Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 77–88.

Ряды в линейных нормированных пространствах

Поляков И. В.
1692969@bsu.edu.ru

Аннотация. Данная работа представляет собой обзор и анализ рядов в линейных нормированных пространствах. В ней рассматриваются основные понятия и определения, связанные с линейными нормированными пространствами, а также различные виды рядов и их свойства. Особое внимание уделяется изучению рядов в контексте линейных нормированных пространств и рассматриваются различные задачи, связанные с этой тематикой.

Ключевые слова: линейные нормированные пространства, ряды, сходимость, свойства рядов, задачи

Для цитирования: Поляков И. В. 2024. Ряды в линейных нормированных пространствах. *Студенческий математический журнал*, 2: 77–88.

---

1. Введение. В работе рассматривается тема «Ряды в линейных нормированных пространствах», которая занимает важное место в современной математике. Ряды играют ключевую роль в анализе и алгебре, а их изучение в рамках линейных нормированных пространств является необходимым для понимания их поведения и свойств.

Для полного исследования данной темы необходимо начать с введения в основные понятия и определения, связанные с линейными нормированными пространствами. Это позволит нам понять основы структуры данных пространств и их связь с рядами.

Далее мы рассмотрим различные виды рядов и их свойства. Анализ разновидностей рядов поможет нам понять их поведение в контексте линейных нормированных пространств и выявить особенности их сходимости.

Особое внимание уделим условиям, при которых ряды могут быть представлены в виде элементов линейных нормированных пространств. Это позволит нам установить критерии принадлежности рядов к определенным пространствам и выявить их свойства в этом контексте.

Наконец, мы рассмотрим примеры решения рядов в линейных нормированных пространствах. Это поможет нам применить полученные знания на практике и увидеть их применимость в различных математических задачах и приложениях.

Таким образом, изучение рядов в линейных нормированных пространствах представляет собой важную и перспективную область математики, имеющую широкий спектр применений и значимость в различных научных дисциплинах.

2. Определения и основные понятия. Перед изучением рядов в линейно нормированных пространствах необходимо ознакомиться с некоторыми ключевыми определениями. Вот список определений, которые могут быть полезны при изучении этой темы:

Согласно книге [6] выпишем определение:

Определение 2.1. *Пусть M - произвольное множество, и пусть каждой паре его элементов x, y сопоставлено неотрицательное число $\rho(x, y)$ так, что для всех $x, y, z \in M$ выполнено:*

1. $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *- симметрия;*
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x)$ *- неравенство треугольника.*

Функция ρ называется метрикой (расстоянием), а само множество M, снабженное метрикой – метрическим пространством.

Согласно книге [1] выпишем определение:

Определение 2.2. *Пусть X - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется нормой на X, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{P}$*

1. $||x|| = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0;$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||;$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Согласно книге [4] выпишем определение:

Определение 2.3. *Линейное пространство с фиксированным на нем скалярным произведением называется* ***евклидовым*** *пространством. [4]*

Согласно книге [1] выпишем определение:

Определение 2.4. *Пусть X – евклидово пространство.*

1. *Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется* ***ортогональной****, если $\forall\ \alpha, \beta \quad (\alpha \neq \beta \longrightarrow e_\alpha \perp e_\beta)$.*
2. *Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется* ***ортонормированной****, если она ортогональная и нормированная, т.е.*

$$\forall\ \alpha, \beta \quad (e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Таким образом, если $\{e_\alpha\}$ - ортогональная система и все $e_\alpha \neq 0$, то $\{\frac{e_\alpha}{||e_\alpha||}\}$ - ортонормированная система.

3. *Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется **тотальной**, если $(\forall\ \alpha\ \ x \perp e_\alpha) \to x = 0$.*

Согласно книге [6] выпишем определение:

Определение 2.5. *Линейное пространство L называется нормированным, если любому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число, называемое нормой и обозначаемое $||x||$.*

Согласно книге [1] выпишем определение:

Определение 2.6. *Пусть X – нормированное пространство.*

1. *Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется **нормированной**, если*
$$\forall \quad \alpha \quad ||e_\alpha|| = 1.$$
2. *Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется **полной** в X, если*
$$\overline{\langle e \rangle_\alpha} = X$$
3. *Система векторов $\{e_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется **базисом**, если*
$$\forall x \in X \quad \exists!\ \lambda_n \subset \mathbb{P}: \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Согласно книге [5] выпишем определения:

Определение 2.7. *Полное нормированное пространство называется банахово пространство.*

Определение 2.8. *Полное пространство - пространство, в котором любая фундаментальная последовательности сходится к элементу этого же пространства.*

Определение 2.9. *Множество называется ограниченным, если оно содержится в каком-нибудь шаре.*

Определение 2.10. *Последовательности называется фундаментальной если: $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : ||xn - xm|| < \epsilon$ для всех n, m, N_ϵ*

Определение 2.11. *Пусть E - линейное пространство, пара (x, y) называется скалярным произведением для $x, y \in E$, если*

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *только при* $x = 0$.

Определение 2.12. *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется **гильбертовым пространством**. Обозначим его H.*

Определение 2.13. *Пусть H - гильбертово пространство, K - поле действительных или комплексных чисел, если $Z \subset H$ и для любых $x, y \in Z$, $\alpha, \beta \in K$ следует, что $\alpha x + \beta y \in Z$, то Z называется линейным многообразием.*

Определение 2.14. *Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.*

Определение 2.15. *Пусть H - гильбертово пространство, $M \subset H$, тогда подпространство $M^\perp = x \in H : \forall y \in M \to (x, y) = 0$ называется **ортогональным дополнением**.*

3. Линейное нормированное пространство. Согласно книге [6] выпишем определение:

Определение 3.1. *Линейное пространство L называется нормированным, если любому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число, называемое нормой и обозначаемое $||x||$, причем выполнено:*

1. $||x|| \geq 0$, *причем* $||x|| = 0$ *только при* $x = 0$;
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, $x, y \in L$;
3. $||\alpha x|| = |a| \cdot ||x||\ \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Линейное нормированное пространство становится метрическим, если ввести в нем расстояние $\rho(x, y) = ||x - y||$. Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств 1–3 нормы. Например, проверим свойство 2 (симметрия).
$$\rho(y, x) = ||y - x|| = ||(-1) \cdot (x - y)|| = |-1| \cdot ||x - y|| = \rho(x, y).$$

Согласно книге [3] выпишем теорему:

Теорема 3.1. *Пусть $e_1, ..., e_m$ линейно независимы в нормированном пространстве X. Тогда*
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,n} e_k \to 0 \iff \forall k \in \overline{1, m} \quad \lambda_{k,n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,n} e_k \to 0.$$

Предположим противное. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $\mu_n := \sum_{k=1}^m |\lambda_{k,n} e_k| \geq \alpha > 0$. В силу ограниченности $\gamma_{k,n} := \lambda_{k,n}/\mu_n$ опять можно считать, что $\gamma_{k,n} \underset{n\to\infty}{\to} \gamma_{k,0} \implies$
$$\frac{z_n}{\mu_n} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,n} e_k \to \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,0} e_k = 0 \implies \forall k \in \overline{1, m} \ \ \gamma_{k,0} = 0 \implies$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,0} = 0 \tag{1}$$

Так как $\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,n} = 1$, то и $\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,0} = 1$. Но это противоречит равенству 1.

Следствие. Справедливы следующие утверждения:
1. В конечномерном нормированном пространстве сходимость покоординатная.
2. Все конечномерные пространства одинаковой размерности и над одним полем изоморфны как линейные топологические пространства.
3. Любые две нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.
4. В конечномерном нормированном пространстве любое ограниченное множество предкомпактно.

Замечание. Любое абсолютно выпуклое тело в $\mathbb{R}^k$, не содержащее прямой, может быть единичным шаром в некотором нормированном пространстве $< \mathbb{R}^k, ||\cdot|| >$.

Согласно книге [3] выпишем определение:

Определение 3.2. *Подпространством нормированного пространства называется замкнутое линейное многообразие.*

Согласно книге [3] выпишем утверждения:

Утверждение 3.1. *Любое конечномерное многообразие в нормированном пространстве замкнуто, т. е. является подпространством нормированного пространства.*

Утверждение 3.2. *Пусть X – нормированное пространство, X_1 – его конечномерное подпространство. Тогда*

$$\forall x \in X \exists x_1 \in X_1 \rho(x, X_1) = ||x - x_1||.$$

Утверждение 3.3. *Пусть X - нормированное пространство, $X1, X2$ - его подпространства, причем X_2 конечномерно. Тогда $X_1 + X_2$ - подпространство.*

Доказательство. Требуется доказать только замкнутость $X_1 + X_2$ и лишь в случае, когда $X2 =< e >$ и $e \notin X_1$.

Пусть $x_n + \lambda_n e \to x_0, x_n \subset X_1$.

1. Если λ_n ограничена, то $\exists \lambda_{nk} : \lambda_{nk} \to \lambda_0 \implies$

$$x_{nk} = -\lambda_{nk} e + (x_{nk} + \lambda_{0e}) \to -\lambda_0 e + x_0 \in X_1 \implies$$

$$x_0 = (x_0 - \lambda_0 e) + \lambda_0 e \in X_1 + < e > .$$

2. Если λ_n неограничена, то $\exists \lambda_{nk} : \lambda_{nk} \to \infty \implies$

$$\frac{1}{\lambda_{nk}}(x_{nk} + \lambda_{nk} e) = \frac{1}{\lambda_{nk}} x_{nk} + e \to 0 \implies$$

$$\frac{1}{\lambda_{nk}} x_{nk} \to -e \in X_1 \text{ - противоречие.}$$

Согласно книге [3] выпишем лемму:

Лемма 3.1. (Ф. Рисс) (о почти перпендикуляре). Пусть X - нормированное пространство, X_1 - его подпространство и $x_0 \notin X_1$. Тогда

$$\forall \alpha \in (0;1) \exists e_\alpha : ||e_\alpha|| = 1 \wedge e\alpha \in < x_0, X_1 > \wedge \rho(e_\alpha, X_1) \geq \alpha.$$

Доказательство. Так как $x_0 \notin X_1$ и X_1 замкнуто, то $\beta := \rho(x_0, X_1) > 0$. По определению $\rho(x_0, X_1)$ существует $x_\alpha \in X_1 : 0 \neq ||x_0 - x_\alpha|| < \beta/\alpha$. Пусть $e_\alpha := \frac{x_0 - x\alpha}{||x_0 - x_\alpha|| \in < x_0, X_1 >.}$ Тогда $\forall x \in X_1$

$$||e_\alpha - x|| = \frac{||x_0 - (x\alpha + ||x_0 - x_\alpha|| \cdot x)||}{||x_0 - x_\alpha||} \geq \frac{\beta}{||x_0 - x_\alpha||} \geq \alpha.$$

Замечание. Если $\exists x_1 \in X_1 : ||x_0 - x_1|| = \rho(x_0, X_1)$, то

$$\exists e : ||e|| = 1 \wedge e \in < x_0, X_1 > \wedge \rho(e, X_1) = 1$$

Следствие. Справедливы следующие утверждения:
1. Пусть X - нормированное пространство, X_1 - его конечномерное подпространство и $x_0 \notin X_1$. Тогда

$$\exists e : ||e|| = 1 \wedge e \in < x_0, X_1 > \wedge \rho(e, X_1) = 1$$

2. Для любой линейно независимой системы $\{x_n\}$ в нормированном пространстве найдется линейно независимая система $\{e_n\}$ такая, что

$$\forall n ||e_n|| = 1, < e_1, ..., e_n > = < x_1, ..., x_n >$$

и

$$\rho(e_n, < e_1, ..., e_{n-1} >) = 1.$$

3. В бесконечномерном нормированном пространстве шар $B[a, r]$ при $r > 0$ некомпактен.

4. Разновидности рядов и их свойства. Далее следует соответствующий текст.

Согласно книге [2] выпишем определения, утверждения и теоремы:

Рассмотрим числовые ряды.

Определение 4.1. *Числовой ряд - это выражение вида* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$*, где члены ряда* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *это действительные или комплексные числа,* u_n *общий член ряда.*

Ряд задан, если известен общий член ряда un, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$

n-я частичная сумма ряда *- это сумма первых n членов ряда*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Ряд сходится, *если существует конечный предел*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{2}$$

последовательности частичных сумм ряда.

Предел 2 называется ***сумма ряда*** $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд сходится*, если* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *не существует или равен бесконечности.*

Свойства рядов

- **Свойство 1.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

  сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{nc=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots \tag{4}$$

  где c - произвольное число, также сходится и его сумма равна cS . Если же ряд 3 расходится и $c \neq 0$, то и ряд 4 расходится.

- **Свойство 2.** Если сходится ряд 3 и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{5}$$

  а их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \tag{6}$$

  причем сумма каждого равна $S_1 \pm S_2$

- **Свойство 3.** Если к ряду 3 прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд 3 сходятся или расходятся одновременно.

Определение 4.2. *Ряд геометрической прогрессии, это ряд вида:*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0)$$

Исследуем данный ряд на сходимость.

Сумма первых n первых членов прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim \frac{q^n}{1-q}$$

Определение 4.3. *Ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

называется ***гармоническим рядом****. У данного ряда каждый член является средним гармоническим для двух соседних членов.*

Гармоническое среднее чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *− число h, обратное которому есть среднее арифметическое чисел, обратных данным числам:*

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Однако гармонический ряд расходится.*

Признак Даламбера

Теорема 4.1. *пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ *и расходится при* $l > 1$.

Радикальный признак Коши

Теорема 4.2. *пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ *и расходится при* $l > 1$.

Рассмотрим функциональные ряды.

Определение 4.4. *Ряд* $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$, *члены которого есть функции от* x, *называется **функциональным рядом**.*

Придавая определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Область сходимиости функционального ряда - это совокупность значений x, *при которых функции* $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ *определены и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$. *- сходится*

Областью сходимости чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX. Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

S(x) называется суммой функционального ряда.

Представим S(x) в виде

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x) = u_1(x) + ... + u_n(x), R_n(x) = u_{n+1}(x) + ..., R_n(x)$ *называется **остатком функционального ряда.***

Определение 4.5. *Сходящийся функциональный ряд*

$$\sum_{\infty}^{n=1} u_n(x)$$

*называется **равномерно сходящимся** в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $N \in \mathbb{N}$, *что при* $n \geq N$

$$|R_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \quad x \in X$$

При этом сумма $S(x)$ *равномерно сходящегося ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *в области* x, *где* $u_n(x)(n = 1, 2, 3...)-$ *непрерывные функции, есть непрерывная функция.*

Признаки равномерной сходимости рядов

1. **Признак Вейерштрасса**

   Если функции $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x), ...$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, причем числовой ряд

   $$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

   сходится, то функциональный ряд

   $$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

   в этой области сходится равномерно.

2. **Признак Абеля** Рассмотрим ряд

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + ... + a_n(x)b_n(x) + ... \tag{7}$$

   Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно в области D, а функции $a_n(x)$(при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности (при любых x, n) ограничены:

   $$|a_n(x)| \leq K$$

   Тогда ряд 7 сходится равномерно в области D.

3. **Признак Дирихле** Пусть частичные суммы $B_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ в совокупности (при любом x, n) ограничены

   $$|B_n(x)| \leq M$$

   а функции $a_n(x)$(при каждом x) образует монотонную последовательность, которая сходится к 0 равномерно в области D. Тогда и ряд 7 сходится равномерно в этой области.

Рассмотрим степенные ряды.

Определение 4.6. ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +, \ldots, + a_n x^n + \ldots \tag{8}$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 +, \ldots \tag{9}$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ - действительные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема 4.3. ***(Теорема Абеля)***

1. *Если степенной ряд 8 сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству*

$$|x| < |x_0|$$

2. *Если ряд 8 расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого*

$$|x| > |x_0'|$$

5. Ряды в Линейных нормированных пространствах.

Согласно книге [3] выпишем определения, теоремы, свойства.

Ряды в нормированных пространствах

Определение 5.1. *Пусть $\{x_n\} \subset X$ - нормированное пространство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называется* ***сходящимся****, если*

$$\exists \hat{x} \in X : \sum_{n=1}^{m} x_n \underset{m\to\infty}{\to} \hat{x}$$

Утверждение 5.1. *(свойства рядов в нормированном пространстве).*

1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в нормированном пространстве X сходится, то $x_n \to 0$.*
2. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в нормированном пространстве X сходится, то $\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \to 0$ при $N \to \infty$.*
3. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ в нормированном пространстве X сходится, то $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{P} \sum_{n=4}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} y_n$*
4. *В банаховом пространстве для рядов справедлив критерий Коши.*
5. *В банаховом пространстве, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, при этом*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$$

Доказательство. $\left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n$

Замечание. Утверждение *(5.1.5)* для $X = C[a;b]$ есть признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Определение 5.2. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в нормированном пространстве X называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$.*

Теорема 5.1. *(критерий банаховости пространства). Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем любой абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.*

Доказательство. Это утверждение *(*)*. Пусть $X \supset \{x_n\}$ - фундаментальная последовательность в нормированном пространстве X. Тогда найдется такая ее подпоследовательность $\{x_n\}$, что $||x_{nk} - x_{nk+1}|| - x_{nk} \leq 2^{-k}$. Поэтому ряд $x_{n1} + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{nk+1} - x_{nk})$ абсолютно сходится, а, значит он является сходящимся. Но $x_{n1} + \sum_{n=1}^{k} (x_{nk+1} - x_{nk}) = x_{nk+1}$, поэтому $\{x_{nk}\}$ и $\{x_n\}$ - сходящиеся последовательности

Ряды Фурье в евклидовых и гильбертовых пространствах

Утверждение 5.2. *Пусть $\{e_n\}$ - ортонормированная система в евклидовом пространстве X и $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Тогда*

$$\forall n \in \mathbb{N} \lambda_n = (x, e_n) \text{ и } |||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

Следствие. Разложение элемента евклидова пространства в ряд по ортономированной системе единственно.

Определение 5.3. *Пусть $\{en\}$ - ортонормированная система в евклидовом пространстве X. Рядом Фурье элемента $x \in X$ (по ортонормированной системе $\{e_n\}$) называется ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n := \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

Теорема 5.2. *(экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье). Если $\{en\}$ - ортонормированная система в евклидовом пространстве X, то*

$$\hat{x}_m := \sum_{n=1}^{m} c_n(x)e_n = Pr_{<e_1,...,e_m>}(x).$$

Таким образом, $\hat{x}_m$ элемент наилучшего приближения вектора x элементами из $< e_1, ..., e_m >$.

Доказательство. $(x - \hat{x}_m \perp < e_1, ..., e_m >)$.

Следствие. Если L - конечномерное подпространство евклидова пространства, то $\forall x \in X \exists Pr_L(x)$.

Теорема 5.3. *(неравенство Бесселя). Если $\sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)e_n$ - ряд Фурье элемента $x \in X$ евклидова пространства X, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c(x)|^2 \leq ||x^2||.$$

Доказательство. $||x||^2 = ||(x - \hat{x}_m) + \hat{x}_m||^2 =$

$$= ||x - \hat{x}_m||^2 + ||\hat{x}_m||^2 \geq ||\hat{x}_m||^2 = \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2$$

Следствие. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ - ряд Фурье элемента x евклидова пространства X. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} |c(x)|^2$ сходится.
2. $\left\{ \sum_{n=1}^{m} c_n(x)e_n \right\}$ - фундаментальная последовательность.
3. В гильбертовом пространстве любой ряд Фурье является сходящимся.
4. (Теорема Рисса - Фишера). Если X - гильбертово пространство, то

$$\forall \alpha_n \subset \mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \text{ - сходится } \implies \exists x \in X : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right)$$

5. Если X - гильбертово пространство, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n = Pr_{\overline{< \{e_n\} >}}(x).$$

6. В гильбертовом пространстве ортонормированная система полна тогда и только тогда, когда она тотальна.

Определение 5.4. *Ортонормированная система $\{e_n\}$ называется* ***замкнутой****, если*

$$\forall x ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)^2. \tag{10}$$

Равенство 10 называется равенством Парсеваля - Стеклова.

Теорема 5.4. *Пусть $\{e_n\}$ - ортонормированная система в евклидовом пространстве. Следующие условия эквивалентны:*
1. $\{e_n\}$ замкнута. 2. $\{e_n\}$ - базис. 3. $\{e_n\}$ полна.

Доказательство. Пусть $\hat{x}_m = \sum_{n=1}^{m}$. Поскольку

$$||x||^2 = ||x - \hat{x}_m||^2 + \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2,$$

то в силу равенства 10 получим $x_m \to x$, т.е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n.$$

Единственность этого представления уже доказана (см. следствие утверждения 2). Пусть $\{e_n\}$ полна. Тогда

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists y_{x,\varepsilon} \in < e_n >: ||x - y_{x,\varepsilon}|| < \epsilon.$$

Так как $y_{x,\varepsilon} \in < \{e_n\} >$, то

$$\exists m_0 : y_{x,\varepsilon} \in < e_1, ..., e_{m_0} > =: X_{m0},$$

поэтому $\exists m \geq m_0 y_{x,\varepsilon} \in X_m$ и

$$\varepsilon^2 > ||x - y_{x,\varepsilon}||^2 \geq \rho^2(x, < e_1, ..., e_m >) = \rho^2(x, \hat{x}_m) = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2 \geq 0$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\varepsilon^2 = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \geq 0 \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2$$

Следствие. В сепарабельном евклидовом пространстве всегда есть ортонормированный базис.

Утверждение 5.3. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства над одним полем изоморфны.*

Доказательство. Пусть X и $\widetilde{X}$ - бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства над полем $\mathbb{P}$, $\{e_n\}$ – базис в X, а $\widetilde{e_n}$ – базис в $\widetilde{X}$. Тогда отображение $f : X \to \widetilde{X}$, определенное формулой $f(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \widetilde{e_n}$, линейно, биективно и сохраняет скалярное произведение.

6. Решение задач.

Задача 6.1. *Исследовать на сходимость последовательность* $\{x\} = \{\varepsilon_{nk}^{\infty k=1}\}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \leq n, \\ \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n, \end{cases}$$

В пространствах c_0, c, l_p $(1 \leq p \leq \infty)$.

Решение. Проверим, каким из этих пространств принадлежит $\{x_n\}$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{nk} = \lim_{\substack{k>n \\ k\to\infty}} \varepsilon_{nk} = \lim_{k\to\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right) = 0.$$

Значит, $\{x_n\} \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Далее, для $k > n$ имеем

$$|\varepsilon_{nk}| = \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right| =$$

$$= 2\left| \sin\frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{2\sqrt[3]{k+1}\sqrt[3]{k}} \right| \cdot \left| cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\frac{3}{k+1}} \right) \right| \underset{k\to\infty}{\sim}$$

$$\sim 2\sin\frac{1}{2\sqrt[3]{k(k+1)}(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2})} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3k^{4/3}}$$

так как $x_n \in l_p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\varepsilon_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$ при $p \geq 1$ конечна, то $x_n \in l_p$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ принадлежит пространствам $c_0, c, l_p, 1 \leq p \leq \infty$. Из сходимости по норме в этих пространствах следует покоординатная сходимость. Найдем покоординатный предел, если он существует.

Для всякого фиксированного k имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = \lim_{\substack{k>n \\ k\to\infty}} \varepsilon_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \varepsilon_k$$

Значит, покоординатно

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x = \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

и, если x_n сходится по норме, то сходится к этому x.

Проверим, каким пространствам принадлежит x. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0,$$

то $x \in c_0 \subset c \subset l_\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k|^p$ сходится $\iff$ $p > 3$, значит $x \in l_p, 3 < p < \infty$ и $x \notin l_p, 1 \leq p \leq 3$. Следовательно, при $1 \leq p \leq \infty$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится в l_p.

В пространствах c_0, c, l_∞ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, поскольку справедливы следующие соотношения:

$$||x_n - x|| = \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} |\varepsilon_{nk} - \varepsilon_k| = \underset{k>n}{sup} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{k>n}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right| + \sup_{k>n}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| + \sup_{k>n}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

В пространствах $l_p, 3 < p < \infty$, сходимость тоже есть, поскольку справедливы соотношения

$$||x_n - x|| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varepsilon_{nk} - \varepsilon_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Обе последние суммы стремятся к нулю при $n \to \infty$ как остатки сходящихся рядов, так как

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{4/3}},$$

а ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{4p/3}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{p/3}}$ при $p > 3$ сходятся.

Задача 6.2. *Рассмотрим пространство s - множество последовательностей $x = \{\varepsilon_n\}$, $y = \{\eta_n\}$, $(n \in N)$ с метрикой*

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\varepsilon_k - \eta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \eta_k|}$$

Доказать, что s - метрическое пространство. Какова сходимость в этом пространстве?

Решение. Отметим, прежде всего, что ряд, определяющий метрику, сходится, так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$

Далее, аксиомы тождества и симметрии очевидны.

Докажем неравенство треугольника.

Воспользуемся числовым неравенством:

$$0 \leq \alpha \leq \beta \implies \frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta}$$

Имеем

$$\frac{|\varepsilon_k - \eta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \eta_k|} \leq \frac{|\varepsilon_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \leq \frac{|\varepsilon_k - \zeta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + +|\zeta_k - \eta_k|}$$

где $\zeta_k (k \in N)$ - координаты точки z.

Умножим обе части этого неравенства на $\frac{1}{2^k}$ и просуммируем:

$$\rho_s(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\varepsilon_k - \eta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \eta_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\varepsilon_k - \zeta_k|}{1 + |\varepsilon_k - \zeta_k| +} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} =$$
$$\rho_s(x,z) + \rho_s(z,y)$$

Покажем, что сходимость по метрике пространства s есть сходимость по координатам.

Прежде всего, приведем следующее очевидное соотношение:

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} \to 0 (n \to \infty) \implies a_n \to 0 (n \to \infty)$$

Пусть теперь последовательность $x_n = \{\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, ..., \varepsilon_k^n ...\}$ при $n \to \infty$ сходится по метрике пространства s к элементу $x_0 = \{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, ..., \varepsilon_k^0 ...\}$ т.е.

$$\rho_s(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|}{1 + |\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

В силу необходимого условия сходимости числового ряда получаем
$\frac{1}{2^k}\frac{|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|}{1+|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|} \to 0 \quad (n \to \infty)$ при фиксированных $k = 1, 2, ...$

Следовательно, учитывая указанное выше числовое соотношение, выводим $\varepsilon_k^n \to \varepsilon_k^0 (n \to \infty, k = 1, 2, ...)$, т.е. сходимость по координатам.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполняется последнее соотношение при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Зададимся $\varepsilon > 0$ найдем номер $p \in N$ такой, что

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Для конечного числа индексов $k = 1, 2, \dots p$ подберем общий номер N такой, что

$$|\varepsilon_k^n \to \varepsilon_k^0| \leq \frac{\varepsilon}{2}(n > N; k = 1, 2, ..., p).$$

Тогда при $n > N$ имеем

$$\rho_s(x_m x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|}{1 + |\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|} + \sum_{k=1+p}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|}{1 + |\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^0|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1+p}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

что и требовалось доказать. Установим полноту пространства s.

Пусть $x_n = \{\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, ..., \varepsilon_k^n ...\}$ фундаментальная последовательность элементов из s, т.е.

$$\rho_s(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^m|}{1 + |\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^m|} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

Отсюда следует, что каждая из числовых последовательностей $\{\varepsilon_k^{(1)}\}, \{\varepsilon_k^{(2)}\}, \{\varepsilon_k^{(n)}\}, \dots$ также фундаментальна, а потому существует предел $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_k^{(n)} = \varepsilon_k^{(0)} (k = 1, 2, \dots)$. Полагая $x_0 = \{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, ..., \varepsilon_k^0 ...\}$, мы видим, что $x_n \to x_0$, так как сходимость в s покоординатная.

Задача 6.3. *Рассмотрим линейное нормированное пространство $X = C([0, 1])$ всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $|f| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(t))$, $(f_n(t) = t^n$ для $t \in [0, 1]$.*

Решение. Посчитаем норму членов ряда: $|f_n| = \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Применим признак Вейерштрасса: если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $|a_n| \leq b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В данном случае, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ является телескопическим и равен 1.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(t)$ сходится равномерно на $[0, 1]$ по норме $| \cdot |$ в пространстве $X = C([0, 1])$.

Таким образом, мы доказали сходимость ряда в заданном линейном нормированном пространстве $X = C([0, 1])$.

Задача 6.4. *Допустим, у нас есть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$, которая удовлетворяет условиям:*

Решение. $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi])$, то есть $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|, dx < \infty$. $f(x)$ периодична с периодом 2π, то есть $f(x + 2\pi) = f(x)$ для всех x).

Мы хотим разложить эту функцию $f(x)$ в ряд Фурье в линейно нормированном пространстве. Для этого мы используем пространство квадратично интегрируемых функций L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$, где норма определяется как:

$$|f|2 = \left(\int -\pi^{\pi} |f(x)|^2, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, чтобы найти коэффициенты ряда Фурье c_n, мы используем формулу:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}, dx$$

где e^{inx} - это комплексная экспонента.

Итак, для данной функции $f(x)$ мы можем найти коэффициенты c_n и получить её разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

где сходимость ряда обеспечивается в смысле L^2-нормы.

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ находится в линейно нормированном пространстве L^2.

Задача 6.5. *Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который является знакочередующимся рядом.*

Решение. Линейность:

Для проверки линейности ряда нужно убедиться, что для любых констант c_1 и c_2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 \frac{(-1)^n}{n} + c_2 \frac{(-1)^n}{n})$ также принадлежит к данному пространству. Давайте это проверим.

Пусть $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ и $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Тогда для любых c_1 и c_2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 \frac{(-1)^n}{n} + c_2 \frac{(-1)^n}{n})$ будет линейным.

Нормированность:

Норма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ определяется как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Для определения нормы ряда нам нужно убедиться, что эта сумма конечна. Это следует из того, что ряд гармонический, и его сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Абсолютная сходимость:

Чтобы показать абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, можно воспользоваться признаком Лейбница. Условия признака выполняются, так как общий член убывает по модулю и стремится к нулю.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ удовлетворяет условиям линейной нормированности для знакочередующихся рядов.

Задача 6.6. *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, *который является знакопостоянным рядом.*

Решение. Линейность:

Для проверки линейности ряда нужно убедиться, что для любых констант c_1 и c_2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 \frac{1}{n^3} + c_2 \frac{1}{n^3})$ также принадлежит к данному пространству. Давайте это проверим.

Пусть $a_n = \frac{1}{n^3}$ и $b_n = \frac{1}{n^3}$. Тогда для любых c_1 и c_2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 \frac{1}{n^3} + c_2 \frac{1}{n^3})$ будет линейным.

Нормированность:

Норма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ определяется как $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Для определения нормы ряда нам нужно убедиться, что эта сумма конечна. Это следует из того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ является сходящимся.

Абсолютная сходимость:

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ является знакопостоянным и его общий член убывает к нулю, можно сказать, что он сходится абсолютно.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ удовлетворяет условиям линейной нормированности для знакопостоянных рядов.

Задача 6.7. *Рассмотрим функцию* $f(x) = e^x$ *и ряд Тейлора для нее в окрестности точки* $x = 0$.

Решение. Функция $f(x) = e^x$ имеет следующие производные:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad \text{и так далее}$$

В точке $x = 0$, значения всех этих производных равны:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1, \quad \text{и так далее}$$

С учетом этих значений, разложение функции e^x в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ принимает вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Этот ряд сходится к функции e^x на всей числовой прямой. Так как ряд Тейлора для функции e^x удовлетворяет свойствам линейности и нормированности, он находится в линейно нормированном пространстве.

Задача 6.8. *Рассмотрим последовательность функций* $f_n(x) = x^n$ *на интервале* $[0, 1]$. *Для этой последовательности функций мы можем построить ряд Лебега.*

Решение. Ряд Лебега для последовательности $f_n(x) = x^n$ на интервале $[0, 1]$ определяется как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

где коэффициенты a_n выбираются так, чтобы ряд сходился к любой функции $f(x)$ на интервале $[0, 1]$ по норме L^p.

Для нахождения коэффициентов a_n мы можем воспользоваться формулой для коэффициентов Фурье:

$$a_n = \frac{\langle f(x), f_n(x)\rangle}{\langle f_n(x), f_n(x)\rangle}$$

где $\langle f, g\rangle$ обозначает скалярное произведение двух функций.

В данном случае, для функции $f(x) = 1$ мы имеем:

$$\langle f(x), f_n(x)\rangle = \int_0^1 1 \cdot x^n, dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \langle f_n(x), f_n(x)\rangle = \int_0^1 x^n \cdot x^n, dx = \frac{1}{2n+1}$$

Подставляя эти значения, мы получаем:

$$a_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{n+1}$$

Таким образом, ряд Лебега для последовательности $f_n(x) = x^n$ на интервале $[0, 1]$ имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} x^n$$

Этот ряд является примером ряда Лебега, который находится в линейно нормированном пространстве.

Задача 6.9. *Для построения примера ряда Соболева, который находится в линейно нормированном пространстве, рассмотрим функцию* $f(x) = |x|$ *на интервале* $[-1, 1]$. *Для этой функции мы можем построить ряд Соболева.*

Решение. Ряд Соболева для функции $f(x) = |x|$ на интервале $[-1, 1]$ определяется как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

где $\phi_n(x)$ - функции, составляющие базис в пространстве Соболева, а a_n – их коэффициенты.

Для примера рассмотрим базис в пространстве Соболева, состоящий из функций Чебышева первого рода $T_n(x)$. Эти функции ортогональны на интервале $[-1, 1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Итак, базисные функции $\phi_n(x)$ для ряда Соболева будут функциями Чебышева $T_n(x)$, а коэффициенты a_n можно найти из условия ортогональности:

$$a_n = \frac{\langle f(x), \phi_n(x)\rangle}{\langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle}$$

где $\langle f, g\rangle$ обозначает скалярное произведение двух функций.

В данном случае, для функции $f(x) = |x|$ и функций Чебышева $T_n(x)$, скалярное произведение определяется как:

$$\langle f(x), \phi_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} |x| \cdot T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{и} \quad \langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, dx$$

Подставляя эти значения, мы можем вычислить коэффициенты a_n для каждой функции Чебышева $T_n(x)$. Таким образом, получим ряд Соболева для функции $f(x) = |x|$, который будет принадлежать линейно нормированному пространству.

7. Заключение. В ходе изучения темы «Ряды в линейных нормированных пространствах» мы обнаружили, что данная область математики играет ключевую роль в современном анализе и приобретает все большее значение в различных научных дисциплинах. Рассмотрение основных понятий, свойств различных видов рядов, а также их решений в линейных нормированных пространствах позволило нам глубже понять их структуру и значимость.

Одним из важных результатов нашего исследования является установление важности концепции линейных нормированных пространств для анализа и обобщения сходимости рядов. Мы увидели, какие пространства относятся к линейным нормированным и какие условия необходимы для того, чтобы ряды принадлежали к этим пространствам.

Кроме того, изучение различных разновидностей рядов и их свойств помогло нам понять, какие особенности могут возникать при работе с рядами в контексте линейных нормированных пространств. Примеры решения рядов позволили нам применить полученные знания на практике и увидеть их применимость в различных математических задачах.

Наше исследование подтвердило актуальность изучения рядов в линейных нормированных пространствах и их роль в современной математике. Дальнейшие работы в этой области могут направиться на более глубокое изучение специфических видов рядов и их применение в различных прикладных задачах. Это позволит расширить наше понимание математических концепций и продвинуть науку в целом.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Глазырина П. Ю., Дейкалова М. В., Коркина Л. Ф. 2016. Функциональный анализ. Типовые задачи. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 214.
2. Гредасова Н. В., Желонкина Н. И., Корешникова М. А., Полищук Е. Г., Андреева И. Ю. 2016. Ряды. Учебное пособие. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 116.
3. Данилин А. Р. 2007. Функциональный анализ. Учебное пособие. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 188.
4. Мельникова И. В., Бовкун В. А. 2022. Основы линейного функционального анализа. Учебное пособие. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 184.
5. Нуятов А. А. 2016. Практикум по функциональному анализу. Учебно - методическое пособие. Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 29.
6. Попов А. И., Попов И. Ю., 2020. Пространства и операторы. Учебное пособие. СПб., Университет ИТМО, 85.

Поступила в редакцию 23.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Поляков Иван Владимирович – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru