Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 24–25.

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

Селезнев Е. А.
selezneve9@yandex.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается решение задачи Коши уравнение теплопроводности. Доказывается принцип максимума.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, принцип максимума

Для цитирования: Селезнев Е. А. 2025. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 24–25.

---

1. Введение. Рассмотрим длинный тонкий стержень, толщиной которого мы пренебрегаем. Будем отождествлять этот стержень со всей числовой прямой. Температуру стержня в момент времени t в точке x обозначим через. С течением времени тепло перераспределяется внутри стержня. Этот процесс описывается уравнением теплопроводности.

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{1}$$

Где $u(x,t)$ – температура в точки x и температуре t. Для исследования уравнения теплопроводности (1) нужно построить фундаментальное решение, которое в терминах обобщенных функций определяется как решение следующего уравнения в пространстве.

$$e_t - \Delta e = \delta(x,t).$$

Решение может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$e(x,t) = \frac{1}{v^{-1}(4pit)^{N/2}} exp(-\frac{|x|}{4t}). \tag{2}$$

Если воспользуемся симметрии, относительно преобразования то получим следующее:

$$(x,t) \longrightarrow (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Далее, мы ищем частное решение.

$$\alpha t^{-\alpha+1)} + \beta t^{-\alpha+1)} v(y) = -t^{-\alpha+2\beta)} \Delta v(y).$$

Пусть тогда $\beta = \frac{1}{2}$,получим

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}(,D_y)v(y) = -\Delta v(y).$$

Пусть $\alpha = \frac{1}{2}$

$$r^{N-1}\omega' + \frac{1}{2} r^N \omega = m.$$

Где m=const, Если m=0 тогда:

$$\int \frac{b}{t^{N/2}} \exp(\frac{-|x|^2}{4t}) = 1. \tag{3}$$

2.Общая информация. Записывая уравнение теплопроводности (1) с предельными условиям, мы докажем , что при начальной температуре дает следующую формулу:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}^{N/2} \int \exp(-frac|x-y|^2 4t) u_0(y) dy. \tag{4}$$

Положим $u_0(x) \in C(R^N)$ и определена формулой (4). Получается следующие

$$u(x,t) \in (R^N \otimes (0, +\inf).$$

Удовлетворяет начальным условиям. Выполнено предельны условия

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = u(x_0).$$

Для любого $x \in R^N$. В книге Кудряшова описано, связь между уравнением Бюргерса и уравнением теплопроводности. Если учтем все замены то получим следующее:

$$u_t + vu_x = nu_{xx} - 2n\frac{d}{dx}[\frac{1}{c_t - nuxx}] \tag{5}$$

Если вспомни преобразование Коула – Хопфа, то мы замечаем следующее. Оно помогает найти решение задачи Коши. Со всеми подстановками мы можем получить уравнение Бюргерса в другом виде:

$$v(x,t) = \int \frac{x-z}{t} \exp - \frac{G(x,z,t)}{2n} dz,$$

где

$$G(x,z,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int \phi(y)dy.$$

Разберемся теперь с принципом максимума для уравнения теплопроводности

Возьмем

$$D := U \otimes (0,t) d := B \cup S, S := dU \otimes [0,t]$$

В будущем мы сможем использовать терминологию , которая называется верхний крышкой,

Выглядит следующим образом:

$$B_t := R^N \otimes t = T.$$

А нижней крышкой будет выглядит:

$$B := R^N \otimes t = 0.$$

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004. – 416 с.
2. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с
3. Олеийник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. I часть.Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с
4. Тихонов А.Н., Самарскиий А. А. Уравнения математическоий физики. – М.: Наука, 2004. – 742 с.
5. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. 2000. – V. 96, 374 pp.

Поступила в редакцию 28.01.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Селезнев Егор Андреевич – магистрант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию