

## Решение гиперболических уравнений в Wolfram Mathematica

Токарев Д. А.  
1469493@bsuedu.ru

**Аннотация.** В данной статье исследуется применение программной системы Wolfram Mathematica при решении смешанной задачи для уравнений гиперболического типа. Основной целью статьи было показать, как с помощью этой системы намного быстрее решается смешанная задача, а также решить конкретные задачи и смоделировать колебания круглой мембраны. Для этого в статье были освещены основные определения математической физики и Wolfram Mathematica, а также функций Бесселя и их свойства, необходимые для решения задач.

**Ключевые слова:** оператор Лапласа, уравнение гиперболического типа, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стрелы, функции Бесселя, функции Неймана

**Для цитирования:** Токарев Д. А. 2025. Решение гиперболических уравнений в Wolfram Mathematica. Студенческий журнал по математике и её приложениям, 4(1): 10–18.

**1. Введение.** В математической физике уравнения гиперболического типа играют важную роль. Эти уравнения описывают множество физических процессов, например они возникают при решении задач о колебаниях круглой мембраны, колебаниях стрелы и других. Для аналитического решения этих уравнений часто используется метод Фурье. Уравнениями этого вида занимались ученые разных времен начиная от Эйлера и заканчивая современными. Вопрос о решении конкретной смешанной задачи для гиперболического уравнения имеет большее значение и в нынешнее время. В своей работе я предлагаю для упрощения и быстроты решения таких уравнения использовать программное обеспечение Wolfram Mathematica, плюсом которого является то, что он поддерживает символьные вычисления интегралов, также в нем можно графически вывести наш результат полученный в виде ряда Фурье. Также несомненным плюсом этой системы является встроенные команды для работы со специальными функциями, которые нам пригодятся при решении конкретных задач. Это все помогает исследователям меньше времени тратить на вычислительные действия, а больше времени уделять на анализ полученного результата.

**2. Общие сведения.** Дифференциальным уравнением с частными производными мы будем называть уравнение, которое имеет вид:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots) = 0, \quad (1)$$

где  $G$  – заданная функция своих аргументов. Обозначим, что порядком уравнения с частными производными мы будем называть порядок старшей частной производной входящей в уравнение (1) [1].

**Определение 1.1.** Линейное уравнение с частными производными – это уравнение, которое линейно относительно неизвестной функции  $u$  и ее частных производных.

**Определение 1.2.** Всякая функция  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции  $u$  и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным, называется решением уравнения с частными производными уравнения (1) [2]. Давайте рассмотрим уравнение второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad (2)$$

где  $a_{ij}$  – заданные функции в области  $D$  пространства  $(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , причем  $a_{ij} = a_{ji}$ . Все функции и независимые переменные мы считаем вещественными. Так как в нашей статье мы будем работать, только с уравнением гиперболического типа, то с помощью книги [8] дадим определение какие уравнения мы будем относить к этому типу. Давайте зафиксируем точку  $(x^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  в нашей области  $D$  и составим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) t_i t_j \quad (3)$$

**Определение 1.3.** Уравнение вида (2) принадлежит к гиперболическому типу в точке  $(x^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , если в этой точке квадратичная форма (3) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определённого знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака [9].

Уравнение (2) принадлежит к гиперболическому типу в области  $D$ , если во всех точках этой области оно принадлежит к гиперболическому типу. С уравнениями гиперболического типа, тесно связано, такое понятие как оператор Лапласа

**Определение 1.4.** Оператором Лапласа - называется дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом  $\Delta$ . Функции и он ставит в соответствие функцию:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (4)$$

в  $n$ -мерном пространстве.

В полярных координатах оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} \quad (5)$$

**3. Функции Бесселя и Неймана.** При решении уравнения гиперболического типа, где оператор Лапласа возникает в цилиндрических координатах, возникают функции Бесселя и Неймана. Задача, которая приводит к этим функциям, является задача вида:

$$\Delta u = k^2 u = 0,$$

где  $\Delta$  как говорилось это оператор Лапласа в полярных координатах, тогда решая это уравнение методом Фурье мы приходим к так называемому уравнению Бесселя [3].

**Определение 1.5.** Уравнением Бесселя индекса  $v$ , называется уравнение вида:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \quad \Re v \geq 0. \quad (6)$$

Решение этого уравнения, не может быть выражено в виде элементарных функций [1, 7]. Из книги [9] знаем, что фундаментальной системой решений этого линейного уравнения второго порядка относительно  $y$  является система двух линейно независимых решений, то есть для некоторых функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  определитель Вронского отличен от нуля для любых  $x \in (a, b)$ . То есть общим решением является функция:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Изучив книгу [5], мы знаем, что  $y_1(x)$  это функция Бесселя, а  $y_2(x)$  функция Неймана. Дадим им определения.

**Определение 1.6.** Функцией Бесселя порядка  $v$ , называется функция вида:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}, \quad (7)$$

где  $x$  - независимая переменная. Можно заметить, что при замене  $v$  на  $-v$ , функция  $J_{(-v)}(x)$ , также является решением уравнения (6). Также стоит, отметить, что если  $v$  нецелое число, то функции Бесселя порядка  $v$  и  $-v$  линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений для уравнения (6). Но задача чаще всего  $v$  целое, поэтому возникает функция Неймана, которая также является решением уравнения (6).

**Определение 1.7.** Функцией Неймана порядка  $v$ , называется функция вида:

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos \pi v - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}, \quad (8)$$

где  $x$  - независимая переменная.

Из книги [4] знаем, что функции Неймана и Бесселя линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений для уравнения (6). В Wolfram Mathematica, существуют специальные команды, для работы с ними. Команда `BesselJ[n,x]` существует для работы с функцией Бесселя, где  $n$  - это порядок функции, а  $x$  - независимая переменная. С помощью команды `Plot` изобразим графики функций Бесселя целого порядка [6].

```
Plot[{BesselJ[0, x], BesselJ[1, x], BesselJ[2, x], BesselJ[3, x], BesselJ[4, x],
[функция Бесселя J] [функция Бесселя J] [функция Бесселя J] [функция Бесселя J] [функция Бесселя J]
BesselJ[5, x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends -> "Expressions"]
[функция Бесселя J] [легенды графика]
```

Рис. 1. Код для вывода графиков функций Бесселя целого порядка

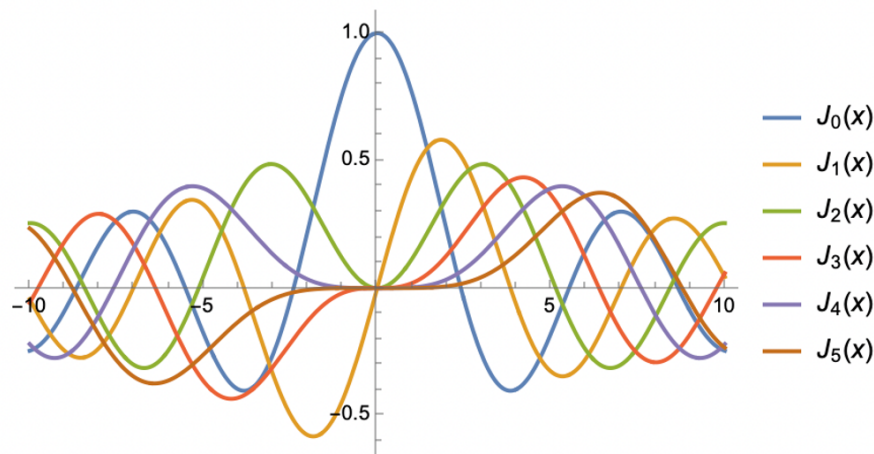


Рис. 2. Графики функций Бесселя целого порядка в Wolfram Mathematica

Команда `BesselY[n,x]` описывает функцию Неймана в Wolfram Mathematica, здесь  $n$  – это порядок функции, а  $x$  – независимая переменная. Давайте также с помощью команды `Plot` изобразим графики функций Неймана целого порядка [10].

```
Plot[Evaluate[Table[BesselY[n, x], {n, 0, 5}]], {x, -10, 10}, PlotLegends -> "Expressions"]
```

[гра...](#) [вычислить](#) [табл...](#) [функция Бесселя Y](#) [легенды графика](#)

Рис. 3. Код для вывода графиков функций Неймана целого порядка

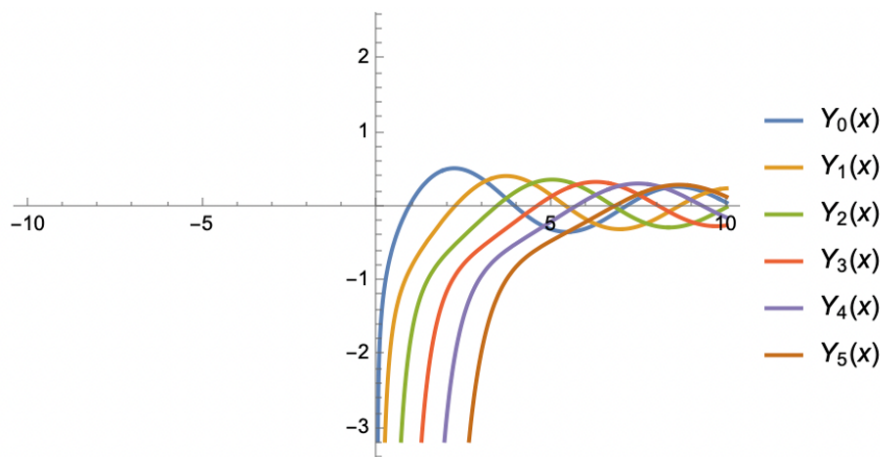


Рис. 4. Графики функций Неймана целого порядка в Wolfram Mathematica

На графиках функций Неймана можно заметить, что они не имеют ограничений в окрестности нуля. Подробное доказательство этого можно найти в источнике [4]. При решении практических задач, связанных с колебаниями круглой мембраны, обычно говорится, что они ограничены в нулевой точке. Корней функций Бесселя бесконечное множество, это также можно заметить на рисунке 2, строгое доказательство этого свойства, можно посмотреть в той же книге [4]. Это тоже важное замечание, так как при решении задач будет возникать уравнение вида:  $J_v(x) = 0$ . Во время решения задач, необходимо разложить функцию Бесселя в ряд Фурье – Бесселя, найти коэффициенты этого ряда, для этого необходимо знать рекуррентные соотношения из книги [8], мы будем искать эти коэффициенты не вручную, а с помощью Wolfram Mathematica.

**4. Уравнения колебаний.** Вывод уравнения колебаний можно посмотреть в книге [8].

**Определение 1.9.** Уравнением колебаний стержня, называют уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

В (9) уравнение  $u(x, t)$  – искомая функция, которая описывает отклонения от стержня,  $t$  – время,  $x$  – координата точки стержня.

**Определение 1.10.** Уравнением колебаний круглой мембраны, называют уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

В (10) уравнение  $u(x, y, t)$  – это искомая функция, которая описывает отклонения от мембраны,  $t$  – время,  $(x, y)$  – координата точки мембраны. Это уравнение является однородным волновым уравнением гиперболического типа. При решении задач, на колебания круглой мембраны удобно работать в полярных координатах. Для решения прикладных задач необходимы начальные и краевые условия. Заданные вместе эти условия задают смешанную задачу. Из книги [9] приведем формулировку начальных условий для задачи поперечных колебаний стержня, которые у нас будут в прикладной задаче. Условие упругого закрепления на левом конце, ставятся следующим образом:

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0, \quad (11)$$

где  $\alpha$  – называется коэффициентом жесткости закрепления, а  $\theta(t)$  – заданные функции времени  $t$ . Очевидно, что граничные условия, которые мы задавали для одного конца, аналогично могут быть заданы и для другого. Если  $\theta(t)$ ,  $\mu t$ ,  $v(t)$  равны нулю, то задача называется однородной [9]. Для круглой мембраны смешанная задача ставится следующим образом:

$$u|_{r=r_0} = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad u_t|_{t=0} = F(r, \varphi).$$

Так как  $u(r, \varphi, t)$  зависит от полярных координат.

**5. Колебания стержня.** Один конец стержня ( $x = l$ ) закреплен упруго, а к другому ( $x = 0$ ) приложена продольная сила  $F_0 = \text{const}$ , под действием которой стержень находится в состоянии равновесия. Найти колебания стержня после того, как в начальный момент времени сила  $F_0$  мгновенно исчезает, если начальные скорости равны нулю.

**Решение.** Запишем нашу задачу математически, получим смешанную задачу для гиперболического уравнения, с граничными условиями вида (11):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad 0 < t < +\infty, \quad (12)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0 \quad 0 < t < +\infty, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \frac{F_0}{ES}x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (14)$$

Решать будем методом Фурье [7], то есть будем искать  $u(x, t)$  в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (15)$$

подставляя в (12), получаем:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Из книги [8] мы знаем, что такое равенство возможно, если обе части не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. представляют собой одну и ту же постоянную через  $\lambda$ . Тогда из равенства выше получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (16)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (17)$$

Нам нужно получить нетривиальные, т. е. не равные тождественно нулю решения вида (15), удовлетворяющие граничным условиям (13), для этого необходимо найти нетривиальные решения уравнения (17), удовлетворяющие граничным условиям

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \quad (18)$$

из книги [2] мы знаем, что это возможно лишь при  $\lambda > 0$ , тогда имеем общее решение:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Учитывая (18), получим:

$$X'(0) = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + \sqrt{\lambda}C_2 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = \sqrt{\lambda}C_2 = 0,$$

отсюда следует  $C_2 = 0$ , учитывая второе граничное условия получим:

$$-\sqrt{\lambda}C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \sqrt{\lambda} \cdot 0 \cos(\sqrt{\lambda}l) + hC_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + 0 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l) = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + hC_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

т. к. мы должны считать, что  $C_1 \neq 0$ , то получаем:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l) + h \cos(\sqrt{\lambda}l) &= 0, \\ h &= \sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}l), \end{aligned} \quad (19)$$

т. е. учитывая все выше сказанное получаем собственные функции задачи (17)  $X_n(x)$ :

$$X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \quad (20)$$

где  $\sqrt{\lambda_n}$  – являются положительными корнями уравнения (19), для (16) знаем общее решение из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см [1]):

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}at) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}at). \quad (21)$$

Подставим (20) и (21) в (15), получим:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left( A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}at) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}at) \right) \cos(\sqrt{\lambda_n}x),$$

в силу линейности и однородности уравнения (11), любая конечная сумма решений также будет решением.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}at) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}at) \right) \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \quad (22)$$

Это ряд Фурье с помощью книги [4] мы знаем, как находить его коэффициенты. Для начала сами подставим условия (14):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}a \cdot 0) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}a \cdot 0) \right) \cos(\sqrt{\lambda_n}x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) = \frac{F_0}{ES}x, \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\sqrt{\lambda_n}a A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}a \cdot 0) + \sqrt{\lambda_n}a B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}a \cdot 0) \right) \cos(\sqrt{\lambda_n}x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}a B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) = 0. \end{aligned}$$

Из того что записано выше следует, что  $B_n = 0$ , из первого уравнения найдем коэффициент по известной формуле из книги [10] с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[15]:= A_n =
1 / Integrate[Cos[h / (Tan[Sqrt[λ] * l]) * x]^2, {x, 0, l}]
|интегриров... |косинус |тан... |квадратный корень
Integrate[F0 / (ES) * x * Cos[Sqrt[λ] * x], {x, 0, l}] /.
|интегрировать |ко... |квадратный корень
{F0 -> Subscript[F, 0]} /. {λ -> Subscript[λ, n]} //
|с нижним индексом |с нижним индексом
TraditionalForm // TraditionalForm
|традиционная форма |традиционная форма
Out[15]//TraditionalForm=
4 F0 (l sqrt(λn) sin(l sqrt(λn)) + cos(l sqrt(λn)) - 1)
ES λn (tan(l sqrt(λn)) sin(2 h l cot(l sqrt(λn))) / h + 2 l)
```

Рис. 5. Вычисление коэффициента  $A_n$

Используя (19), немного преобразуем ответ, данный программой, получим:

$$A_n = \frac{2F_0}{ESl} \frac{(lh+1) \cos(\sqrt{\lambda_n}l) - 1}{\lambda_n \left( 1 + h \left( \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n}l)}{\sqrt{\lambda_n}l} \right)^2 \right)}.$$

Подставим в (12) и получим окончательный ответ

$$u(x, t) = \frac{2F_0}{ESl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(lh+1) \cos(\sqrt{\lambda_n}l) - 1}{\lambda_n \left( 1 + hl \left( \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n}l)}{\sqrt{\lambda_n}l} \right)^2 \right)} \cos(\sqrt{\lambda_n}x) \cos(\sqrt{\lambda_n}at).$$

**6. Колебания круглой мембраны.** Найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем, предполагая, что начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю [2]. Запишем нашу задачу математически, получим смешанную задачу для гиперболического уравнения, с граничными условиями вида для полярных координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r < l \quad 0 < t < +\infty, \quad (23)$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (24)$$

$$u(r, 0) = A \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \right), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq l. \quad (25)$$

Получили задачу об асимметричных колебаниях круглой мембраны, из книги [9] знаем, что ее решение будет в виде ряда:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + B_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right), \quad (26)$$

где  $\mu_n$  значения в которых функция Бесселя нулевого порядка обращается в ноль. Теперь, чтобы определить чему равны с учетом наших начальных условий коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ , найдем производную  $u_t$ :

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{\mu_n a}{l} \sin \frac{\mu_n at}{l} + B_n \frac{\mu_n a}{l} \cos \frac{\mu_n at}{l} \right) J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right),$$

тогда учитывая (24):

$$\begin{aligned} u_t(r, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{\mu_n a}{l} \sin \frac{\mu_n a \cdot 0}{l} + B_n \frac{\mu_n a}{l} \cos \frac{\mu_n a \cdot 0}{l} \right) J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\mu_n a}{l} J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right) = 0, \end{aligned}$$

так как разложение в ряд по функциям Бесселя единственно и напомним, что  $\mu_n$  это корни функции Бесселя, которых бесконечно много и которые не равны нулю, то очевидно, что у нас выполняется равенство, только при  $B_n = 0 \forall n$ . Тогда учитывая это перепишем уравнение (26), получаем:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\mu_n at}{l} J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right). \quad (27)$$

Теперь подставим в этот ряд второе начальное условие.

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\mu_n a \cdot 0}{l} J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right) = A \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \right).$$

Получили ряд Фурье-Бесселя, который подробно описан в книге [4], найдем коэффициент этого ряда по формуле из этой же книги:

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1(\mu_i)} \int_0^l A \left( 1 - \frac{r}{l^2} r J_0 \left( \frac{\mu_n}{l} r \right) \right) dr,$$

где  $i = n$ , так как функции Бесселя ортогональны с весом  $r$ , посчитаем этот интеграл с помощью Wolfram Mathematica:



```

In[98]:= n = BesselJZero[0, 1];
          [ноль функции Бесселя J]

2 * A / (l ^ 2 * BesselJ[1, n] ^ 2) *
          [функция Бесселя J]

Integrate[(1 - r ^ 2 / l ^ 2) * r * BesselJ[0, n * r / l],
          [интегрировать] [функция Бесселя J]

{r, 0, l}] /. {BesselJZero[0, 1] -> Subscript[μ, i]} //
          [ноль функции Бесселя J] [с нижним индексом]

TraditionalForm
          [традиционная форма]

Out[99]//TraditionalForm=
          4 l^2 J2(μi)
          μi^3 J1(μi)

```

Рис. 6. Вычисление коэффициента  $A_n$  для ряда (25)

Подставив в (25), получим окончательный ответ:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n a t}{l} J_0\left(\frac{\mu_n}{l} r\right).$$

Давайте смоделируем эти колебания в Wolfram Mathematica, с помощью кода:

```

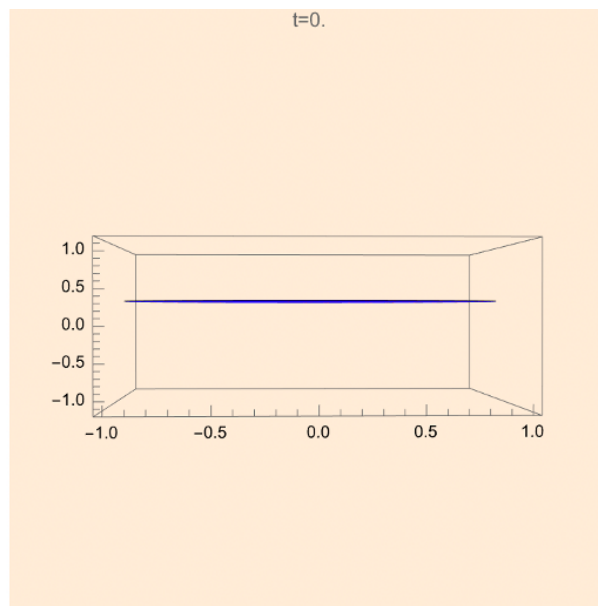
l = 1;
A = 8;
a = 4; (*Задать значение a*)
u[r_, t_] :=
  Sum[(4 * A * BesselJ[2, mu[n]] * Cos[mu[n] / l * a * t] * BesselJ[0, mu[n] * a * t / l]) /
      [сумма] [функция Бесселя J] [косинус] [функция Бесселя J]
      (mu[n] ^ 3 * BesselJ[1, mu[n]]), {n, 1, Infinity}]; (*Ограничение по n*)
      [функция Бесселя J] [бесконечность]
v[r_, t_] = u[r, t] /. {Infinity -> 6} // Activate // N;
      [бесконечность] [активировать] [численное приближение]

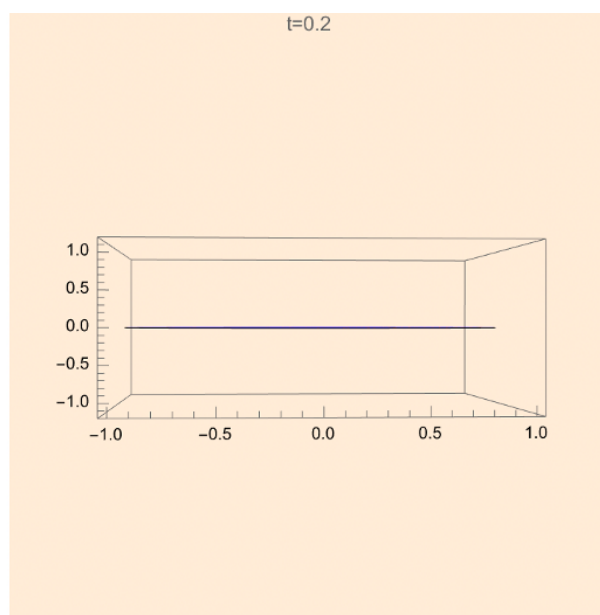
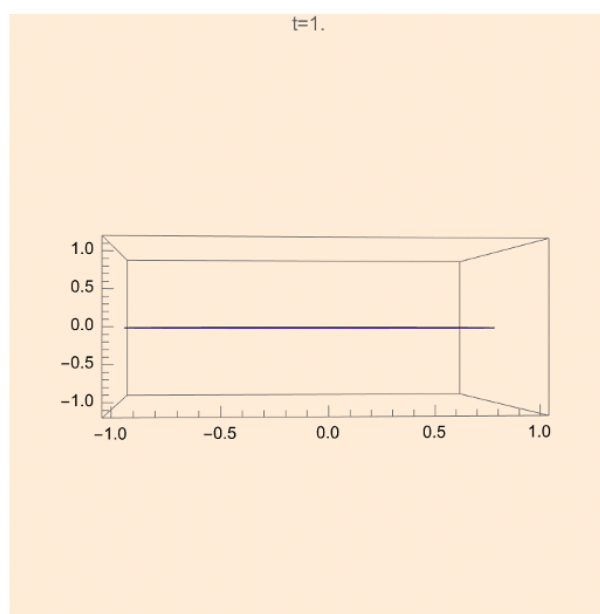
ListAnimate[
  [анимировать список выражений]
  Table[Plot3D[Evaluate[v[r, t] /. {r -> Sqrt[x^2 + y^2]}], {x, y} ∈ Disk[],
      [табл...] [графи...] [вычислить] [квадратный корень] [диск]
      PlotRange -> {-1.2, 1.2}, Ticks -> {Automatic, Automatic, Automatic}, Mesh -> True,
      [отображаемый диапазон графика] [деления] [автоматиче...] [автоматиче...] [автоматический] [сетка] [истина]
      MeshStyle -> {Red, Blue}, PlotStyle -> Yellow,
      [стиль сеточный...] [кра...] [синий] [стиль графика] [жёлтый]
      PlotLabel -> Style[Text["t=" <> ToString[t]], Bold], Boxed -> True, Axes -> {True, False},
      [пометка гра...] [стиль] [текст] [преобразовать в ...] [жирный...] [показать...] [истина] [оси] [истина] [ложь]
      ImageSize -> Medium, AspectRatio -> 1, Background -> Lighter[Orange, 0.85]],
      [размер изоб...] [средний] [аспектное отношение] [фон] [более св...] [оранжевый]
      {t, 0, 2, 0.05}]]

```

Рис. 7. Код для моделирования колебаний мембраны

Результатом выполнения этого кода является анимация колебаний мембраны, ниже представлены скриншоты положения мембраны в различных момент времени:

Рис. 8. Положение мембраны при  $t = 0$

Рис 8. Положение мембраны при  $t = 0.2$ Рис 10. Положение мембраны при  $t = 1$ 

**Заключение.** В статье показана взаимосвязь между смешанной задачей для уравнений гиперболического типа и Wolfram Mathematica. При решении задач методом Фурье необходимо считать коэффициенты ряда, чтобы общее решение удовлетворяло начальным условиям, обычно это очень кропотливая и долгая работа, так как для них даны общие формулы, то было предложено использовать Wolfram Mathematica для их вычисления. В статье приведены конкретные примеры, где показано как используется эта программная система для их вычисления, а также для моделирования результата. Можно обратить внимание, что полностью полагаться на Wolfram Mathematica не стоит, например при подсчете коэффициента для стержня, нам самостоятельно пришлось преобразовывать выданный ответ. Как уже говорилось выше, нам удалось смоделировать результат, что помогает наглядно посмотреть на результат, а также глубже проанализировать его. Итак, подводя итог можно сказать, что было показано как Wolfram Mathematica помогает при решении задач и дает возможность, сосредоточиться на анализе результата.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за неоценимое внимание и поддержку, за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.



### Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. / В. Я. Арсенин. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1984. – 384с.
2. Боголюбов А. Н. Задачи по математической физике / А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов // А. Г. Свешников – Москва: Изд-во МГУ, 1998. – 350с.
3. Боголюбов А. Н. Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов – Москва: Изд-во МГУ, 1993. – 352с.
4. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. Т. I / Г. Н. Ватсон / перевод В. С. Берман – Москва: Издательство Иностранной Литературы, 1949. – 798с.
5. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, А. А. Вашарин, Х. Х. Каримиова, В. П. Михайлов, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин // В. С. Владимиров – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288с.
6. Кафтanova Ю. В. Специальные функции математической физики / Ю. В. Кафтanova. – Харьков: Новое слово, 2009. – 596с.
7. Лихтин В. В., Сюй А. В. Нестационарные уравнения математической физики. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО "КНАГТУ 2012. – 93 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов – Москва: Наука, 1977. – 734с.
9. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Москва: Наука, 1964. – 206с.
10. Стехина К. Н. Решение дифференциальных уравнений в пакете Mathematica. Часть 1. Уравнения первого порядка и их приложения: учебное пособие / К. Н. Стехина, Д. Н. Тумаков. – Казань, 2014. – 116 с.

Поступила в редакцию 21.01.2025

---

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Токарев Денис Алексеевич** – магистрант 1-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

### РУКОВОДИТЕЛЬ

**Чернова Ольга Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

[Chernova\\_Olga@bsuedu.ru](mailto:Chernova_Olga@bsuedu.ru)

[К содержанию](#)