x) = 2*x*(1-y(x)), y(x),
x = -5 .. 5, y = -7 .. 7, color = [.2*y(t)*(x(t)-1), x(t)*(1-y(t)), .5],
linecolor = (1/2)*t, arrows = mediumfill, dirgrid = [25, 25]);
```

Визуализация программного кода:

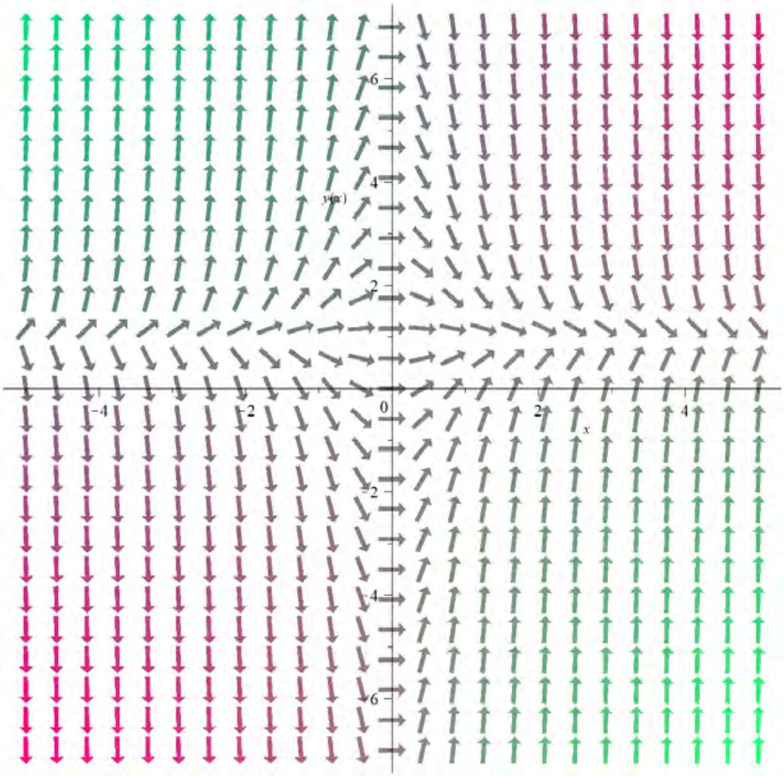

Рис. 2. Поле направлений уравнения (1)

Для построения интегральных кривых с помощью параметра inits добавляем начальные условия, параметром thickness устанавливаем толщину выводимой линии, немного меняем тип стрелки и массив, устанавливающий число точек ее точек. Программный код представлен в Приложении 1. Его реализация на рисунке 4

Программный код:

Построение интегральных кривых уравнения (**1**):

```
>restart;
>DEplot((D(y))(x) = 2*x*(1-y(x)),
y(x), x = -2 .. 2, y = -6.5 .. 6.5, [[y(0) = 0], [y(0) = 1], [y(0) = -1], [y(0) =
-2], [y(0) = 2], [y(0) = -3], [y(0) = 3], [y(0) = -4], [y(0) = 4], [y(0) = 6]],
thickness = 3, linecolor = [black, red, black, black, black, black, black, black,
black, black], color = [.2*y(t)*(x(t)-1), x(t)*(1-y(t)), .5], arrows = medium,
dirgrid = [30, 30];)
```

Визуализация програмного кода построения интегральных кривых показана на рисунке 3.

2. Геометрические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. К основным вида дифференциальных уравнений первого порядка относятся:

- дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
- однородные дифференциальные уравнения;
- линейные дифференциальные уравнения;
- дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной;

Для успешного решения геометрических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, необходимо знать некоторые простейшие понятия теории плоских кривых из дифференциальной геометрии [2]. Например, способы задания кривых в декартовой и полярной системах координат; уравнения касательной и нормали; положительные направления кривой, касательной и нормали; понятия подкасательная и поднормаль кривой; длина дуги кривой; радиус кривизны кривой, радиус-вектор.

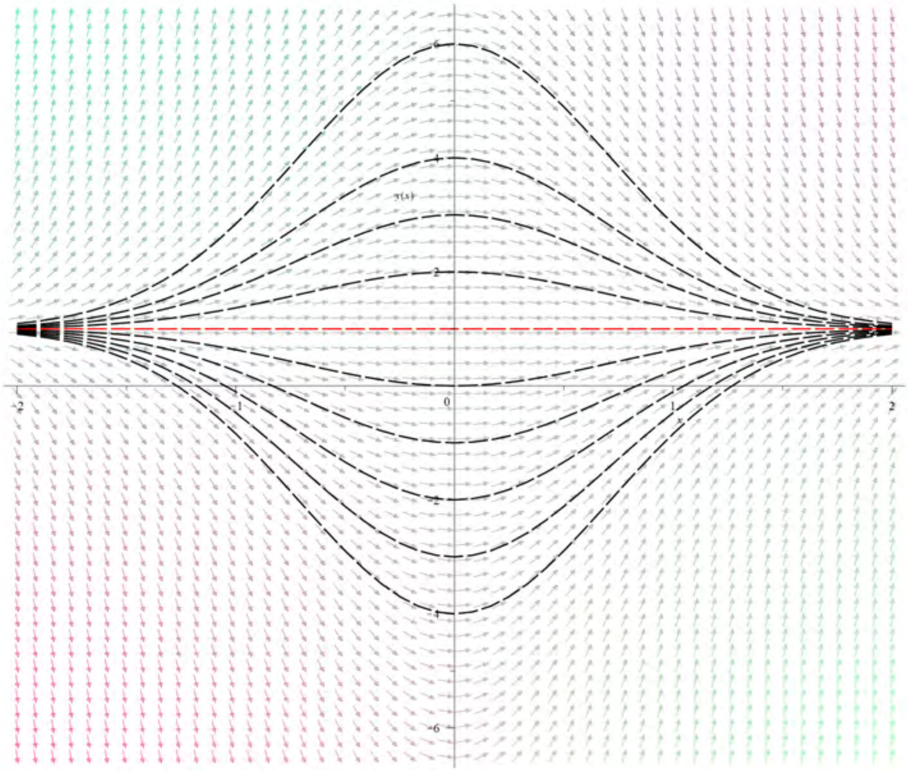

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (1)

Решение задачи лучше всего проводить по определенному алгоритму, см. например в [4], который мы реализуем в решении следующей задаче.

Задача 2. *«Найти кривую, зная, что площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и ординатой любой точки на ней, равна кубу этой ординаты» [3].*

Будем выполнять последовательно следующие действия:

1. Построим прямоугольную декартову систему координат. Для определенности будем рассматривать первую четверть, в которой изобразим график произвольной функции $y = y(x)$ и выберем на ней произвольную точку $A(x; y)$. Соответствующий программный код СКМ Maple и его реализация представлены ниже.

1. построение области, соответствующей условию задачи **2**:

```
>restart;
>with(plots);
>f[1] := 2; f[2] := 3*y^2-2*x = 0;
>g[1] := plot([f[1]], x = -1 .. 8, y = 0 .. 3, color = red, thickness = 3,
scaling = CONSTRAINED);
>g[2] := implicitplot(f[2], x = -1 .. 8, y = 0 .. 3, color = blue, thickness =
3,
scaling = CONSTRAINED);
>tochka := plot([[6, 2], [6, 0]], style = point, color = black, symbol = circle,
thickness = 6);
pict2 := plot([[6, 2], [6, 0]], style = line, color = red, symbol = diamond,
thickness = 3);
>t0 := textplot([6, 2.3, "A(x; y)"], font = [TIMES, ITALIC, 20],
align = RIGHT);
>t1 := textplot([1, 1.3, "y=f(x)"], font = [TIMES, ITALIC, 20],
align = RIGHT);
display([g[1], g[2], tochka, pict2, t0, t1])
```

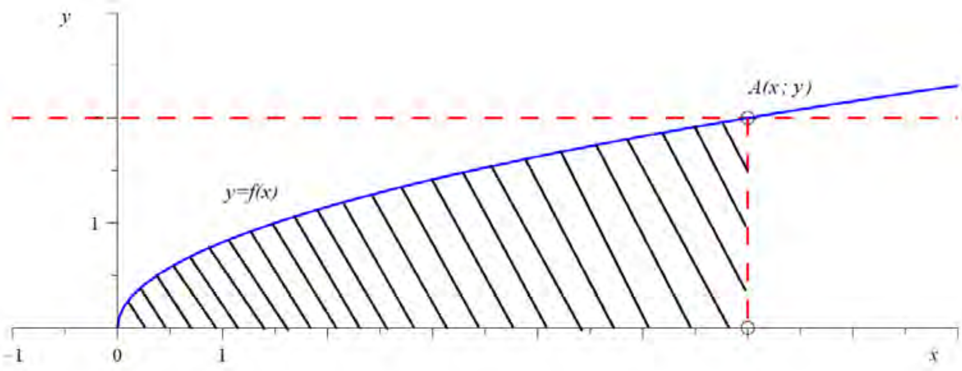

Рис. 4. Графическое изображение условия задачи 2

2. В наших обозначениях, согласно условию задачи, площадь заштрихованной области, см. рисунок 4, равна $y^3(x)$. С учетом известной формулы для площади криволинейной трапеции, получим

$$\int_0^x y(t)dt = y^3(x). \tag{2}$$

Продифференцировав (2), используя формулы для производных интеграла с переменным верхним и сложной функции, получим

$$y(x) = 3y^2(x) \cdot y'(x). \tag{3}$$

Формула (3) представляет дифференциальное уравнение, составленное по условию задачи. Таким образом, эта геометрическая задача приводит к решению уравнения с разделяющимися переменными.

3. Для решения полученного дифференциального уравнения упростим, представим производную, как отношение дифференциалов и разделим переменные:

$$3ydy = dx. \tag{4}$$

Уравнение (4) – уравнение с разделёнными переменными. Его решение находится интегрированием обеих частей равенства.

$$3\frac{y^2}{2} = x + C$$

или

$$3y^2(x) - 2x = C. \tag{5}$$

Для вывода интегральных кривых уравнения (5) воспользуемся возможностями СКМ Maple: точное решение краевой задачи с выводом графика. Программный код и его реализация представлены ниже.

```
>restart;
>de := 3*y(x)*(diff(y(x), x))-1;
>zk[1] := y(0) = 1; dsolve(de, zk[1], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[1] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = red, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[2] := y(0) = -1; dsolve(de, zk[2], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[2] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = red, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[3] := y(0) = 2; dsolve(de, zk[3], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[3] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = green, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[4] := y(0) = -2; dsolve(de, zk[4], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[4] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = green, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[5] := y(0) = -3; dsolve(de, zk[5], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[5] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = black, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
```

```
>zk[6] := y(0) = 3; dsolve(de, zk[6], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[6] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = black, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[7] := y(2) = .5; dsolve(de, zk[7], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[7] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = blue, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[8] := y(2) = -.5; dsolve(de, zk[8], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[8] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -6 .. 2, color = blue, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
zk[9] := y(8) = 1; dsolve(de, zk[9], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[9] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = gray, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[10] := y(8) = -1; dsolve(de, zk[10], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[10] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -6 .. 2, color = gray, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[11] := y(10) = 1; dsolve(de, zk[11], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[11] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -4 .. 4, color = orange, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
>zk[12] := y(10) = -1; dsolve(de, zk[12], y(x)); y1 := rhs(%);
>k[12] := plot(y1, x = -15 .. 10, y = -6 .. 2, color = orange, thickness = 3,
linestyle=3, scaling = CONSTRAINED);
> plots[display](k[1], k[2], k[3], k[4], k[5], k[6], k[7], k[8], k[9], k[10], k[11],
k[12]);
```

Для подписи интегральных кривых в этом случае я использовал контекстное меню: *Legend* → *Show Legend*, указав там же расположение подписи *Position* → *Top*.

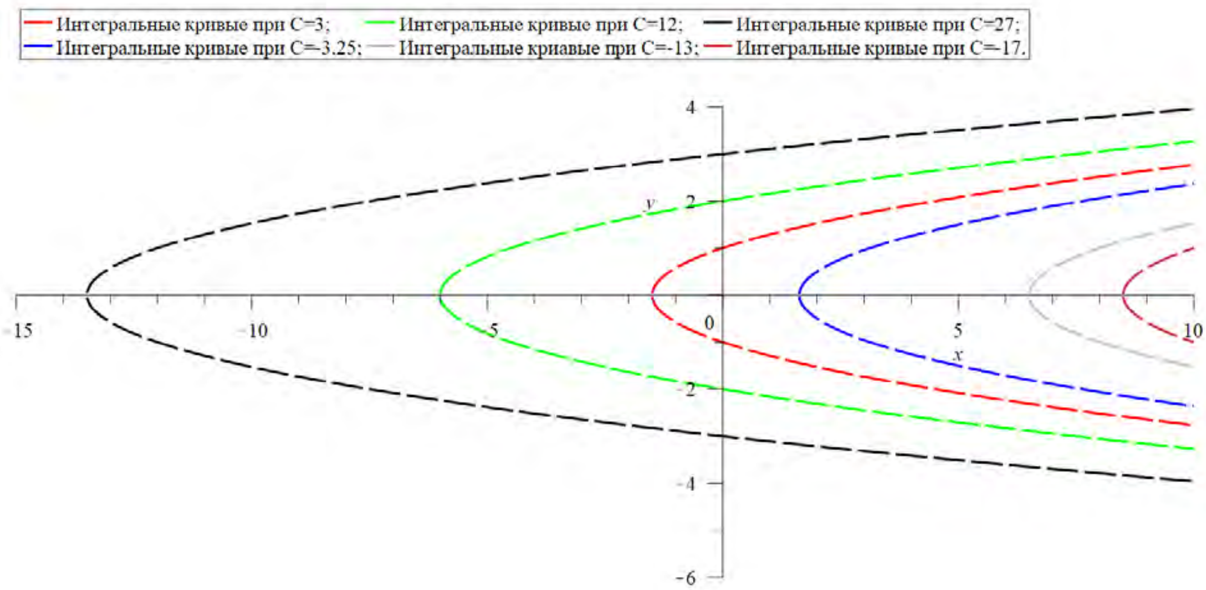

Рис. 4. Интегральные кривые, отвечающие условию задачи 2

Заключение. В работе показано, как средствами СКМ Maple можно решать задачи теории дифференциальных уравнений. Разбираясь в решении различных задач теории дифференциальных уравнений, я пришел к выводу, что СКМ Maple удобно использовать для большей наглядности и глубины понимания материала. Так, визуализация условия задачи помогает найти правильное решение, а визуализация решения – подтвердить его правильность. Комбинация традиционного решение задач с решением в СКМ Maple позволит обучать основам моделирования, что важно для будущих инженеров. Привлекая возможности СКМ Maple можно повысить мотивацию обучающихся, развить у них навыки исследовательской деятельности и творческой самостоятельности.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Голанова А. В., Голикова Е. И. Применение системы компьютерной математики Maple для решения задач дифференциальной геометрии [Электронный ресурс]/ А. В. Голанова , Е. И. Голикова // Естественные и математические науки в современном мире – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article
2. Игнатьев Ю. Г. Самигуллина А. Р . Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системе компьютерной математики Maple // Системы компьютерной математики и их приложения. 2018. № 19. С. 359–363.
3. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 4-е., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002 г. – 256 с.
4. Манзон Б. М. Maple V Power Edition. М.: Филинъ, 1998 г. – 240 с.
5. Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие. Белгород: Изд. Белаудит, 2001 г. – 116 с.
6. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989 г. – 387 с.

Поступила в редакцию 20.03.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Максимов Сергей Анатольевич – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию