

Метод сеток (разностные схемы) для уравнений математической физики

Щеблыкин Д. Е.
1469417@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается применение метода конечных разностей для численного решения задачи о нестационарном распределении температуры в двухмерной области. Исследуется решение уравнения теплопроводности при различных граничных условиях. Изучаются вопросы об аппроксимации дифференциальной задачи разностной, устойчивости, сходимости и консервативности разностных схем.

Ключевые слова: аппроксимация, граничные условия, консервативность, начальные условия, математическое моделирование, метод конечных разностей, сходимость, уравнение теплопроводности, устойчивость, численное решение

Для цитирования: Щеблыкин Д. Е. 2024. Метод сеток (разностные схемы) для уравнений математической физики. Студенческий математический журнал, 2: 99–111.

1. Введение. Современные технологии и научные исследования требуют всё более точного и детального моделирования различных процессов и явлений. Одной из важнейших задач является решение дифференциальных уравнений, описывающих теплообмен, динамику жидкостей, распространение электромагнитных волн и многие другие процессы. Одним из фундаментальных численных методов, применяемых для решения таких уравнений является метод сеток, или как его еще называют метод конечных разностей. Этот метод широко используется в науке и технике благодаря своей универсальности и относительной простоте реализации. В условиях современных вычислительных возможностей, метод конечных разностей позволяет получать достаточно точные решения задач, которые трудно или невозможно решить аналитически.

Одним из ключевых преимуществ метода конечных разностей является его простота и наглядность. Метод позволяет легко дискретизировать область исследования и преобразовать дифференциальные уравнения в систему линейных уравнений, что значительно упрощает процесс их решения с помощью специальных алгоритмов. Кроме того, метод конечных разностей хорошо адаптируется к различным типам граничных условий и может применяться для решения задач в областях со сложной геометрией.

При сравнительно простой программной реализации метод конечных разностей, благодаря своей гибкости и возможности адаптации к различным типам задач, остается актуальным инструментом в арсенале инженеров и ученых.

2. Сетки и сеточные функции. Пусть у нас имеется следующая задача с дифференциальным уравнением в многомерной области и некоторым граничным условием:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ Ku(x) = \varphi(x), & x \in \bar{D} \end{cases}, \quad (1)$$

где \bar{D} – граница области D , L – дифференциальный оператор, K – оператор граничных (дополнительных или начальных) условий.

Для простоты будем рассматривать прямоугольную область D [5]. Разобьем эту область равномерной прямоугольной координатной сеткой w с шагом $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Для такой сетки шаг изменения координаты x_m ($m = 1, 2, \dots, n$) постоянен и равен h_m . Следует отметить, что по разным направлениям движения величина шага h_m может быть разной. Узлы такой сетки обозначим как x^h , совокупность таких точек x^h , внутри рассматриваемой области D , обозначим как w^h , а множество точек $x^h \in \bar{D}$ обозначим за γ^h . Помимо этого, введем еще некоторые обозначения: $f(x^h) = f^h$, $\varphi(x^h) = \varphi^h$.

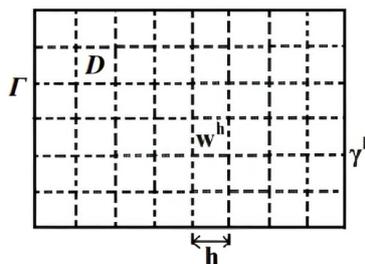


Рис. 1. Равномерная сетка на области D

Вместе с решением $u(x)$ задачи (1), которое является дифференцируемой функцией [3], мы рассматриваем функцию v^h как набор значений v_i в узлах сетки. Функция, значения которой определяются в узлах сетки, называется сеточной функцией [4].

В соответствие дифференциальному оператору L ставиться разностный оператор L_h . Например, оператору $Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$ в точке x_i будет соответствовать разностный оператор

$$L_h v = \frac{v_{i+1} - v_i}{h},$$

а оператору $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в соответствие будет ставиться разностный оператор

$$L_h v = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Итак, имеется дифференциальная задача, ей в соответствие ставится разностная задача для сеточной функции v^h , тогда система уравнений (1) для v^h будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} L_h v^h = f^h, & x^h \in w^h \\ K_h v^h = \varphi^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases} \quad (2)$$

Такую систему алгебраических уравнений называют разностной схемой [5].

3. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной. Пусть у нас имеется дифференциальный оператор L и соответствующий ему разностный оператор L_h . Поскольку оператор L не может действовать на v , т. к. v – набор чисел, оценим их разность, действующую на функцию u в узлах сетки, по норме, соответствующей норме равномерного приближения ($\|v^h\| = \max_i |v_i|$) [4].

Определение 1.1. Будем говорить, что разностный оператор L_h приближает дифференциальный оператор L с порядком точности k [11], если

$$\|Lu^h - L_h u^h\| \leq Ch^k,$$

где постоянная C может зависеть от выбора u , но не зависит от выбора h .

Рассмотрим первое разностное соотношение в окрестности некоторой узловой точки, $Lu_i = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i)$ и $L_h u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$, u – функция дифференцируемая, предполагая, что u обладает достаточной гладкостью, представим u_{i+1} в виде разложения в ряд Тейлора [2]:

$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + u''(x^*) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2},$$

тогда

$$\|Lu_i - L_h u_i\| = \|u'(x_i) - u'(x_i) - u''(x^*) \frac{h}{2}\| = \|u''(x^*) \frac{h}{2}\| \leq Ch,$$

$$C = \max_i \left| \frac{u''}{2} \right|.$$

В конечном итоге имеем, что первое разностное соотношение аппроксимирует первую производную с порядком точности $k = 1$. Аналогичным образом можно показать, что второе разностное соотношение аппроксимирует вторую производную с порядком точности $k = 2$ [3].

Зная, что задача (2) разрешима, и ввиду единственности ее решения, можно заключить, что равенство $L_h v^h = f^h$ будет точно выполнено. Такая ситуация является идеальной с точки зрения сходимости. На практике же систему разностных уравнений трудно построить так, чтобы $L_h v^h$ ей точно удовлетворял.

Если подставит решение задачи u из (1) в разностное соотношение (2), то окажется, что эти соотношения выполняются неточно:

$$\begin{cases} L_h u^h = f^h + \varepsilon^h, & x^h \in w^h \\ K_h u^h = \varphi^h + \varepsilon^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases} \quad ,$$

поскольку действие оператора L на u и L_h на u дают разный результат появляется величина ε^h называемая невязкой [8]. Аналогично и для граничного оператора.

Определение 1.2. Разностная схема (2) аппроксимирует [10] дифференциальную задачу (1) с порядком точности k , если справедлива следующая оценка:

$$\|\varepsilon^h\| \leq Ch^k, \quad (3)$$

где C не зависит от выбора шага h .

Легко заметить, что если дифференциальный оператор L аппроксимирует разностный L_h с точностью порядка k , то и разностная задача (2) аппроксимирует дифференциальную (1) с тем же порядком точности.

4. Устойчивость и сходимость разностных схем. Рассмотрим решение v^h задачи (2) в случае когда правая часть несколько изменена [10], а именно:

$$\begin{cases} L_h z^h = f^h + \delta^h, & x^h \in w^h \\ K_h z^h = \varphi^h + \eta^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases} \quad ,$$

где z^h – решение такой же задачи при измененной правой части с некоторой невязкой.

Определение 1.3. Разностная схема называется устойчивой [1], если существуют числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что для любых δ^h и η^h будет выполняться следующие условие:

$$\|z^h - v^h\| \leq C_1 \|\delta^h\| + C_2 \|\eta^h\|. \quad (4)$$

В частности, это неравенство означает, что малая невязка правой части вызывает равномерно малую, относительно h , невязку решения.

Возьмем нулевое решение, положим $f = \varphi = v^h = 0$, тогда разностная схема примет следующий вид:

$$\begin{cases} L_h z^h = \delta^h, & x^h \in w^h \\ K_h z^h = \eta^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases},$$

и тогда, условие устойчивости можно записать как

$$\|z^h\| \leq C_1 \|\delta^h\| + C_2 \|\eta^h\|.$$

Устойчивость разностной схемы можно, в таком случае, воспринимать следующим образом: если мы возьмем разностную схему с малыми возмущениями и с малыми функциями в правой части, и решение будет удовлетворять оценке (3), то схема является устойчивой [10].

Определение 1.4. Решение v^h разностной задачи (2) при измельчении шага сетки сходится к решению u^h дифференциальной задачи (1) с порядком точности k , если мера отклонения [7] этих функций друг от друга стремится к нулю, т. е.

$$\|u^h - v^h\| \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

и выполняется неравенство

$$\|u^h - v^h\| \leq Ch^k,$$

где $C > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h .

Вопрос проверки сходимости разбивается на два более простых вопроса [7]:

- 1) проверка аппроксимации;
- 2) проверка устойчивости.

5. Связь между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. Взаимосвязь между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью устанавливается с помощью теоремы Лакса [6], сформулируем и докажем эту теорему.

Теорема 1.1. Допустим, что разностная схема $L_h v^h = f^h$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ с некоторым порядком точности h^k и эта схема устойчива, тогда решение v^h разностной задачи $L_h v^h = f^h$ сходится к решению задачи u^h , при этом справедлива следующая оценка:

$$\|u^h - v^h\| \leq (C \cdot (C_1 + C_2))h^k, \quad (5)$$

где C , C_1 и C_2 константы, входящие в оценки (3) и (4).

Доказательство. Полагаем, $\delta^h + \eta^h \equiv \varepsilon f^h$, а $u^h \equiv z^h$, тогда оценка (5) может быть переписана в следующем виде:

$$\|z^h - v^h\| \leq (C_1 + C_2) \|\varepsilon f^h\|.$$

Учитывая оценку (3), сразу получаем требуемое неравенство (5).

Теорема доказана.

Сходимость является внутренней характеристикой самой разностной схемы и никак не зависит от исходной дифференциальной задачи.

6. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу теплопроводности на отрезке $0 \leq x \leq 1$ [8]:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(1, t) = \mu_2(t) \end{cases}.$$

Будем рассматривать как изменяется решение в течение временного периода $0 \leq t \leq T$. Введем в рассматриваемой области равномерную разностную сетку с некоторым шагом h по пространственной координате x и с шагом τ по временной координате t , такую что

$$w^h = \{x_m = hm; m = 0, 1, 2, \dots, N_x; hN_x = 1\},$$

$$w^\tau = \{t_n = \tau n; n = 0, 1, 2, \dots, N_t; \tau N_t = T\}.$$

Обозначим сопоставление значения сеточной функции в узле с координатами (x_m, t_n) , соответствующие $u(x_m, t_n)$, символом $v_{m, n}$. Тогда разностный аналог производной $u_t(x_m, t_n)$ будет выглядеть следующим образом:

$$v_t = \frac{v_{m, n+1} - v_{m, n}}{\tau},$$

второе разностное соотношение $u_{xx}(x_m, t_n)$ в той же точке примет следующий вид:

$$\Delta v = \frac{v_{m+1, n} - 2v_{m, n} + v_{m-1, n}}{h^2}.$$

При составлении разностной схемы для задачи (1) перед нами встает выбор брать Δv на n -ом слое по времени или же на $(n+1)$ -ом слое [11]. В случае выбора слоя n получаем, так называемую явную разностную схему, а в случае выбора слоя $(n+1)$ – неявную разностную схему. Для облегчения записи значения, относящиеся к $(n+1)$ -ому временному слою, помечают «галочкой» сверху, например, \hat{v} или \hat{u} , а значения, относящиеся к n -ому слою, соответственно, без «галочки».

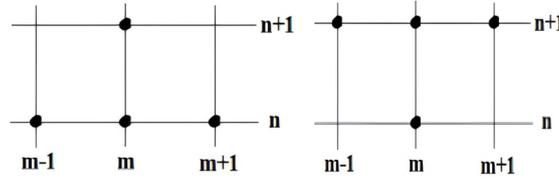


Рис. 2. Шаблоны явной (слева) и неявной (справа) разностных схем

Узлы, в которых используется сеточная функция при написании разностного соотношения, называются шаблоном [3].

Тогда для явной разностной схемы получим уравнение

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2} + f_{m, n}, \quad (6)$$

начальные и граничные условия примут следующий вид:

$$v_{m, 0} = \varphi_m,$$

$$v_{0, n} = \mu_{1, n},$$

$$v_{N_x, n} = \mu_{2, n}.$$

Для неявной разностной схемы получим уравнение

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{\hat{v}_{m+1} - 2\hat{v}_m + \hat{v}_{m-1}}{h^2} + f_{m, n}. \quad (7)$$

7. Необходимые условия устойчивости решения задачи теплопроводности. Исследуем необходимые условия устойчивости для явной разностной схемы [3]. Для их нахождения будем использовать спектральный метод Неймана. Рассмотрим явную схему однородной задачи при $f = 0$ с начальными условиями в виде гармоника некоторой частоты:

$$\begin{cases} \frac{v_{m, n+1} - v_{m, n}}{\tau} = \frac{v_{m+1, n} - 2v_{m, n} + v_{m-1, n}}{h^2} \\ v_{m, 0} = e^{i\omega m} \end{cases}. \quad (8)$$

Для того чтобы решение было устойчиво, и малые значения начальных условия не приводили к большим возмущениям, необходимо, чтобы решение при переходе от слоя к слою не нарастало по модулю. Поэтому будем искать решение задачи (8) в виде $v_{m, n} = \lambda^n e^{i\omega m}$, где λ – некоторое число, подлежащее определению. Устойчивость будет обеспечена, если $|\lambda| \leq 1$ для любых ω . Проверим выполнено ли такое условие для явной схемы.

Подставим $v_{m, n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в (8) и, сократив на $v_{m, n}$, получим

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega m} - \lambda^n e^{i\omega m}}{\tau \cdot \lambda^n e^{i\omega m}} = \frac{\lambda^n e^{i\omega m} \cdot e^{i\omega} - 2 \cdot \lambda^n e^{i\omega m} + \lambda^n e^{i\omega m} \cdot e^{-i\omega}}{h^2 \cdot \lambda^n e^{i\omega m}},$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}.$$

Зная, что $e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2 \cos \omega$ и $-2 + 2 \cos \omega = -2(2 \sin^2 \frac{\omega}{2})$, получаем

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Отвечая на вопрос, всегда ли $|\lambda|$ будет меньше либо равен 1, заключаем, что условие устойчивости выполняется для любых ω в том случае, если $\frac{4\tau}{h^2} \leq 1$ или $\tau \leq \frac{h^2}{4}$. Следовательно, для обеспечения устойчивости явной разностной схемы требуется выполнение определенного условия относительно соотношения шагов τ и h , такая устойчивость называется условной.

Теперь рассмотрим неявную разностную схему для той же задачи:

$$\begin{cases} \frac{v_{m, n+1} - v_{m, n}}{\tau} = \frac{v_{m+1, n+1} - 2v_{m, n+1} + v_{m-1, n+1}}{h^2} \\ v_{m, 0} = e^{i\omega m} \end{cases}. \quad (9)$$

Аналогично преобразованиям явной схемы, подставим $v_{m, n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в (9) и, сократив на $v_{m, n+1}$, получим

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega m} - \lambda^n e^{i\omega m}}{\tau \cdot \lambda^{n+1} e^{i\omega m}} = \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega m} \cdot e^{i\omega} - 2 \cdot \lambda^{n+1} e^{i\omega m} + \lambda^{n+1} e^{i\omega m} \cdot e^{-i\omega}}{h^2 \cdot \lambda^{n+1} e^{i\omega m}},$$

$$1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}},$$

в таком случае $|\lambda|$ всегда меньше либо равен единицы, т. к. $1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} \geq 1$. Поэтому неявная схема будет устойчивой независимо от соотношения шагов. Такая схема называется абсолютно устойчивой.

8. Достаточные условия устойчивости решения задачи теплопроводности. Рассмотрим задачу на бесконечном участке по x для явной разностной схемы:

$$\begin{cases} \frac{v_{m, n+1} - v_{m, n}}{\tau} = \frac{v_{m+1, n} - 2v_{m, n} + v_{m-1, n}}{h^2} + f_{m, n} \\ v_{m, 0} = \varphi_m \end{cases} \quad (10)$$

Необходимо доказать, что решение (10) удовлетворяет следующей оценке:

$$\|v^h\| \leq C_1 \|f^h\| + C_2 \|\varphi^h\|.$$

Перепишем уравнение (10), при условии, что выполняется необходимое требование устойчивости и $\tau \leq \frac{h^2}{2}$:

$$\begin{aligned} v_{m, n+1} - v_{m, n} &= \frac{\tau}{h^2} v_{m+1, n} - \frac{\tau}{h^2} 2v_{m, n} + \frac{\tau}{h^2} v_{m-1, n} + \tau f_{m, n}, \\ v_{m, n+1} &= \frac{\tau}{h^2} v_{m+1, n} - v_{m, n} (2\frac{\tau}{h^2} - 1) + \frac{\tau}{h^2} v_{m-1, n} + \tau f_{m, n}. \end{aligned}$$

Следующим шагом мажорируем правую часть

$$|v_{m, n+1}| \leq \frac{\tau}{h^2} \|v_n\| + (1 - 2\frac{\tau}{h^2}) \|v_n\| + \frac{\tau}{h^2} \|v_n\| + \tau \|f\| = \|v_n\| + \tau \|f\|,$$

где $\|v_n\| = \max_m |v_{m, n}|$. Тогда, $\|v_{n+1}\| \leq \|v_n\| + \tau \|f\|$. Из начальных условий известно, что $\|v_0\| = \|\varphi\|$, совершая индуктивный переход, получаем

$$\|v_{n+1}\| \leq \|\varphi\| + n\tau \|f\|.$$

По построению равномерной сетки $\tau = \frac{T}{N_t}$, откуда следует, что $n\tau \|f\| \leq T \|f\|$, стало быть справедлива следующая оценка:

$$\|v_{n+1}\| \leq \|\varphi\| + T \|f\|.$$

Из чего можно заключить, что схема является устойчивой и условие $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ будет как необходимым, так и достаточным условием устойчивости рассматриваемой нами явной схемы [3].

Для уравнения вида $u_t = a^2 u_{xx} + f$ условие устойчивости явной разностной схемы имело бы вид $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ [11].

Рассмотрим такую же задачу для неявной разностной схемы:

$$\begin{cases} \frac{v_{m, n+1} - v_{m, n}}{\tau} = \frac{v_{m+1, n+1} - 2v_{m, n+1} + v_{m-1, n+1}}{h^2} + f_{m, n} \\ v_{m, 0} = \varphi_m \end{cases} \quad (11)$$

Преобразуем

$$v_{m, n+1} = v_{m, n} + \frac{\tau}{h^2} (v_{m+1, n+1} - 2v_{m, n+1} + v_{m-1, n+1}) + \tau f_{m, n}.$$

Возьмем некоторую точку $m = m_0$ на $(n+1)$ -ом временном слое, в которой $v_{m, n+1}$ достигает своего максимального значения, т. е. $v_{m_0, n+1} \geq v_{m, n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} v_{m_0+1, n+1} - 2v_{m_0, n+1} + v_{m_0-1, n+1} &\leq 0, \\ v_{m, n+1} &\leq v_{m_0, n+1} = v_{m_0, n} + \frac{\tau}{h^2} (v_{m_0+1, n+1} - 2v_{m_0, n+1} + v_{m_0-1, n+1}) + \tau f_{m_0, n}, \\ v_{m_0, n+1} &\leq v_{m_0, n} + \tau f_{m_0, n}, \end{aligned}$$

мажорируем правую часть

$$v_{m_0, n+1} \leq \|v_n\| + \tau \|f\|,$$

в конечном итоге получаем следующие неравенство:

$$v_{m, n+1} \leq \|v_n\| + \tau \|f\|.$$

Аналогично доказывается, что $v_{m, n+1} \geq -\|v_n\| - \tau \|f\|$, откуда следует, что $\|v_{n+1}\| = \max_m |v_{m, n+1}| \leq \|v_n\| + \tau \|f\|$, и наконец, $\|v\| \leq \|\varphi\| + T \|f\|$, это равносильно безусловной устойчивости неявной схемы.

Итак, доказали, что неявная схема является безусловно устойчивой, а явная схема является условно устойчивой при рассматриваемом соотношении шагов по времени. Однако явная схема является более предпочтительной из-за простоты вычислительного алгоритма. Если мы знаем значения сеточной функции на n -м временном слое, то решение на $(n + 1)$ -ом слое может быть найдено непосредственно из уравнения (6). Для неявной схемы алгоритм решения строится по другому, если нам известны значения v на n -м временном слое, необходимо решить систему алгебраических уравнений (7) размерности $(N_x - 1)$, чтобы определить значения v на $(n + 1)$ -ом слое. Решение такой задачи, например, методом Гаусса требует порядка $O(N_x^3)$ операций, что в некоторых случаях может быть очень большим числом.

9. Консервативные разностные схемы. При разработке разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, помимо обеспечения точности аппроксимации и устойчивости схемы, важно обеспечить соблюдение законов сохранения, характерных для исходной дифференциальной задачи. Схемы, удовлетворяющие этому требованию, называются консервативными [10]. Нарушение консервативности может привести к получению неверного решения.

Построим консервативную разностную схему для уравнения теплопроводности в случае переменных коэффициентов. Рассмотрим следующие уравнение:

$$u_t = (ku_x)_x + f(x, t), \quad (12)$$

где $k = k(x)$.

Зададим равномерную сетку. Значения сеточной функции в узлах x_i на n -ом временном слое будем обозначать v_i , на $(n + 1)$ -ом слое – \hat{v}_i . Также будем рассматривать промежуточные точки $x_{i+\frac{1}{2}} = h + x_{i-\frac{1}{2}}$ и исследовать разностные аналоги потока тепла $W_{i+\frac{1}{2}}$.

Уравнение (12) можно записать в виде:

$$u_t = -q_x + f, \quad (13)$$

где $q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$.

Проинтегрируем (13), получим

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_t dx = -(q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}) + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx,$$

в силу непрерывности u_t разностный аналог будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\hat{v}_i - v_i}{\tau} = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} - q_{i+\frac{1}{2}}}{h} + g_i \\ g_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (14)$$

Функцию f нельзя выносить из под знака интеграла, т. к. она может быть разрывной. Далее проинтегрируем уравнение теплового потока q на промежутке от x_i до x_{i+1} , получим

$$u_{i+1} - u_i = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{q}{k} dx,$$

коэффициент $\frac{q}{k}$ также может быть разрывным, его выносить не будем. Разностная аппроксимация будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = -q_{i+\frac{1}{2}} \cdot a_{i+\frac{1}{2}} \\ a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k} \end{cases} \quad (15)$$

Подставляем (15) в (14). В итоге мы получаем консервативную разностную схему

$$\frac{\hat{v}_i - v_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{ha_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{v_i - v_{i+1}}{ha_{i-\frac{1}{2}}} \right) + g_i. \quad (16)$$

10. Решение двумерной нестационарной задачи теплопроводности методом конечных разностей в системе MATLAB.

Задача. Необходимо смоделировать процесс нестационарного распределения температуры в медном стержне прямоугольного профиля длиной 20 см и шириной 1 см.

Параметры стержня:

1. Плотность материала: $\rho = 8900 \text{ кг/м}^3$;
2. Удельная теплоемкость: $c = 380 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$;
3. Коэффициент теплопроводности: $k = 385 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Условия задачи:

1. Временной промежуток: 10 секунд;
2. Отсутствие источников и стоков тепла в объеме стержня;
3. Температура на концах стержня: $T = 300 \text{ К}$;

4. Тепловой поток через боковые границы: нулевой;

5. Начальное распределение температуры: см. Рис. 3.

Построим математическую модель. Двумерное нестационарное линейное уравнение теплопроводности [10] выглядит следующим образом:

$$\rho(x, y)c(x, y) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k(x, y) \cdot \nabla T) = f(x, y), \quad (17)$$

где

- t – время;
- x, y – пространственные координаты;
- $\rho(x, y)$ – плотность вещества;
- $c(x, y)$ – удельная теплоемкость вещества;
- $k(x, y)$ – коэффициент теплопроводности вещества;
- $f(x, y)$ – плотность мощности источников тепла;
- $T(x, y)$ – искомая функция распределения абсолютной температуры по координатам;
- ∇T – изменение температуры по направлению;
- $k(x, y) \cdot \nabla T$ – изменение плотности теплового потока.

Уравнение (17) рассматривается на прямоугольной области с граничными условиями Дирихле или Неймана [10] на границах $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$, $y = y_{\max}$ и начальными условиями первого или второго рода на отрезке времени $[t_{\min}, t_{\max}]$.

Зададим на отрезке $[x_{\min}, x_{\max}]$ равномерную координатную сетку с шагом Δx :

$$x = \{x_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (18)$$

на отрезке $[y_{\min}, y_{\max}]$ зададим равномерную координатную сетку с шагом Δy :

$$y = \{y_j | j = 1, 2, 3, \dots, m\}, \quad (19)$$

на отрезке $[t_{\min}, t_{\max}]$ равномерную сетку с шагом Δt :

$$t = \{t_l | l = 1, 2, 3, \dots, s\}. \quad (20)$$

Векторы, заданные выражениями (18) – (20), определяют равномерную пространственно-временную сетку на прямоугольной области:

$$G = \{(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_l = l\Delta t), | i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, m, l = 1, 2, 3, \dots, s\}. \quad (21)$$

Граничные и начальные условия первого рода [10] для данной задачи можно представить в следующем виде:

$$T(x_1, y, t) = g_1(y), \quad (22)$$

$$T(x_n, y, t) = g_2(y), \quad (23)$$

$$T(x, y_1, t) = g_3(x), \quad (24)$$

$$T(x, y_m, t) = g_4(x), \quad (25)$$

$$T(x, y, t_1) = g_t(x, y), \quad (26)$$

где x_1, x_n – координаты граничных точек области $[x_{\min}, x_{\max}]$, y_1, y_m – координаты граничных точек области $[y_{\min}, y_{\max}]$, t_1 – начальный момент времени, $g_1(y), g_2(y), g_3(x), g_4(x), g_t(x, y)$ – некоторые непрерывные функции соответствующих координат.

Граничные и начальные условия второго рода [10] для рассматриваемой задачи могут быть выражены следующим образом:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x_1, y, t} = g_1(y), \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x_n, y, t} = g_2(y), \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x, y_1, t} = g_3(x), \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x, y_m, t} = g_4(x), \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x, y, t_1} = g_t(x, y). \quad (31)$$

Проведем дискретизацию [9] граничных и начальных условий Дирихле (22) – (26) методом конечных разностей на равномерной сетке (21), получим

$$T_{1, j, l} = g_1(y_j), \quad (32)$$

$$T_{n,j,l} = g_2(y_j), \quad (33)$$

$$T_{i,1,l} = g_3(x_i), \quad (34)$$

$$T_{i,m,l} = g_4(x_i), \quad (35)$$

$$T_{i,j,1} = g_t(x_i, y_j), \quad (36)$$

где $T_{1,j,l}$, $T_{n,j,l}$, $T_{i,1,l}$, $T_{i,m,l}$, $T_{i,j,1}$ – значения функции $T(x, y, t)$ в точках (x_1, y_j, t_l) , (x_n, y_j, t_l) , (x_i, y_1, t_l) , (x_i, y_m, t_l) , (x_i, y_j, t_1) , соответственно.

Для граничных и начальных условий Неймана (27) – (31) на сетке (21) после дискретизации получим

$$\frac{T_{2,j,l} - T_{1,j,l}}{\Delta x} = g_1(y_j), \quad (37)$$

$$\frac{T_{n,j,l} - T_{n-1,j,l}}{\Delta x} = g_2(y_j), \quad (38)$$

$$\frac{T_{i,2,l} - T_{i,1,l}}{\Delta y} = g_3(x_i), \quad (39)$$

$$\frac{T_{i,m,l} - T_{i,m-1,l}}{\Delta y} = g_4(x_i), \quad (40)$$

$$\frac{T_{i,j,2} - T_{i,j,1}}{\Delta t} = g_t(x_i, y_j). \quad (41)$$

Составим разностный аналог уравнения (17) для внутренних точек сетки используя формулу (16), получим

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,l} c_{i,j,l} \frac{T_{i,j,l} - T_{i,j,l-1}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2} [k_{i,j,l}(T_{i+1,j,l} - T_{i,j,l}) - k_{i-1,j,l}(T_{i,j,l} - T_{i-1,j,l})] - \\ - \frac{1}{\Delta y^2} [k_{i,j,l}(T_{i,j,l+1} - T_{i,j,l}) - k_{i,j-1,l}(T_{i,j,l} - T_{i,j-1,l})] = f_{i,j,l}, \\ i = 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, \dots, m-1, \quad l = 2, 3, \dots, s, \end{aligned} \quad (42)$$

где $f_{i,j,l}$ – значение функции $f(x, y, t)$ в точке сетки с координатами (x_i, y_j, t_l) .

В результате дискретизации получили систему линейных алгебраических уравнений размерности $n \cdot m \cdot s$.

Напишем функцию, реализующую численное решение уравнения (17) с граничными и начальными условиями (22) – (31) на равномерной сетке (21) по формулам (32) – (42) в MATLAB:

```
function [x, y, t, T]=termo_2d(t0, ts, s, x0, xn, n, y0, ym, m, r, c, k, f, vt,
gt1, v1, g1, v2, g2, v3, g3, v4, g4)

% Входные параметры:
% t0 – начальный момент времени, с; ts – конечный момент времени, с;
% x0 – начальная координата области решения по оси x, м;
% xn – конечная координата области решения по оси x, м;
% y0 – начальная координата области решения по оси y, м;
% ym – конечная координата области решения по оси y, м;
% n – число точек координатной сетки вдоль оси x;
% m – число точек координатной сетки вдоль оси y;
% s – число точек сетки вдоль оси времени t;
% r – функция плотности вещества, задаваемая строкой символов, заключенных
% в одинарные кавычки, например, 'x+2*y', кг/м^3;
% c – функция теплоемкости вещества, задаваемая строкой символов, заключенных
% в одинарные кавычки, Дж/(кг К);
% k – функция теплопроводности вещества, задаваемая строкой символов, заключенных
% в одинарные кавычки, Вт/(м К);
% f – функция плотности мощности источников тепла, задаваемая строкой символов,
% заключенных в одинарные кавычки, Вт/м^3;
% vt – параметр, значение которого определяет тип начального условия (1 – Дирихле,
% 2 – Неймана);
% gt1 – функция в правой части начального условия, задаваемая строкой символов,
% заключенных в одинарные кавычки, К или К/с;
% v1 – параметр, значение которого определяет тип граничного условия на первой
% границе области x = x(1) (1 – ГУ Дирихле, 2 – ГУ Неймана);
% g1 – функция в правой части граничного условия на первой границе,
% задаваемая строкой символов, заключенных в одинарные кавычки, К или К/м;
% v2 – параметр, значение которого определяет тип граничного условия на второй
% границе области x = x(n) (1 – ГУ Дирихле, 2 – ГУ Неймана);
% g2 – функция в правой части граничного условия на второй границе,
% задаваемая строкой символов, заключенных в одинарные кавычки, К или К/м;
% v3 – параметр, значение которого определяет тип граничного условия на третьей
```

```

% границе области  $y = y(1)$  (1 - ГУ Дирихле, 2 - ГУ Неймана);
% g3 - функция в правой части граничного условия на третьей границе,
% задаваемая строкой символов, заключенных в одинарные кавычки, К или К/м;
% v4 - параметр, значение которого определяет тип граничного условия на четвертой
% границе области  $y = y(m)$  (1 - ГУ Дирихле, 2 - ГУ Неймана);
% g4 - функция в правой части граничного условия на четвертой границе,
% задаваемая строкой символов, заключенных в одинарные кавычки, К или К/м.

% Выходные параметры:
% x - вектор-строка координатной сетки по оси x размерности 1 x n;
% y - вектор-строка координатной сетки по оси y размерности 1 x m;
% t - вектор-строка сетки по оси времени размерности 1 x s;
% T - матрица результирующих значений температуры
% в узлах координатной сетки размерности n x m x s.

% Функции и переменные по умолчанию
if exist('t0')==0
t0=0;
end
if exist('ts')==0
ts=6;
end
if exist('s')==0
s=6;
end
if exist('x0')==0
x0=0;
end
if exist('xn')==0
xn=5e-2;
end
if exist('n')==0
n=10;
end
if exist('y0')==0
y0=0;
end
if exist('ym')==0
ym=8e-2;
end
if exist('m')==0
m=20;
end
if exist('r')==0
r='2e3';
end
if exist('c')==0
c='100';
end
if exist('k')==0
k='20';
end
if exist('f')==0
f='0';
end
if exist('vt')==0
vt=1;
end
if exist('gt1')==0
gt1='10*(sign(1e2*x-2)-sign(1e2*x-3)+sign(1e2*y-3)-sign(1e2*y-5))+300';
end
if exist('v1')==0
v1=1;
end
if exist('g1')==0
g1='300';

```

```

end
if exist('v2')==0
v2=1;
end
if exist('g2')==0
g2='300';
end
if exist('v3')==0
v3=1;
end
if exist('g3')==0
g3='300';
end
if exist('v4')==0
v4=1;
end
if exist('g4')==0
g4='300';
end

% Задание равномерной сетки
x=x0:(xn-x0)/(n-1):xn; dx=x(2)-x(1);
y=y0:(ym-y0)/(m-1):ym; dy=y(2)-y(1);
t=t0:(ts-t0)/(s-1):ts; dt=t(2)-t(1);

% Вычисление значений функций, заданных символьно, в узлах координатной сетки
F=inline(f,'x','y');
R=inline(r,'x','y');
C=inline(c,'x','y');
K=inline(k,'x','y');
GT=inline(gt1,'x','y');
G1=inline(g1,'y');
G2=inline(g2,'y');
G3=inline(g3,'x');
G4=inline(g4,'x');

% Определение размерности СЛАУ
N=s*n*m;

% Задание матрицы коэффициентов СЛАУ размерности N x N,
% все элементы которой равны 0
a=zeros(N,N);

% Задание матрицы-строки свободных членов СЛАУ
% размерности 1 x N, все элементы которой равны 0
b=zeros(1,N);

% Определение коэффициентов и свободных членов СЛАУ, соответствующих граничным
% условиям и проверка корректности значений параметров vt, v1, v2, v3, v4
for i=1:n
for j=1:m
b(m*(i-1)+j)=GT(x(i),y(j));
if vt==1
a(m*(i-1)+j,m*(i-1)+j)=1;
elseif vt==2
a(m*(i-1)+j,m*(i-1)+j)=-1/dt;
a(m*(i-1)+j,n*m+m*(i-1)+j)=1/dt;
else
error('Parameter vt have incorrect value');
end
end
end
for l=1:s
for j=1:m
b(n*m*(l-1)+j)=G1(y(j));
if v1==1

```

```

a(n*m*(l-1)+j , n*m*(l-1)+j)=1;
elseif v1==2
a(n*m*(l-1)+j , n*m*(l-1)+j)=-1/dx;
a(n*m*(l-1)+j , n*m*(l-1)+m+j)=1/dx;
else
error('Parameter v1 have incorrect value ');
end
b(n*m*(l-1)+m*(n-1)+j)=G2(y(j));
if v2==1
a(n*m*(l-1)+m*(n-1)+j , n*m*(l-1)+m*(n-1)+j)=1;
elseif v2==2
a(n*m*(l-1)+m*(n-1)+j , n*m*(l-1)+m*(n-1)+j)=1/dx;
a(n*m*(l-1)+m*(n-1)+j , n*m*(l-1)+m*(n-2)+j)=-1/dx;
else
error('Parameter v2 have incorrect value ');
end
end
for i=2:n-1
b(n*m*(l-1)+m*(i-1)+1)=G3(x(i));
if v3==1
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+1 , n*m*(l-1)+m*(i-1)+1)=1;
elseif v3==2
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+1 , n*m*(l-1)+m*(i-1)+1)=-1/dy;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+1 , n*m*(l-1)+m*(i-1)+2)=1/dy;
else
error('Parameter v3 have incorrect value ');
end
b(n*m*(l-1)+m*(i-1)+m)=G4(x(i));
if v4==1
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+m , n*m*(l-1)+m*(i-1)+m)=1;
elseif v4==2
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+m , n*m*(l-1)+m*(i-1)+m)=1/dy;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+m , n*m*(l-1)+m*(i-1)+m-1)=-1/dy;
else
error('Parameter v4 have incorrect value ');
end
end
end

% Определение коэффициентов и свободных членов СЛАУ,
% соответствующих внутренним точкам области
for l=2:s
for i=2:n-1
for j=2:m-1
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-1)+m*(i-1)+j)=R(x(i) , y(j))*C(x(i) , y(j))/dt+(K(x(i) , y(j))+
+K(x(i-1) , y(j)))/dx^2+(K(x(i) , y(j))+K(x(i) , y(j-1)))/dy^2;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-1)+m*i+j)=-K(x(i) , y(j))/dx^2;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-1)+m*(i-2)+j)=-K(x(i-1) , y(j))/dx^2;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-1)+m*(i-1)+j+1)=-K(x(i) , y(j))/dy^2;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-1)+m*(i-1)+j-1)=-K(x(i) , y(j-1))/dy^2;
a(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j , n*m*(l-2)+m*(i-1)+j)=-R(x(i) , y(j))*C(x(i) , y(j))/dt;
b(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j)=F(x(i) , y(j));
end
end
end

% Решение СЛАУ
u=b/a';

% Преобразование вектора-строки значений искомой функции в узлах координатной сетки
% в матрицу размерности n x m, удобную для представления результатов в графическом виде
for l=1:s
for i=1:n
for j=1:m
T(i , j , l)=u(n*m*(l-1)+m*(i-1)+j);
end
end
end

```

```

end
end

% Построение графиков искомой функции T(x,y,t)
for l=1:s
figure
surf(y,x,T(:,:,l))
xlabel('y, м')
ylabel('x, м')
zlabel('T, К')
grid on
colormap('cool')
axis([min(y) max(y) min(x) max(x) min(min(T(:,:,l))) max(max(T(:,:,l))))])
pause(0.1)
M(l)=getframe;
end
figure
movie(M,10,3)

```

Для решения исходной задачи с помощью функции `termo_2d` следует использовать следующую команду:

```
[x,y,t,T]=termo_2d(0,10,6,0,1e-2,6,0,20e-2,50,'8900','380','385','0',1,'20*(sign(1e2*y-5)-sign(1e2*y-7))+sign(1e2*y-12)-sign(1e2*y-14))+300',2,'0',2,'0',1,'300',1,'300')
```

В результате дискретизации задачи на пространственно-временной сетке, содержащей 1800 узлов, и решения СЛАУ, получим результат, представленный на Рис. 3.

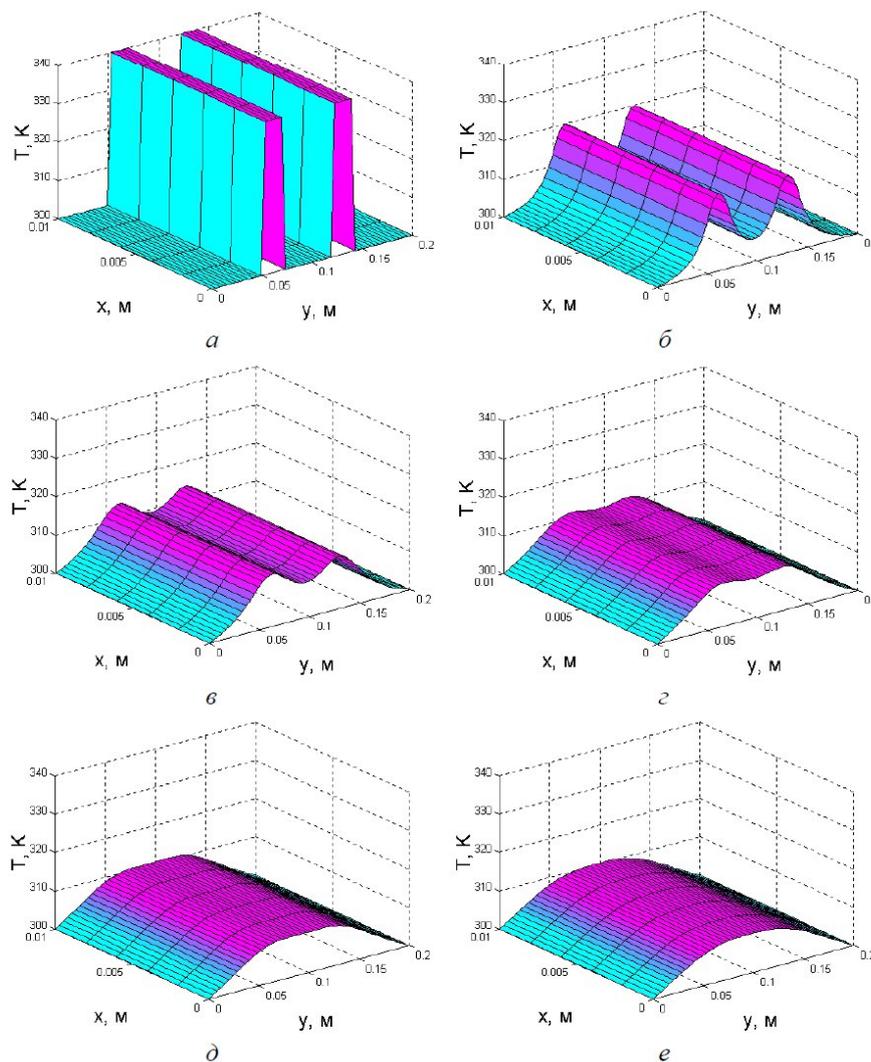


Рис. 3. Распределение температуры в медном стержне в различные моменты времени:
а) $t = 0$; б) $t = 2$ с; в) $t = 4$ с; г) $t = 6$ с; д) $t = 8$ с; е) $t = 10$ с

Из графиков видно, что в условиях тепловой изоляции температурное поле в медном стержне с течением времени постепенно выравнивается. Начальные резкие скачки температуры, присутствующие в момент $t = 0$, сглаживаются, и температура распределяется более равномерно по всему стержню. Это указывает на тенденцию к достижению термического равновесия, где тепло распространяется от областей с высокой температурой к областям с низкой температурой, стремясь к равномерному распределению.

Свойства меди, связанные с её высокой теплопроводностью и способностью быстро и равномерно распределять тепло, находят широкое применение в различных областях, например, в теплообменниках и парогенераторах, используемых на тепловых электростанциях, медные трубы обеспечивают эффективное распределение тепла.

6. Заключение. В ходе выполнения работы были изучены теоретические основы метода конечных разностей и его применение для решения задач теплопроводности. Были приведены примеры построения численных схем для дифференциальных уравнений и проведен анализ их устойчивости и точности. Также решена конкретная задача теплопроводности посредством математического моделирования.

Таким образом, метод конечных разностей доказал свою эффективность и простоту в применении для решения прикладных задач.

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ериной Татьяне Анатольевне за её неоценимую поддержку и руководство во время написания этой работы.

Список литературы

1. Васильева А. Б., Свешников А. Г., Тихонов А. Н. 1985. Дифференциальные уравнения. М., Наука, 254.
2. Волков Е. А. 2004. Численные методы. М., Лань, 256.
3. Галанин М. П., Тихонов Н. А., Токмачев М. Г. 2022. Математическое моделирование: теория и применение. М., Ленанд, 600.
4. Гулин А. В., Самарский А. А. 1989. Численные методы. Том 2 Уравнения математической физики. М., Наука, 480.
5. Дегтярев А. А. 2011. Метод конечных разностей. Самара, СГАУ, 83.
6. Копченкова Н. В., Марон И. А. 1972. Вычислительная математика в примерах и задачах. М., Наука, 369.
7. Меркулова Н. Н., Михайлов М. Д. 2014. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Томск, ТГУ, 122.
8. Петров И. Б. 2021. Вычислительная математика для физиков. М., ФИЗМАТЛИТ, 376.
9. Самарский А. А. 1971. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 553.
10. Самарский А. А., Тихонов А. Н. 1977. Уравнения математической физики. М., Наука, 735.
11. Тихонов Н. А., Токмачев М. Г. 2013. Основы математического моделирования. Часть 2. М., МГУ, 91.

Поступила в редакцию 27.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Щеблыкин Денис Евгеньевич – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ерина Татьяна Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
erina@bsu.edu.ru