Студенческий журнал по математике и её приложениям, 2025, Том 4, № 1. С. 4–9.

Методы решения дифференицальных уравнений гидродинамики

Пронин Г. О.
1377101@bsuedu.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются основные методы решения уравнений гидродинамики, которые являются ключевыми для изучения движения жидкостей и газов. Основное внимание уделяется как аналитическим, так и численным подходам, включая методы конечных разностей, конечных элементов и спектральные методы. В исследовании представлены примеры применения различных методов на конкретных задачах, таких как течения в трубопроводах и динамика атмосферных процессов.

Ключевые слова: метод разделения переменных, метод характеристик, краевая задача, граничное условие, интегральное преобразование

Для цитирования: Пронин Г. О. 2025. Методы решения дифференицальных уравнений гидродинамики. *Студенческий журнал по математике и её приложениям*, 4(1): 4–9.

---

1. Введение. Гидродинамика играет ключевую роль в описании и моделировании разнообразных природных и технических процессов. Уравнения гидродинамики используются для анализа и прогнозирования поведения жидкостей и газов в таких областях, как океанология, метеорология, аэродинамика, проектирование инженерных сооружений, авиа- и судостроение, а также в процессах промышленного производства. В условиях развития вычислительной техники и методов численного моделирования задачи гидродинамики становятся всё более сложными и требуют эффективных методов решения.

2. Необходимые сведения.

Определение 2.1. Метод разделения переменных

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — искомая функция, зависящая от переменных x и t, а k — константа. Мы предполагаем, что решение можно записать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{2}$$

где $X(x)$ — функция, зависящая только от x, а $T(t)$ — функция, зависящая только от t.

Суть метода разделения переменных состоит в представлении решения уравнения в виде произведения функций, зависящих от различных переменных.

Процесс разделения переменных: требуется найти представление в виде произведения функций [2]. Подставим $u(x,t) = X(x)T(t)$ в исходное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(X(x)T(t)\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)T(t)\right).$$

После взятия производных имеем:

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} = kT(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}.$$

Теперь разделим обе стороны уравнения на $X(x)T(t)$:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = k\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}.$$

Заметим, что левая часть уравнения зависит только от t, а правая — только от x. Таким образом, обе стороны должны быть равны некоторой постоянной, которую обозначим через $-\lambda$:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda, \quad k\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda.$$

Решение для $T(t)$: рассмотрим сначала уравнение для $T(t)$:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид $T(t) = Ce^{-\lambda t}$, где C – константа интегрирования.

Решение для $X(x)$: теперь рассмотрим уравнение для $X(x)$:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{\lambda}{k}X(x).$$

Это уравнение второго порядка имеет решения в зависимости от знака λ:

- Если $\lambda > 0$, то $X(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right)$.
- Если $\lambda = 0$, то $X(x) = Ax + B$.
- Если $\lambda < 0$, то $X(x) = Ae^{\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x}$.

2. Численные методы решения дифференциальных уравнений гидродинамики. Представляют собой набор алгоритмов и техник, используемых для приближенного решения уравнений, описывающих движение жидкостей и газов. Эти уравнения, как правило, являются сложными и нелинейными, и их аналитическое решение может быть трудным или вовсе невозможным [4].

Метод конечных разностей используется для аппроксимации производных функций с помощью конечных разностей. Этот метод особенно полезен при решении уравнений в частных производных, где непрерывные функции заменяются сеточными значениями. Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности в одномерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Аппроксимируем производные по времени и пространству с помощью конечных разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Подставляя эти аппроксимации в исходное уравнение, получаем

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Это уравнение позволяет найти значения u в будущий момент времени, зная начальные условия и значения в предыдущий момент времени. Метод конечных разностей применяется к различным типам задач, включая моделирование потоков и теплопередачи.

Метод Рунге – Кутты является мощным и популярным методом численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее распространённая версия – метод Рунге – Кутты четвертого порядка, который обеспечивает высокую точность при разумных вычислительных затратах. Пусть у нас есть уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Тогда значения функции y на следующем шаге $x_{n+1} = x_n + h$ вычисляются по формуле:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \tag{5}$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \tag{6}$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \tag{7}$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \tag{8}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \tag{9}$$

Метод Рунге – Кутты часто используется в задачах, где требуется высокая точность, и может быть применён для решения как обыкновенных, так и систем дифференциальных уравнений.

Метод конечных элементов– является численным методом, который используется для решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Основная идея МКЭ состоит в разбиении области на конечные элементы и построении аппроксимированного решения на каждом элементе. Этот метод широко применяется в инженерных и физических задачах, таких как моделирование деформаций, теплопередачи и течения жидкости.

Рассмотрим простое уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Область решения делится на сетку конечных элементов, и на каждом элементе ищется приближенное решение, которое затем объединяется для получения общего решения. Метод конечных элементов позволяет решать сложные задачи, адаптируясь к геометрическим особенностям области и типу граничных условий.

3. Метод интегральных преобразований. Данный метод является мощным инструментом для решения дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных, часто встречающихся в задачах математической физики и гидродинамики. Метод заключается в применении преобразования функции из одного пространства (например, временного или пространственного) в другое (чаще всего комплексное), где дифференциальное уравнение становится более простым для анализа и решения. Наиболее распространенные интегральные преобразования включают преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

Пусть у нас есть функция $f(x)$, и мы хотим найти её образ $F(k)$ при помощи преобразования, например, Фурье:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{11}$$

Обратное преобразование восстанавливает исходную функцию:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,dk. \tag{12}$$

Преобразование Фурье и Лапласа позволяют свести уравнение в частных производных к алгебраическому уравнению, которое легче решать. После решения в преобразованной области результат возвращается в исходное пространство с помощью обратного преобразования.

Преобразование Лапласа используется для функций, определённых на положительной полуоси, и задается формулой:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt, \tag{13}$$

где s — комплексное переменное. Обратное преобразование Лапласа позволяет найти исходную функцию:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}\,ds, \tag{14}$$

где интеграл берется по линии $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ в комплексной плоскости.

Преобразование Лапласа часто используется для решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы, происходящие во времени, таких как распространение волн или процессов диффузии.

4. Применение методов решения дифференциальных уравнений в задачах гидродинамики. Дифференциальные уравнения играют важнейшую роль в описании и моделировании гидродинамических процессов [8], таких как течение жидкости, распространение волн, турбулентные потоки и другие. Методы решения дифференциальных уравнений позволяют находить приближённые или точные решения для таких задач и служат основой для анализа поведения жидкостей в различных условиях.

Задача течения жидкости является одной из фундаментальных задач гидродинамики и описывается системой уравнений Навье – Стокса. Эти уравнения представляют собой нелинейные уравнения [1] в частных производных второго порядка и описывают закон сохранения массы, импульса и энергии для движущейся жидкости. Задача течения жидкости включает нахождение полей скорости и давления в зависимости от начальных и граничных условий.

Уравнения Навье – Стокса. Основными уравнениями, описывающими течение вязкой несжимаемой жидкости, являются уравнения Навье – Стокса. Для трёхмерного случая уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{15}$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости жидкости, p – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{f}$ – внешняя сила, действующая на жидкость. Также справедливо уравнение неразрывности, обеспечивающее сохранение массы:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{16}$$

Уравнения Навье – Стокса трудно решить аналитически из-за их нелинейной природы. Поэтому для их решения часто используются численные методы, такие как метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Метод конечных разностей для задачи течения жидкости. Для решения уравнений Навье – Стокса методом конечных разностей область течения разбивается на сетку, и производные аппроксимируются разностными операторами. Рассмотрим аппроксимацию для уравнения неразрывности и уравнения для компоненты скорости u в двумерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{18}$$

С помощью конечных разностей производные заменяются дискретными значениями, что позволяет преобразовать уравнения в систему алгебраических уравнений, решаемых численно. Для повышения точности могут применяться схемы второго порядка или схемы, устойчивые к численным возмущениям.

Метод конечных элементов (МКЭ) для задачи течения жидкости. МКЭ также широко используется для решения уравнений Навье – Стокса, особенно для сложных геометрических областей. При использовании МКЭ область течения делится на конечные элементы, и на каждом элементе функция скорости аппроксимируется с помощью базисных функций.

Рассмотрим область Ω, разбитую на элементы. Введение функции проб ϕ_i позволяет записать приближённое решение скорости в виде

$$\mathbf{u} \approx \sum_i \mathbf{u}_i \phi_i. \tag{19}$$

После подстановки в уравнения Навье – Стокса и применения метода Галёркина, задача сводится к решению системы алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов $\mathbf{u}_i$. Метод конечных элементов является мощным инструментом для моделирования течений с произвольной геометрией и сложными граничными условиями.

Численное моделирование течения жидкости методом Рунге – Кутты. Для решения задачи течения жидкости по времени может использоваться метод Рунге – Кутты для интегрирования системы уравнений Навье – Стокса. В рамках этого подхода дифференциальные уравнения решаются пошагово, где на каждом шаге по времени вычисляется новое значение полей скорости и давления.

Пусть на каждом временном шаге n имеем значение скорости $\mathbf{u}^n$ и давления p^n. Тогда метод Рунге – Кутты второго порядка можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2}\left(-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nu\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p\right), \tag{20}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t\left(-(\mathbf{u}^{n+1/2}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n+1/2} + \nu\Delta\mathbf{u}^{n+1/2} - \frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1/2}\right). \tag{21}$$

Этот метод позволяет получать стабильные и точные результаты для решения задачи течения жидкости с высокими временными разрешениями.

Задача ударной волны описывает распространение сильных возмущений в среде, которые приводят к резкому скачку давления, плотности и температуры. Ударные волны возникают при взрывах, движении объектов со сверхзвуковой скоростью и в других условиях, связанных с высокими скоростями и давлениями. Математически задача ударной волны описывается гиперболическими уравнениями, среди которых основное место занимают уравнения газовой динамики.

Уравнения Эйлера. Для описания ударной волны в невязкой среде используются уравнения Эйлера, которые записываются в консервативной форме как система уравнений для плотности ρ, скорости $\mathbf{u}$ и энергии E:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot((E+p)\mathbf{u}) = 0. \tag{24}$$

Здесь p — давление, а полная энергия E определяется как

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2, \tag{25}$$

где γ – показатель адиабаты. Уравнения Эйлера описывают сохранение массы, импульса и энергии в среде, и позволяют моделировать распространение ударных волн.

Численные методы для задачи ударной волны. Из-за разрывных решений, возникающих при ударных волнах, для их моделирования часто применяются специальные численные методы, устойчивые к разрывам. Среди таких методов выделяются схемы высокого порядка, такие как метод ТВД (Total Variation Diminishing), метод Годунова и метод Лакса – Вендроффа.

Метод Годунова. Применяется для решения задач с разрывными решениями, таких как задача ударной волны. Этот метод основан на решении локальных задач распада разрыва и позволяет получать устойчивые результаты для гиперболических уравнений. Пусть исходная задача аппроксимируется сеточной функцией u_i^n, тогда на каждом временном шаге решается задача распада разрыва между соседними ячейками. Это обеспечивает корректное моделирование скачков плотности и давления, характерных для ударных волн.

Метод Лакса – Вендроффа. Является вторым популярным методом для моделирования задач с ударными волнами. Он представляет собой двухшаговую схему, где на первом шаге вычисляется промежуточное значение функции, а на втором — корректируются значения на основе численного потока:

$$u_i^{n+1/2} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)), \tag{26}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u_{i+1}^{n+1/2}) - f(u_i^{n+1/2})). \tag{27}$$

Этот метод позволяет эффективно аппроксимировать решение вблизи ударных фронтов, обеспечивая стабильные результаты.

Метод характеристик для анализа ударных волн также может применяться для анализа ударных волн, особенно при анализе поведения волн на интерфейсе различных сред. Этот метод позволяет исследовать распространение разрывов и скачков, определяя траектории характеристик, по которым распространяются изменения в системе. В уравнениях Эйлера для одномерного случая характеристики определяются как

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c, \tag{28}$$

где c – скорость звука. Этот подход позволяет точно определить распространение ударных волн в простых случаях и используется в задачах газовой динамики для анализа устойчивости волн и взаимодействия с границами.

Кавитация и турбулентность. Это два сложных явления, часто встречающихся в гидродинамике. Кавитация возникает при резком снижении давления в потоке жидкости, что приводит к образованию пузырьков пара, которые затем схлопываются, вызывая ударные волны. Турбулентность, в свою очередь, характеризуется хаотичным и неустойчивым движением жидкости, сопровождаемым каскадом вихрей и повышенной скоростью обмена массой и энергией. Оба явления описываются нелинейными уравнениями и требуют применения специальных методов для их анализа и моделирования.

Уравнения для кавитации. Для моделирования кавитации используются уравнения Навье – Стокса, дополненные моделью кавитационного пузырька. Классическая модель Рэлея – Плессета описывает динамику одиночного пузырька в жидкости. Уравнение Рэлея – Плессета имеет вид:

$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\rho}\left(p_\infty - p_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right), \tag{29}$$

где R – радиус пузырька, p_∞ – давление в бесконечности, p_v — давление пара внутри пузырька, σ – поверхностное натяжение, μ – вязкость жидкости. Это уравнение описывает радиальные колебания пузырька, а его решение позволяет оценить воздействие кавитации на жидкость.

Численное моделирование для задачи кавитации. Для численного моделирования кавитации широко применяются методы, такие как метод конечных объемов (МКО) и метод крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation), которые позволяют моделировать взаимодействие пузырьков в потоке. МКО разбивает область на ячейки, что позволяет локально рассчитывать изменение давления и других параметров. Для моделирования турбулентности при кавитации используют LES, поскольку он эффективно улавливает крупные вихри и дает точное представление о турбулентной структуре потока в условиях кавитации.

Уравнения для турбулентности. Турбулентность описывается уравнениями Навье – Стокса, однако для описания турбулентных потоков на практике используется их усреднённая версия – уравнения Рейнольдса. Усреднение по Рейнольдсу приводит к появлению дополнительных членовых тензоров напряжений, известных как турбулентные напряжения:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}, \tag{30}$$

где $\overline{u_i}$ – усреднённая скорость, $\overline{p}$ – усреднённое давление, а $\overline{u_i' u_j'}$ – корреляция скоростей, описывающая турбулентные напряжения. Для закрытия этой системы уравнений применяются модели турбулентности, такие как модель k-ε и модель k-ω.

Модели турбулентности: k-ε и k-ω. Модель k-ε является одной из самых распространённых моделей турбулентности и основывается на решении двух уравнений для турбулентной кинетической энергии k и скорости её диссипации ε:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + P_k - \varepsilon, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + C_1\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_2\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{32}$$

где ν_t – турбулентная вязкость, P_k – производство турбулентной энергии. Модель k-ε используется для моделирования турбулентных потоков, особенно при высокой скорости и высокой вязкости. Модель k-ω также является популярной и включает уравнения для кинетической энергии турбулентности k и специфической скорости диссипации ω. Эта модель лучше подходит для моделирования турбулентности вблизи стенок и для потоков с сильным градиентом скорости.

Заключение. Таким образом, в данной работе были рассмотрены основные методы решения дифференциальных уравнений, применяемых в гидродинамике. Обсуждены ключевые понятия, такие как уравнения Навье – Стокса , а также представлены формулировки задач, связанных с движением жидкости. В частности, был подробно рассмотрен метод разделения переменных при решении задач о течении идеальной жидкости в различных геометрических областях. Также были проанализированы численные методы, включая метод конечных разностей и метод конечных элементов, которые позволяют эффективно решать сложные гидродинамические задачи.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Черновой Ольге Викторовне за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др. 1964. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 368.
2. Пискунов Н. С. 1985. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 560.
3. Попов А. И., Попов И. Ю. 2020. Основные уравнения математической физики. СПБ.: Университет ИТМО, 200.
4. Холодова С. Е., Перегудин С. И. 2020. Дополнительные разделы высшей математики. СПБ.: Университет ИТМО, 89.

Поступила в редакцию 13.01.2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пронин Григорий Олегович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsuedu.ru

К содержанию