Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 89–98.

Цилиндрические функции в задачах математической физики

Токарев Д. А.
1469493@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной статье исследуется применение цилиндрических функций, при решении задач математической физики. Основной целью статьи было решить конкретную задачу на колебания круглой мембраны, в которой возникают цилиндрические функции. Для этого в статье были освещены основные определения и свойства цилиндрических функций, подчеркивая их значение в решении уравнений математической физики.

Ключевые слова: ортогональность, колебания, круглая мембрана, функция Бесселя, функция Неймана, уравнение математической физики

Для цитирования: Токарев Д. А. 2024. Цилиндрические функции в задачах математической физики. *Студенческий математический журнал*, 2: 89–98.

---

1. Введение. В современной математической физике цилиндрические функции играют важную роль при решении широкого спектра задач, связанных с физическими явлениями. А именно, в задачах о колебаниях круглой мембраны, при решении уравнения Максвелла для описания распространения электромагнитных волн в цилиндрических средах, таких как коаксиальные кабели или антенны. Также для моделирования распространения звуковых волн в цилиндрических средах, например, в трубах или резонаторах, еще цилиндрические функции помогают решать уравнения теплопроводности в цилиндрических системах, например, при изучении теплопередачи через цилиндрические структуры.

Их свойства и применение в различных областях науки делают их неотъемлемой частью математического аппарата. Новые открытия в этой области связаны с именами Ю. В. Кафтановой [4], А. Н. Боголюбова [1], В. С. Владимирова [3].

2. Функции Бесселя и Неймана. При решении уравнений в частных производных, которые содержат оператор Лапласа в цилиндрических координатах, методом Фурье возникают функции, которые называются цилиндрическими.

В книге [5] приводится пример характерной задачи, приводящей к цилиндрическим функциям:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Введем полярные координаты, преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Положим $u = R(r)\Phi(\varphi)$ и разделяя переменные в уравнение выше, получаем:

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{\partial\varphi^2} + k^2\Phi R = 0 \quad \text{или} \quad \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \lambda,$$

где $\lambda = const$. Тогда имеем два уравнения:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0 \tag{1}$$

и

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{2}$$

решение уравнения (2) мы знаем из курса обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\varphi),$$

условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\lambda = v^2$, где v – целое число. Положим, в уравнении (1) что $x = kr$, мы получим уравнение вида:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0, \quad R = y(kr) \quad \text{или} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + (x^2 - v^2)y = 0.$$

В [2] доказывается, что это уравнение решения которого, не может быть выражены в виде элементарных функций. Разберем как его решать.

Определение 1.1. *Уравнение вида:*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \qquad \Re v \geq 0 \tag{3}$$

называется уравнением Бесселя индекса v [4].

Общим решением уравнения является функция: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Знаем, что фундаментальной системой решением этого линейного уравнения второго порядка относительно y является система двух линейно независимых решений, то есть для неких функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определитель Вронского отличен от нуля для любых $x \in (a, b)$ [1].

Теорема 1.1. *Частное решение уравнения (3), существует и оно задано равномерно сходящимся рядом*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^v \Gamma(v+1) C_0}{k! \Gamma(v+1+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}, \qquad C_0 \neq 0. \tag{4}$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения в виде обобщенно степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\sigma}, \tag{5}$$

где σ – некоторое число, а C_k – некоторые неизвестные постоянные, причем $C_0 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} xy'(x) &= C_0 \sigma x^{\sigma} + C_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (k+\sigma) x^{k+\sigma}, \\ x^2 y''(x) &= C_0 \sigma(\sigma-1) x^{\sigma} + C_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (k+\sigma)(k+\sigma-1) x^{k+\sigma}, \\ x^2 y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\sigma+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} x^{k+\sigma}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставим (5) и (6) в (3), получаем:

$$\begin{gathered} [\sigma(\sigma-1) + \sigma - v^2] x^{\sigma} C_0 + \\ + [\sigma(\sigma+1) + (\sigma+1) - v^2] x^{\sigma+1} C_1 + \\ + x^{\sigma} \sum_{k=2}^{\infty} \{[(k+\sigma)(k+\sigma-1) + (k+\sigma) - v^2] C_k + C_{k-2}\} x^k = 0 \end{gathered}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{array}{ll} C_0[\sigma^2 - v^2] = 0, & x^{\sigma}, \\ C_1[(\sigma+1)^2 - v^2] = 0, & x^{\sigma+1}, \\ C_2[(\sigma+2)^2 - v^2] + C_0 = 0, & x^{\sigma+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ C_k[(\sigma+k)^2 - v^2] + C_{k-2} = 0, & x^{\sigma+k}, \qquad k > 2. \end{array}$$

Так как $C_0 \neq 0$, то из первого уравнения находим $\sigma = \pm v$.

Допустим $\sigma = v$. Тогда из второго равенства имеем $C_1 = 0 \Rightarrow$

$$C_k = -\frac{C_{k-2}}{(k+v)^2 - v^2} = -\frac{C_{k-2}}{k(2v+k)},$$

то есть, если у нас k нечетное ($k = 2l+1$), все $C_{2l+1} = 0$, если же $k = 2l$, то есть четное, то

$$C_{2l} = -\frac{C_{2(l-1)}}{2^2 (v+l) l},$$

или

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{C_0}{2^2(v+1)1}; \\ C_4 &= -\frac{C_2}{2^2(v+2)2} = \frac{C_0}{2^4(v+1)(v+2)2!}; \\ &\vdots \\ C_{2l} &= (-1)^l \frac{C_0}{2^{2l} l! (v+1)(v+2)\cdots(v+l)}. \end{aligned}$$

Зная, что:

$$\begin{gathered} z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \qquad n! = \Gamma(n+1), \\ \frac{1}{(v+1)(v+2)\cdots(v+l)} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(l+v+1)} \end{gathered}$$

получаем
$$C_{2l} = (-1)^l \frac{\Gamma(v+1)C_0}{l!2^{2l}\Gamma(l+v+1)},$$
и решением уравнения (3) будет ряд:
$$y(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{2^v\Gamma(v+1)C_0}{l!\Gamma(l+v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+v}.$$
Теперь докажем равномерную сходимость, по признаку Даламбера:
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^v\Gamma(v+1)C_0}{(k+1)!\Gamma(v+1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)+v} \div \frac{2^v\Gamma(v+1)C_0}{k!\Gamma(v+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} =$$
$$= \left(\frac{x}{2}^2\right)\frac{1}{(k+1)(v+k+1)}.$$
Теперь рассмотрим предел отношения соседних членов при $k \to \infty$:
$$\lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(k+1)(v+k+1)}\right| = 0.$$
Поскольку предел отношения соседних членов ряда равен 0, то по признаку Даламбера ряд сходится равномерно для всех значений v и x.

Определение 1.2. *Если в качестве C_0 в (4) взять число $C_0 = \dfrac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$, то получится функция*
$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}, \tag{7}$$
которая называется функцией Бесселя порядка v, x − независимая переменная [4].

Следствие. Так как уравнение не меняется при замене v на $-v$, то функция $J_{-v}(x)$ также является решением уравнения (3).

Определение 1.3. *Функция вида:*
$$N_v(x) = \frac{J_v(x)\cos\pi v - J_{-v}(x)}{\sin\pi v} \tag{8}$$
называется функцией Неймана.

Очевидно, что эта функция является решением уравнения (3), так как представляет собой линейную комбинацию частных решений J_v и J_{-v} [1].

3. Линейная независимость функций Бесселя и Неймана. Существует предел
$$N_n(x) = \lim_{v\to n} N_v(x) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left\{\sum_{m=1}^{k+n}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right\}$$
где γ - постоянная Эйлера, доказательство этого утверждения приводится в [2].

Теорема 1.2. *Функция $J_v(x)$ и $N_v(x)$ линейно независимы при любом v.*

Доказательство. Покажем, что определитель Вронского для этих функций не равен 0.
$$W[J_v(x), N_v(x)] = \begin{vmatrix} J_v(x) & N_v(x) \\ J_v'(x) & N_v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_v(x) & \dfrac{J_v(x)\cos\pi v - J_{-v}(x)}{\sin\pi v} \\ J_v'(x) & \dfrac{J_v'(x)\cos\pi v - J_{-v}'(x)}{\sin\pi v} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\cos\pi v}{\sin\pi v}\begin{vmatrix} J_v(x) & J_v(x) \\ J_v'(x) & J_v'(x) \end{vmatrix} - \frac{1}{\sin\pi v}\begin{vmatrix} J_v(x) & J_{-v}(x) \\ J_v'(x) & J_{-v}'(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin\pi v}W[J_v(x), J_{-v}(x)].$$
Посчитаем определитель Вронского $W[J_v(x), J_{-v}(x)]$
$$\frac{d}{dx}[xJ_v'(x)] + \left(x - \frac{v^2}{x}\right)J_v(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[xJ_{-v}'(x)] + \left(x - \frac{v^2}{x}\right)J_{-v}(x) = 0.$$
Домножим первое и второе уравнение на $J_{-v}(x)$ и $J_v(x)$ соотвественно, затем вычтем из второго первое. Имеем
$$J_{-v}(x)\frac{d}{dx}[xJ_v'(x)] - J_v(x)\frac{d}{dx}[xJ_{-v}'(x)] + xJ_{-v}'(x)J_v'(x) - xJ_v'(x)J_{-v}'(x) =$$
$$= \frac{d}{dx}\{x[J_{-v}(x)J_v'(x) - J_{-v}'(x)J_v(x)]\} = -\frac{d}{dx}\{xW[J_{-v}(x)J_v'(x)]\} = 0,$$

отсюда получаем, что $xW[J_{-v}(x)J_v'(x)] = C$. В пределе при $x \to 0$ можно определить константу C:

$$C = \lim_{x\to 0} xW[J_{-v}(x)J_v'(x)] = \lim_{x\to 0}[xJ_{-v}'(x)J_v(x) - xJ_{-v}(x)J_v'(x)].$$

Выпишем чему равно соотношение $xJ_v'(x)$:

$$xJ_v'(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{2l+v}{l!\Gamma(v+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+v},$$

с учетом этого, перепишем наш предел, получили

$$C = \lim_{x\to 0}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+k}\frac{2(l-v)}{k!\Gamma(v+k+1)l!\Gamma(-v+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+k}\frac{2(k+v)}{k!\Gamma(v+k+1)l!\Gamma(-v+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l}\right\}.$$

Отличны от нуля только слагаемые с $k = l = 0$, поэтому

$$C = \frac{-v}{\Gamma(1+v)\Gamma(-v+1)} - \frac{-v}{\Gamma(1+v)\Gamma(-v+1)} = -\frac{2v}{v\Gamma(v)\Gamma(-v+1)} =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\sin \pi v,$$

последнее получили из свойства Гаммы функции:

$$\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin \pi v}.$$

Таким образом, так как $C = -\frac{2}{\pi}\sin \pi v$, то

$$W[J_v(x), J_{-v}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin \pi v,$$

итого имеем:

$$W[J_v(x), N_v(x)] = -\frac{1}{\sin \pi v}W[J_v(x), J_{-v}(x)] = -\frac{1}{\sin \pi v}\left(-\frac{2}{\pi x}\right)\sin \pi v,$$

значит:

$$W[J_v(x), N_v(x)] = \frac{2}{\pi x}.$$

Мы получили формулу для нецелых v, но в силу существования предела $\lim_{v\to n} N_v(x)$, мы можем распространить и на целые числа. Теорема доказана [2].

Следствие. *Функции $J_v(x)$ и $N_v(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнений Бесселя при любом индексе v. Общее решение выглядит следующим образом*

$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 N_v(x). \tag{9}$$

3. Нули функции Бесселя и Неймана. Поговорим подробнее, о корнях функции Бесселя, мы уже замечали по графику, что их бесконечное множество, докажем наше предположение, мы будем рассматривать случай когда $v > -1$ и оно вещественное.

Теорема 1.3. *Функция Бесселя, в таком случае имеет только вещственные корни, то есть если*

$$J_v(\mu_k^v) = 0, \qquad (\mu_k^v)^* = \mu_k^v$$

Доказательство(метод от противного). По определению:

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Пусть, корни чисто мнимые, то есть $z = it$. Тогда

$$J_v(it) = \left(\frac{i}{2}\right)^v t^v \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k},$$

где под знаком суммы содержатся только положительные слагаемые. Следовательно, $J_v(it) \neq 0$ при вещественных t, отличных от нуля. Получается функция $J_v(z)$ не имеет чисто мнимых корней.

Теперь, пусть $\mu = x + iy$ – комплексный корень уравнения, которое нам дано в теореме $J_v(\mu) = 0$ и $x \neq 0$. Так как функция Бесселя разлагается в степенной ряд с вещественными коэффициентами, то μ^* – также корень этого уравнения. По интегралу (1.27), положим $\alpha = \mu$, $\beta = \mu^*$:

$$\int_0^{\zeta} zJ_v(\mu z)J_v(\mu^* z)dz =$$

$$= \frac{\zeta}{\mu^2 - (\mu^*)^2}\left[\mu^* J_v(\mu\zeta)J_v'(\mu^*\zeta) - \mu J_v(\mu^*\zeta)J_v'(\mu\zeta)\right],$$

пусть $\zeta = 1$, тогда так как $J_v(\mu) = J_v(\mu^*) = 0$, имеем:

$$\int_0^1 zJ_v(\mu z)J_v(\mu^* z)dz = 0.$$

Но так как $J_v(\mu^*\zeta) = [J_v(\mu\zeta)]^*$, то

$$\int_0^1 zJ_v(\mu z)J_v(\mu^* z)dz = \int_0^1 z|J_v(\mu z)|^2 dz > 0.$$

Получили противоречие. Которое показывает, что функция $J_v(z)$, не имеет комплексных корней при $v > -1$ [3].

Для доказательства следующей теоремы нам необходимо, показать что функция $y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi)$, где A и φ – произвольные постоянные является асимптотическим с точностью до $O(x^{-3/2})$, $x \to \infty$, решением уравнения Бесселя при любом v. Рассматривая уравнение (3) и делая в нем замену $x = \varepsilon t$, $t \in [0,1]$. Тогда при $x \to \infty$, параметр $\varepsilon = const$ также будет стремится к бесконечности. Уравнение (3) в новых переменных примет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}y'' + \frac{1}{\varepsilon^2 t}y' + \left(1 - \frac{v^2}{\varepsilon^2 t^2}\right)y = 0,$$

y – дифференцируется по t. Решение будем искать в виде:

$$y(t,\varepsilon) = e^{i\varepsilon S(t)}f(t,\varepsilon),$$

функция$f(t,\varepsilon)$ зависит от параметра $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$ регулярно, то есть

$$f(t,\varepsilon) = f_0(t) + \frac{1}{\varepsilon}f_1(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}f_2(t) + \cdots,$$

а $f_k(t)$, $k = \overline{0,\infty}$, от ϵ не зависят. найдем производые этого выражения $y(t,\epsilon) = e^{i\varepsilon S(t)}f(t,\epsilon)$:

$$y'(t,\varepsilon) = f'(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} + i\varepsilon S'(t)f(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)},$$

$$y''(t,\varepsilon) = f''(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} + 2i\varepsilon S'(t)f'(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} - \varepsilon^2(S'(t))^2 f(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)}.$$

Подставим это в уравнение:

$$\left\{[-S'^2+1]f + \frac{1}{\varepsilon}\left[2if'S' + \frac{i}{t}fS'\right] + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[f'' + \frac{1}{t}f' - \frac{v^2}{t^2}f\right]\right\}e^{i\varepsilon S} = 0.$$

Подставим разложение $f(t,\varepsilon)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{1}{\varepsilon}$. Получим:

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon^0 & 1 - S'^2 = 0 \\ \varepsilon^{-1} & 2f_0' + \frac{1}{t}f_0 = 0 \\ \cdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Из уравнений находим, что

$$S(t) = \pm t \qquad f_0(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Значит, функция

$$y(t,\varepsilon) = \frac{C_\pm}{\sqrt{t}}\exp(\pm i\varepsilon t)$$

является асимптотическим с точностью до $O(1/\varepsilon)$ решением уравнения $\frac{1}{\varepsilon^2}y'' + \frac{1}{\varepsilon^2 t}y' + \left(1 - \frac{v^2}{\varepsilon^2 t^2}\right)y = 0$, это уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с вещественными коэффициентами. Значит действительная и мнимая части его решений – также решения этого уравнения. То есть получили, что функция вида:

$$y(t,\varepsilon) = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\cos\varepsilon t + \frac{C_2}{\sqrt{t}}\sin\varepsilon t,$$

также асимптотическое решение этого уарвнения. Положив

$$C_1 = \frac{A}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\varphi \qquad C_2 = \frac{A}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\varphi$$

и вернувшись к исходным переменным, получим что и хотели показать.
Теорема 1.4. *Уравнение $J_v(z) = 0$ имеет бесконечное множество решений.*

Доказательство. Так как функция Бесселя $J_v(x)$ является решением уравнения (3) и как мы выяснили выше, что при $x \to \infty$ функция вида

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi),$$

тоже является решением уравнения (3), то допускается следующее асимптотическое представление функции Бесселя [2]:

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi),$$

где $A = \sqrt{2/\pi}$, $\varphi = -\pi v/2$, а $\cos(x)$ имеет бесконечное число нулей. Значит $J_v(x)$ также имеет бесконечное число нулей.

Функция Неймана обращается в бесконечность при $x = 0$. Так как одно из решений непременно обязано расходиться в нуле, поскольку вронскиан этого уравнения, по формуле Лиувилля-Остроградского, с точностью до произвольной постоянной равен $\frac{1}{x}$ [1].

4. Разложение в ряд Фурье-Бесселя. Во время решения различных прикладных задач методом Фурье, нужно разложить функцию в ряд Фурье-Бесселя, найти коэффициенты ряда. Для этого необходимо знать различные рекуррентные соотношения.

- Производная произведения функции Бесселя порядка v на аргумент функции в степени v равносильна произведению этого же аргумента в той же степени на функцию Бесселя порядка $v-1$, то есть

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x) \tag{10}$$

- Производная произведения функции Бесселя порядка v на аргумент функции в степени $-v$ равна частному функции Бесселя порядка $v+1$ и ее аргумента в степени v, но с противоположным знаком, то есть

$$\frac{d}{dx}[x^{-v} J_v(x)] = -\frac{J_{v+1}(x)}{x^v} \tag{11}$$

Из этих соотношений следует очень важная формула:

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{12}$$

Теорема 1.5. *Последовательность функций*

$$J_v\left(\mu_1^v \frac{x}{r_0}\right), J_v\left(\mu_2^v \frac{x}{r_0}\right), \cdots, J_v\left(\mu_k^v \frac{x}{r_0}\right)\cdots, \quad v > -1,$$

в которой μ_k^v, $k = 1,\infty$ - корни уравнения

$$J_v(x) = 0,$$

образует ортогональную систему функций с весом x, то есть

$$\int_0^{r_0} xJ_v\left(\mu_k^v \frac{x}{r_0}\right) J_v\left(\mu_j^v \frac{x}{r_0}\right) = \frac{r_0}{2}[J_v'(\mu_k^v)]^2\delta_{kj}, \tag{13}$$

здесь δ_{kj} - символ Кронекера.

Доказательство. Возьмем первый интеграл Ломмеля, и пусть в нем $r_0 = 1$, $\alpha = \mu_k^v$, $\beta = \mu_j^v$ и $k \neq j$. Так как μ_k^v и μ_j^v это значения в которых функция Бесселя равна нулю, то $J_v(\mu_k^v) = J_v(\mu_j^v) = 0$ и

$$\int_0^1 tJ_v(\mu_k^v t)J_v(\mu_j^v t)dt = 0. \tag{14}$$

Теперь возьмем интеграл Ломмеля, для $\alpha = \beta$. В нашем случае $\zeta = 1$ и $\alpha = \mu_k^v$, имеем:

$$\int_0^1 tJ_v^2(\mu_k^v t)dt = \frac{1}{2}[J_v'(\mu_k^v)]^2. \tag{15}$$

Если объединить (14) и (15), и сделать обратную замену $t = \frac{x}{r_0}$, то получим (13). Теорема доказана.

Теорема 1.6. *Пусть некоторую функцию $f(x)$ вещественного переменного x можно представить равномерно сходящимся функциональным рядом*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_v\left(\mu_k^v \frac{x}{r_0}\right), \qquad v > -1, \tag{16}$$

где (μ_k^v – это положительные корни уравнения $J_v(\mu) = 0$, пронумерованные в порядке их возрастания). Тогда

$$a_k = \frac{2}{r_0^2[J_v'(\mu_k^v)]^2}\int_0^{r_0} xf(x)J_v\left(\mu_k^v \frac{x}{r_0}\right)dx. \tag{17}$$

Доказательство. Ряд сходится равномерно, поэтому будем интегрировать его почленно. Умножим предварительно на $xJ_v\left(\mu_n^v\dfrac{x}{r_0}\right)$, имеем:

$$\int_0^{r_0} xf(x)J_v\left(\mu_n^v\frac{x}{r_0}\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{r_0} xJ_v\left(\mu_n^v\frac{x}{r_0}\right)J_v\left(\mu_k^v\frac{x}{r_0}\right)dx,$$

по теореме (1.4) и по формуле (13) получим:

$$\int_0^{r_0} xf(x)J_v\left(\mu_n^v\frac{x}{r_0}\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{r_0}{2}[J_v'(\mu_k^v)]^2\delta_{kj}=a_n\frac{r_0^2}{2}[J_v'(\mu_n^v)]^2,$$

откуда выразив a_n получим формулу (17).

5. Применение функций Бесселя в прикладных задачах. Найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем, предполагая, что начальное отклонение имеет форму параболоида вращение, а начальные скорости равны нулю.

Решение. Перепишем, условие задачи в математическом виде, так как мембрана с закрепленным краем, то краевые условия у нас вида $u|_{r=r_0}=0$; из-за того что колебания поперечные, то функция $u(r,\varphi,t)$ не зависит от φ, начальные условия, такие что $F(r)$ (начальная скорость) равна 0, а $f(r)$ (начальное отклонение) имеет форму параболоида вращения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0\le r<r_0\quad 0<t<+\infty,\\ u(r_0,t)=0, & 0<t<+\infty,\\ u(r,0)=A\left(1-\dfrac{r^2}{r_0^2}\right), & u_t(r,0)=0, 0\le r\le r_0.\end{cases}$$

Будем решать методом Фурье (подробнее об этом методе смотри в [3]), тогда:

$$u(r,t)=R(r)T(t),$$

тогда получим уравнение:

$$R(r)T''(t)=a^2\left(R''(r)T(t)+\frac{1}{r}R'(r)T(t)\right)\quad\text{или}\quad\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{R'(r)}{rR(r)},$$

получили, что слева функция, зависящая только от t, а справа только от r, эти две функции совпадают только если они константы, то есть имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{R'(r)}{rR(r)}=-\lambda^2.$$

Тогда уравнение для $R(r)$:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda^2R(r)r^2=0,$$

сделаем замену $x=\lambda r$, $R(r)=R(\frac{x}{\lambda})=y$. Тогда получим

$$x^2y''+xy'+x^2y=0,$$

это уравнение Бесселя нулевого порядка. Тогда по формуле (9), общее решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$R\left(\frac{x}{\lambda}\right)=C_1J_0(x)+C_2N_0(x),$$

делаем обратную замену и получаем: $R(r)=CJ_0(\lambda r)$.

Из условий задачи, выделим краевые условия для $R(r)$. Из условия $|u(0,t)|<\infty$, следует что $|R(+0)|<\infty$, функция Неймана в нуле неограниченна, а это значит, что у нас $C_2=0$. Второе условие $u(r_0,t)=0$, а это означает, что:

$$R(r_0)=0,$$

тогда объединяя все выше сказанное имеем: $C_1J_0(\lambda r_0)=0$, это означает что λr_0 должно быть одним из корней Бесселя по теореме (1.4) их бесконечно много, то есть $\lambda r_0=\mu_n$, где μ_n – n-ный корень функции Бесселя порядка 0, $n=1,2,3,\ldots$, итого имеем:

$$R(r)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)$$

Уравнение для $T(t)$, имеет вид:

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T(t)=\mathrm{A}\sin(\lambda at)+\mathrm{B}\cos(\lambda at),$$

подставляя λ, получим:

$$T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\sin\left(\frac{\mu_n}{r_0}at\right)+\mathrm{B}_n\cos\left(\frac{\mu_n}{r_0}at\right),$$

объединяя эти решения имеем:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\sin\left(\frac{\mu_n}{r_0}at\right)+\beta_n\cos\left(\frac{\mu_n}{r_0}at\right)\right]J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right).$$

Теперь, чтобы определить чему равны с учетом наших начальных условий коэффициенты α_n и β_n, найдем производную u_t:

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\alpha_n\frac{\mu_n^{(0)}a}{r_0}\sin\frac{\mu_n^{(0)}at}{r_0}+\beta_n\frac{\mu_n^{(0)}a}{r_0}\cos\frac{\mu_n^{(0)}at}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right).$$

Подставим наши начальные условия:

$$u_t(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\alpha_n\frac{\mu_n^{(0)}a}{r_0}\sin\frac{\mu_n^{(0)}a\cdot 0}{r_0}+\beta_n\frac{\mu_n^{(0)}a}{r_0}\cos\frac{\mu_n^{(0)}a\cdot 0}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\frac{\mu_n^{(0)}a}{r_0}J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)=0,$$

напомним, что $\mu_n^{(0)}$ это корни функции Бесселя которых по теореме (1.4) бесконечно много и которые не равны нулю, то очевидно что у нас выполняется равенство, только при $\beta_n=0\quad\forall n$. Тогда учитывая это перепишем уравнение (18), получаем:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\mu_n^{(0)}at}{r_0}J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right).$$

Теперь подставим в этот ряд второе начальное условие.

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\mu_n^{(0)}a\cdot 0}{r_0}J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nJ_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)=A\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Для $A\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$ справедлива теорема (1.6) , тогда по формуле (16) эта функция представима в виде ряда и α_n можно вычислить по формуле (17), для этого воспользуемся теоремой (1.5), то есть умножим обе части равенства на $rJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)$ и возьмем от обоих частей интеграл от нуля до r_0, рассматриваем случай когда $i=n$, так как по формуле (13), во всех других случаях этот интеграл равен нулю, итак получаем:

$$\int_0^{r_0}\alpha_nrJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)dr=\int_0^{r_0}A\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)rJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)dr,$$

первый интеграл по теореме (1.4) и формуле (13), в нашем случае равен:

$$\int_0^{r_0}\alpha_nrJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)dr=\alpha_n\frac{r_0^2}{2}(J_0'(\mu_i))^2=\alpha_n\frac{r_0^2}{2}(J_1(\mu_i))^2,$$

последнее получили с помощью формулы (12). Итак имеем:

$$\alpha_n\frac{r_0^2}{2}(J_1(\mu_i))^2=\int_0^{r_0}A\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)rJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)dr,\tag{18}$$

вычислим интеграл, для того чтобы применять свойства функции Бесселя умножим и поделим наш интеграл на $\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^4}{r_0^4}$, также вынесем A за интеграл, так как это какой-то параметр не зависящий от r, получили:

$$A\frac{r_0^4}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^4}\int_0^{r_0}\left(\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}-\frac{r^2}{r_0^2}\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}\right)r\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right)d\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r\right),$$

сделаем замену $x=\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0}r$, тогда верхний предел интегрирования поменяется и станет равняться $\mu_i^{(0)}$, итого после замены получили:

$$A\frac{r_0^4}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^4}\int_0^{\mu_i^{(0)}}\left(\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}-\frac{1}{r_0^2}x^2\right)xJ_0(x)dx.\tag{19}$$

Разобьем этот интеграл на разность двух интегралов:

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}}\left(\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}-\frac{1}{r_0^2}x^2\right)xJ_0(x)dx=\int_0^{\mu_i^{(0)}}xJ_0(x)\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}dx-\int_0^{\mu_i^{(0)}}\frac{1}{r_0^2}x^2xJ_0(x)dx\tag{20}$$

Заменим $xJ_0(x)$ в первом и втором интеграле по формуле (10) на $\left(xJ_1(x)\right)'$. Вычислим сначала первый интеграл

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}dx = \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}\int_0^{\mu_i^{(0)}} \left(xJ_1(x)\right)'dx = \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}\left[xJ_1(x)\right]_0^{\mu_i^{(0)}} =$$

$$= \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}\left(\mu_i^{(0)}\cdot J_1\left(\mu_i^{(0)}\right) - 0\cdot J_1(0)\right) = \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3}{r_0^2}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right),$$

итак, получили, что

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}dx = \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3}{r_0^2}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right). \tag{21}$$

Теперь сделаем такое же преобразование функции Бесселя во втором интеграле и посчитаем его с помощью интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}} \frac{1}{r_0^2}x^2xJ_0(x)dx = \frac{1}{r_0^2}\int_0^{\mu_i^{(0)}} x^2\left(xJ_1(x)\right)'dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \left(xJ_1(x)\right)'dx \\ du = 2xdx & v = xJ_1(x) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{r_0^2}\left(\left[xJ_1(x)x^2\right]_0^{\mu_i^{(0)}} - 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_1(x)xdx\right) = \frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) - 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_1(x)xdx\right),$$

используя формулу (12), имеем:

$$\frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) - 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_1(x)xdx\right) = \frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) + 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} x^2\left(J_0(x)\right)'dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \left(J_0(x)\right)'dx \\ du = 2xdx & v = J_0(x) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) + 2([x^2J_0(x)]_0^{\mu_i^{(0)}} - 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)dx)\right),$$

то что получилось в квадратных скобках будет обращается в ноль при подстановке пределов, так как при подстановке верхнего предела $J_0(x) = 0$ (потому что $\mu_i^{(0)}$, значения в которых функция Бесселя нулевого порядка обращается в ноль)а при подстановке нижнего $x^2 = 0$. Интеграл $\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)dx)$) мы уже считали выше и знаем, что он будет равен $\mu_i^{(0)}\cdot J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)$. Итого имеем:

$$\frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) + 2([x^2J_0(x)]_0^{\mu_i^{(0)}} - 2\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)dx)\right) = \frac{1}{r_0^2}\left((\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)}) - 4\mu_i^{(0)}\cdot J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)\right) =$$

$$= \frac{(\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)})}{r_0^2} - 4\frac{\mu_i^{(0)}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}{l^2}.$$

Значит второй интеграл равен:

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}} \frac{1}{r_0^2}x^2xJ_0(x)dx = \frac{(\mu_i^{(0)})^3J_1(\mu_i^{(0)})}{r_0^2} - 4\frac{\mu_i^{(0)}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}{r_0^2} \tag{22}$$

Подставим (22) и (23) в (21):

$$\int_0^{\mu_i^{(0)}} xJ_0(x)\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2}dx - \int_0^{\mu_i^{(0)}} \frac{1}{r_0^2}x^2xJ_0(x)dx = \frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3}{r_0^2}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right) -$$

$$-\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3 J_1(\mu_i^{(0)})}{r_0^2} + 4\frac{\mu_i^{(0)} J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}{r_0^2} = 4\frac{\mu_i^{(0)} J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}{r_0^2}$$

Подставим получившееся в (20), получили:

$$A\frac{r_0^4}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^4}\int\limits_0^{\mu_i^{(0)}}\left(\frac{\left(\mu_i^{(0)}\right)^2}{r_0^2} - \frac{1}{r_0^2}x^2\right)xJ_0(x)dx = A\frac{r_0^4}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^4}\cdot 4\frac{\mu_i^{(0)} J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}{r_0^2} = 4A\frac{r_0^2}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right).$$

Итак, мы нашли чему у нас равна правая часть в равенстве (19), подставим это выражение туда чтобы выразить α_n, имеем:

$$\alpha_n\frac{r_0^2}{2}(J_1(\mu_i))^2 = 4A\frac{r_0^2}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3}J_1\left(\mu_i^{(0)}\right),$$

откуда

$$\alpha_n = 8A\frac{1}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3 J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}.$$

После этого можно записать ответ подставив в ряд (18) α_n которые у нас получились сверху и β_n которые все равны нулю:

$$u = 8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\mu_i^{(0)}\right)^3 J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)}\cos\frac{\mu_n^{(0)}at}{r_0}J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right).$$

6. Заключение. В статье показана взаимосвязь между цилиндрическими функциями и задачами математической физики на тему колебаний круглой мембраны. При решении этих задач методом Фурье, возникает уравнение Бесселя, решением которого является линейная комбинация двух цилиндрических функций − Бесселя и Неймана. То есть решить задачу о колебаниях круглой мембраны, аналитически нельзя не зная этих функций, их свойств. Так же в статье приведен конкретный пример решенной задачи, где показано, как используются различные свойства и рекуррентные соотношения этих функций, при решении задач.

Благодарность. *Автор выражает благодарность своему научному руководителю Виктору Александровичу Полунину за неоценимое внимание и поддержку, за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.*

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. 1994. Задачи по математической физике. М., МГУ, 350.
2. Ватсон Г. Н. 1949. Теория Бесселевых функций. М., Изд. иностранной литературы, 798.
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2000. Уравнения математической физики: учеб. для вузов. М., Наука, 512.
4. Кафтанова Ю. В. 2009. Специальные функции математической физики Х., Новое слово, 596.
5. Самарский А. А., Тихонов А. Н. 1977. Уравнения математической физики. М., Наука, 734.

Поступила в редакцию 25.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Токарев Денис Алексеевич – бакалавр 4-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Полунин Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

polunin@bsu.edu.ru