Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 67–76.

Краевые задачи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Вереитинова Г. А.
1667721@bsu.edu.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию теоретического материала по теме краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В статье рассматривается дифференциальное уравнение, для которого строится функция Грина. Вводится понятие собственных значений и собственных функций дифференциального уравнения. В заключении статьи приводятся подробное решение нескольких краевых задач для обыкновенных линейных уравнений, основанное на изученном теоретическом материале.

Ключевые слова: краевая задача, собственные значения, функция Грина

Для цитирования: Вереитинова Г. А. 2024. Краевые задачи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Студенческий математический журнал*, 2: 67–76.

---

1. Введение. В окружающем нас мире постоянно происходят различные физические процессы. Одни зависят от времени, а другие являются стационарными. Дифференциальные уравнения возникают во многих научных областях, так как с их помощью можно описать многие физические процессы. Однако, помимо самого уравнения необходимо задать краевые условия. Актуальным является решение краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих в математической физики [8, 9, 10].

В начале XX века в задачах математической физики функция влияния приобрела вид функции Грина, введенной сначала для задачи Штурма-Лиувилля. Далее понятие функции Грина было распространено на более общие задачи старших порядков. Хорошо известна и применима теория, когда краевую задачу на собственные значения можно решить прибегнув к представлению в виде интегрального уравнения Фредгольма. Однако в этом случае необходимо вычислить функцию Грина. [1, 3, 6, 7]

В настоящей работе рассмотрены краевые задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, решение которых определяется с помощью функции Грина.

2. Функции Грина. Рассмотрим дифференциальное выражение, коэффициентами которого являются функции от x

$$L(u) = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{du}{dx} + Cu. \tag{1}$$

Рассмотрим соответствующее сопряженное дифференциальное выражение

$$M(v) = \frac{d^2Av}{dx^2} - \frac{dBv}{dx} + Cv.$$

Заметим, что для того, чтобы выражение (1) было самосопряженным, оно должно совпадать с

$$M(u) = A\frac{d^2u}{dx^2} + (2\frac{dA}{dx} - B)\frac{du}{dx} + (\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{dB}{dx} + C)u.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: $B = \frac{dA}{dx}$.

Введем замену, полагая

$$A = p, \quad B = \frac{dp}{dx}, \quad C = q.$$

Тогда получим общее самосопряженное дифференциальное выражение второго порядка

$$L(u) = \frac{d(p\frac{du}{dx})}{dx} + qu.$$

Это дифференциальное выражение будем рассматривать при следующих условиях: при $x \in [a, b]$, функция q непрерывна, а функция $p > 0$ и является непрерывной сама и ее первая производная.

Если u и v означают две функции от x, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными при $x \in [a, b]$, то, складывая равенства

$$\frac{du}{dx}p\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(up\frac{dv}{dx}) - u\frac{d}{dx}(p\frac{dv}{dx}) \quad \text{и} \quad -quv = -uqv$$

получим

$$p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - quv = \frac{d}{dx}(up\frac{dv}{dx}) - uL(u).$$

Интегрируя в пределах от a до b, найдем

$$\int_a^b (p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - quv)dx = [up\frac{dv}{dx}]_a^b - \int_a^b uL(v)dx. \tag{2}$$

Отсюда, подставляя u и v, получим

$$\int_a^b (p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - quv)dx = [vp\frac{du}{dx}]_a^b - \int_a^b vL(u)dx.$$

Приравнивая друг к другу правые части получим формулу Грина

$$\int_a^b [vL(u) - uL(v)]dx = [p(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx})]_a^b. \tag{3}$$

Если в формуле (5) положить $u = v$, то она перейдет в следующую:

$$\int_a^b uL(u)dx = \int_a^b [qu^2 - p(\frac{du}{dx})^2]dx + [pu\frac{du}{dx}]_a^b. \tag{4}$$

Проблемы математической физики приводят к следующей задаче:

Определить функцию u от x, непрерывную вместе со своими первой и второй производными при $x \in [a, b]$, удовлетворяющую известному дифференциальному уравнению второго порядка и обращающуюся в ноль как при $x = a$, так и при $x = b$. Пусть u_1 и u_2- два независимых решения линейного дифференциального уравнения $L(u) = 0$, непрерывные при $a \le x \le b$ вместе со своими производными первого и второго порядков. Вообще говоря детерминант

$$\begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix} \tag{5}$$

отличен от нуля; тогда не возможно так определить постоянные c_1 и c_2, чтобы непрерывное при $a \le x \le b$ вместе со своими производными первого и второго порядков решение $u = c_1u_1 + c_2u_2$ уравнения $L(u) = 0$ обращалось в ноль при $x = a$ и при $x = b$.

Определение 2.1 *Функция $G(x, \xi)$ называется функцией Грина дифференциального выражения $L(u)$, если:*

1. *$G(x, \xi)$ непрерывна относительно x в интервале (a, b) и равна нулю при $x = a$ и при $x = b$;*
2. *Производные $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ непрерывны на отрезке $x \in [a, b]$ за исключением точки $x = \xi$;*
3. *Первая производная $\frac{\partial G}{\partial x}$ в точке $x = \xi$ удовлетворяет условию*

$$p(\xi)[\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\frac{\partial G}{\partial x})_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\frac{\partial G}{\partial x})_{x=\xi-\varepsilon}] = -1;$$

4. *$G(x, \xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L(u) = 0$.*

В случае, когда детерминант (9) отличен от нуля, функция Грина $G(x, \xi)$ может быть образована следующим образом: выражение

$$\gamma(x, \xi) = \pm\frac{1}{2}\frac{u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)\frac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\frac{du_2(\xi)}{d\xi}},$$

где верхний знак относится к значениям x, удовлетворяющим условию $x \le \xi$, нижний знак относится к значениям x, удовлетворяющим условию $x \geqslant \xi$б рассматриваемое как функция от x, представляет собой решение уравнения $L(u) = 0$, которое непрерывно при $x = \xi$, между тем как его первая производная при $x = \xi$ испытывает разрыв, представляемый равенством

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\frac{d\gamma}{dx})_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\frac{d\gamma}{dx})_{x=\xi-\varepsilon} = -1;$$

Если определить константы c_1 и c_2 так, чтобы выражение

$$G(x, \xi) = \frac{\gamma(x, \xi)}{p(\xi)} + c_1u_1(x) + c_2u_2(x) \tag{6}$$

обращалось в ноль при $x = a$ и $x = b$, то это выражение $G(x, \xi)$ удовлетворяет условиям, наложенным на функцию Грина. Если определитель (9) не обращается в нуль, то для c_1 и c_2 получаются определенные конечные значения.

Можно так выбрать u_1 и u_2, чтобы u_1 обращалось в нуль при $x = a$, а u_2 - при $x = b$ и чтобы выражение

$$u_2\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du_2}{dx}$$

равное $\frac{const}{p(x)}$, принимало значение $\frac{1}{p(x)}$. Тогда будет

$$\frac{\gamma(x, \xi)}{p(\xi)} = \pm\frac{1}{2}[u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)],$$

выражение (6), если в нем положить

$$c_1 = \frac{1}{2}u_2(\xi) \quad c_2 = \frac{1}{2}u_1(\xi),$$

перейдет в выражение

$$G(x,\xi)=\begin{cases} u_2(\xi)u_1(x), & \text{при} x\le\xi,\\ \\ u_1(\xi)u_2(x), & \text{при} x\geqslant\xi,\end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющее краевым условиям.

Утверждение 2.1 [4] *Функция Грина $G(x,\xi)$ представляет собой симметрическую функцию от x и ξ.*

Доказательство. Если ξ_1 и $\xi_2>\xi_1$ - два числа из интервала (a,b), то согласно первой формуле (7) будет

$$G(\xi_1,\xi_2)=u_1(\xi_1)u_2(\xi_2),$$

а согласно второй формуле (7)

$$G(\xi_2,\xi_1)=u_1(\xi_1)u_2(\xi_2).$$

Следовательно

$$G(\xi_1,\xi_2)=G(\xi_2,\xi_1). \tag{8}$$

Пользуясь только свойствами, определяющими функцию Грина, формулу (8) можно доказать следующим образом:

понимая под ε маленькое положительное число, применим формулу (7), в которой положим

$$u=G(x,\xi_1)=G_1(x),$$
$$v=G(x,\xi_2)=G_2(x),$$

к трем интервалам $(a,\xi_1-\varepsilon)$, $(\xi_1+\varepsilon,\xi_2-\varepsilon)$, $(\xi_2+\varepsilon,b)$ и сложим три полученных таким образом равенства.

Так как

$$L[G_1(x)]=0,\quad L[G_2(x)]=0,$$

то левая часть полученного равенства обращается в ноль и будем иметь

$$[p(G_2\frac{dG_1}{dx}-G_1\frac{dG_2}{dx})]_a^{\xi_1-\varepsilon}+[p(G_2\frac{dG_1}{dx}-G_1\frac{dG_2}{dx})]_{\xi_1+\varepsilon}^{\xi_2-\varepsilon}+$$
$$[p(G_2\frac{dG_1}{dx}-G_1\frac{dG_2}{dx})]_{\xi_2+\varepsilon}^{b}=0.$$

Функции G_1 и G_2 обращаются в нуль при $x=a$ и при $x=b$. Если примем $\lim\varepsilon=0$ и обратим внимание на то, что $\frac{dG_2}{dx}$ при $x=\xi_1$ и $\frac{dG_1}{dx}$ при $x=\xi_2$ непрерывны, то из предыдущего равенства получим

$$p(\xi_1)G_2(\xi_1)\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[(\frac{dG_1}{dx})_{x=\xi_1-\varepsilon}-(\frac{dG_1}{dx})_{x=\xi_1+\varepsilon}]-$$

$$p(\xi_2)G_1(\xi_2)\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[(\frac{dG_2}{dx})_{x=\xi_2-\varepsilon}-(\frac{dG_2}{dx})_{x=\xi_2+\varepsilon}]=0$$

Принимая во внимание, что имеют место соотношения

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[(\frac{dG_1}{dx})_{x=\xi_1+\varepsilon}-(\frac{dG_1}{dx})_{x=\xi_1-\varepsilon}]=-\frac{1}{p(\xi_1)},$$
$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[(\frac{dG_2}{dx})_{x=\xi_2+\varepsilon}-(\frac{dG_2}{dx})_{x=\xi_2-\varepsilon}]=-\frac{1}{p(\xi_2)},$$

получим равенство

$$G_2(\xi_1)-G_1(\xi_1)=0$$

или

$$G(\xi_1,\xi_2)=G(\xi_2,\xi_1).$$

ч.т.д.

3. Дифференциальное уравнение $L(u)+\varphi(x)=0$. В этом параграфе рассмотрим дифференциальное уравнение, которое представимо в виде

$$L(u)=-\varphi(x), \tag{9}$$

где правая часть является функцией непрерывной на интервале (a,b). Будем предполагать, что рассматриваемое дифференциальное уравнение (9) имеет решение u, которое обращается в нуль при $x=a$ и при $x=b$ и непрерывное на всем промежутке (a,b) вместе со своими производными до второго порядка.

Вернемся к формуле (7) и подставим вместо u решение выше, а вместо v воспользуемся функцией Грина $G(x,\xi)$. Известно, что производная функции Грина имеет разрыв в точке $x=\xi$, следовательно, интервал (a,b) мы должны заменить на два интервала, исключив точку ξ, то есть взять $(a,\xi-\varepsilon)$ и $(\xi+\varepsilon,b)$. Принимая во внимание (9) и учитывая, что справедливо следующее равенство

$$L(v)=L(G(x,\xi))=0,$$

формула (7) примет следующий вид

$$
\begin{gathered}
-\int_a^{\xi-\varepsilon} G(x,\xi)\varphi(x)dx - \int_{\xi+\varepsilon}^{b} G(x,\xi)\varphi(x)dx = \\
= [p(G(x,\xi)\frac{du}{dx} - u\frac{dG(x,\xi)}{dx})]_a^{\xi-\varepsilon} + [p(G(x,\xi)\frac{du}{dx} - u\frac{dG(x,\xi)}{dx})]_{\xi+\varepsilon}^{b} = \\
= [p(G(x,\xi)\frac{du}{dx} - u\frac{dG(x,\xi)}{dx})]_{\xi+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}
\end{gathered} \tag{10}
$$

в последнем равенстве, при подстановке пределов интегрирования мы использовали тот факт, что функция Грина, а также решение u обращаются в нуль при $x = a$ и при $x = b$.

Теперь надо рассмотреть предел правой части (10) при $\varepsilon \to 0$. Так как функции u, $\frac{du}{dx}$, $G(x,\xi)$ являются непрерывными, то правая часть равенства (10) переходит в

$$
-p(\xi)u(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{dG(x,\xi)}{dx}]_{x=\xi-\varepsilon} - [\frac{dG(x,\xi)}{dx}]_{x=\xi+\varepsilon} = -u(\xi).
$$

Рассмотрим левую часть равенства (10), при $\varepsilon \to 0$ она имеет предел

$$
-\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)dx,
$$

тогда окончательно мы получаем равенство

$$
u(\xi)\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)dx.
$$

Если рассмотреть внимательно последнее равенство, то можно заметить, что при перестановке ξ и x и учитывая, симметричность функции Грина, решение уравнения (9), которое удовлетворяет всем наложенным на него условиям выше, можно записать в виде

$$
u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)dx. \tag{11}
$$

С другой стороны, функция Грина $G(x,\xi)$ обращается в нуль при $x = a$ и при $x = b$, следовательно, функция из формулы (11) также равна нулю при $x = a$ и при $x = b$.

В связи с тем, что функция $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ при $x = \xi$ терпит разрыв, то можно записать

$$
u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x-\varepsilon} G(x,\xi)\varphi(\xi)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x+\varepsilon}^{b} G(x,\xi)\varphi(\xi)dx. \tag{12}
$$

Продифференцируем по x последнее равенство, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{du(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x-\varepsilon} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\varphi(\xi)dx + + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\varphi(\xi)dx + \\
+ \lim_{\varepsilon\to 0} G(x, x-\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0} G(x, x+\varepsilon)\varphi(x+\varepsilon).
\end{gathered}
$$

Два последних слагаемых взаимно уничтожаются, так как функции $G(x,\xi)$ и $\varphi(x)$ непрерывны. Тогда получаем следующее выражение

$$
p(x)\frac{du(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x-\varepsilon} p(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\varphi(\xi)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x+\varepsilon}^{b} p(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\varphi(\xi)dx \tag{13}
$$

Продифференцируем (13) по x и сложим с (12), умножив перед этим последнее на $q(x)$, получим

$$
\begin{gathered}
L(u) = \frac{d(p\frac{du}{dx})}{dx} + qu = \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x-\varepsilon} p(x)L(G(x,\xi))\varphi(\xi)d\xi + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x+\varepsilon}^{b} p(x)L(G(x,\xi))\varphi(\xi)d\xi + \\
+ \lim_{\varepsilon\to 0} p(x)[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{\xi=x-\varepsilon}\varphi(x-\varepsilon) - p(x)[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{\xi=x+\varepsilon}\varphi(x+\varepsilon)
\end{gathered}
$$

Так как справедливы следующие равенства:

$$
L(G(x,\xi)) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x\pm\varepsilon) = \varphi(x),
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{x=\xi-\varepsilon} = -\frac{1}{p(\xi)}
$$

или

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{\xi=x-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]_{\xi=x+\varepsilon} = -\frac{1}{p(x)}$$

то функция (11) удовлетворяет дифференциальному уравнению (9)

$$L(u) + \varphi(x) = 0.$$

Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.1 [3] *Выражение*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)dx.$$

где $\varphi(x)$ означает непрерывную в интервале $a \le x \le b$ функцию, представляет собой единственное решение дифференциального уравнения

$$L(u) + \varphi(x) = 0,$$

обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = b$ и непрерывное вместе со своими первой и второй производными в интервале $a \le x \le b$.

4. Собственные значения и собственные функции дифференциального уравнения $L(u) + \lambda u = 0$. В этом параграфе будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$L(u) + \lambda u = f(x), \tag{14}$$

где правая часть уравнения непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

В случае, если уравнение (14) имеет интеграл u, который в свою очередь на концах отрезка $[a, b]$ равен 0, и непрерывен до второй производной включительно на этом отрезке, то сделав замену функции $\varphi(x)$ на $\lambda u - f(x)$ в формуле (9) и используя формулу (11), получим для u уравнение

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)[\lambda u(\xi) - f(\xi)]d\xi.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$u(x) - \lambda \int_a^b G(x,\xi)u(\xi)d\xi = g(x), \tag{15}$$

где в качестве $g(x)$ взята следующая функция

$$g(x) = -\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Заметим, что уравнение (15) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x,\xi) = G(x,\xi).$$

Обозначим $D(\lambda)$ детерминантом ядра $K(x,\xi) = G(x,\xi)$, а резольвенту ядра-

$$K(\lambda, x, \xi) = \frac{D(\lambda, x, \xi)}{D(\lambda)}.$$

Если $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение имеет единственное решение

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(\lambda, x, \xi)g(\xi)d\xi,$$

Ядро $G(x,\xi)$ является замкнутым, так как интеграл

$$\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

тождественно равен нулю, тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ равна нулю.

В самом деле, выражение

$$u = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $L(u) = -\varphi(x)$. Отсюда следует, что если u равна нулю при всех значениях $x \in [a, b]$, то $L(u) = 0$, верно это и при $\varphi(x) = 0$.

Множество действительных чисел $\lambda_n (n = 1, 2, ...)$ является корнями уравнения $D(\lambda) = 0$, так как ядро $G(x,\xi)$ замкнуто.

Каждому собственному значению λ_n можно поставить в соответствие хотя бы одну собственную функцию $\psi_n(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b G(x,\xi)\psi_n(\xi)d\xi$$

Пусть $f(x) = 0$, следовательно, $g(x) \equiv 0$. Дифференциальное уравнение (14) принимает следующий вид

$$L(u) + \lambda u = 0 \tag{A}$$

Заметим, что при $x = a$ и $x = b$ решение u дифференциального уравнения (A) обращается в нуль. А также это решение u непрерывное вместе с производными до второго порядка при $x \in [a, b]$, удовлетворяет уравнению

$$u(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0, \tag{16}$$

которое в свою очередь разрешимо, когда λ совпадает с любым λ_n из множества собственных значений.

Обратно, если же решение существует для рассматриваемого уравнения (16), то оно также удовлетворяет дифференциальному уравнению (A). Отсюда можно заключить, что собственная функция ψ_n, соответствующая собственному значению λ_n является решением следующего уравнения

$$L(u) + \lambda_n u = 0. \tag{17}$$

Покажем, что λ_n является простым корнем для уравнения $D(\lambda) = 0$, это означает, что λ_n является простым собственным значением. В самом деле, если одному собственному значению будут соответствовать две собственные функции, которые отличаются не только множителем, то, очевидно, что любое решение уравнения (17) можно будет представить в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами от этих двух функций. Следовательно, каждое решение обязано обращаться в нуль на концах отрезка $[a, b]$. что невозможно.

Отсюда получаем, что каждому собственному значению λ_n соответствует одна собственная функция ψ_n, которую можно нормировать

$$\int_a^b [\psi_n(x)]^2 dx = 1.$$

Определение 4.1 [1] *«Собственными значениями и собственными функциями дифференциального уравнения*

$$L(u) + \lambda u = 0$$

будем называть собственные значения λ_n и собственные функции $\psi_n(x)$ ядра $G(x, \xi)$.»

Определение 4.2 [5] *«Значения λ_n называют также отличительными значениями параметра λ, функции $\psi_n(x)$ отличительными решениями или нормальными функциями дифференциального уравнения (A).»*

Теорема 4.1 [5] *«Дифференциальное уравнение*

$$L(u) + \lambda u = 0$$

тогда и только тогда обладает решением $u = \psi_n(x)$, обращающимися в нуль при $x = a$ и $x = b$ и непрерывным при $a \le x \le b$ вместе со своими первой и второй производными, когда λ совпадает с каким нибудь собственным значением λ_n ядра $G(x, \xi)$.»

Существует бесчисленное множество действительных простых собственных значений λ_n, каждому из которых соответствует нормированная собственная функция $\psi_n(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_a^b [\psi_n(x)]^2 dx = 1.$$

Если положить $u = \psi_n(x)$ и учесть следующие равенства

$$\psi_n(a) = 0, \quad \psi_n(b) = 0,$$
$$L(\psi_n) = -\lambda_n \psi_n,$$

то формула (8) примет вид»

$$\lambda_n = \int_a^b [p(\frac{d\psi_n}{dx})^2 - q\psi_n^2] dx. \tag{18}$$

Если в интервале (a, b) функция p нигде не отрицательна, функция q нигде не положительна, то интеграл в правой части равенства (18) положителен; в этом случае, следовательно, все собственные значения λ_n положительны.

Пусть $f(x)$ заданная функция, которая является непрерывной на отрезке $[a, b]$ до второй производной включительно и равна нулю на концах отрезка.

Если предположить $L(f(x)) = -\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ будет непрерывна в интервале (a, b). Согласно теореме 1 на странице 11, функция $f(x)$ имеет следующий вид

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

и следовательно, можно применить теорему о разложении в ряд по собственным функциям.

Теорема 4.3[3] *«Всякая функция $f(x)$, непрерывная в интервале $a \le x \le b$ вместе со своими первой и второй производными и обращающаяся в нуль при $x = a$ и $x = b$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд»*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x),\qquad c_n=\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx,$$

где $\psi_n(x)$ - собственные функции дифференциального уравнения (A).

Если φ_n $(n=1,2,\dots)$ означают ненормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_n, то, положив

$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b[\psi_n(x)]^2dx}},$$

получим разложение в ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b[\psi_n(x)]^2dx}.$$

5. Функция Грина дифференциального выражения $L(u)+\lambda u$**.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Lambda(u)=L(u)+\lambda u.$$

Функция Грина для этого уравнения может быть получена из определения функции Грина, которое приведено в первом пункте, для дифференциального уравнения $L(u)$, с помощью замены в этом определении выражения $L(u)$ на $\Lambda(u)$.

Покажем, что резольвента $K(\lambda,x,\xi)$ ядра $K(x,\xi)=G(x,\xi)$ совпадает с функцией Грина $\Gamma(x,\xi)$ дифференциального выражения $\Lambda(u)$.

Положим в уравнении (15) $g(x)=G(x,\xi)$, то $u(x)$ перейдет в резольвенту $K(\lambda,x,\xi)$, т.е.

$$K(\lambda,x,\xi)-\lambda\int_a^b G(x,r)K(\lambda,x,\xi)dr=G(x,\xi).\tag{19}$$

Теперь продифференцируем по x, а затем умножим на $p(x)$, получим

$$p(x)\frac{\partial K(\lambda,x,\xi)}{\partial x}-\lambda\int_a^b p(x)\frac{\partial G(x,r)}{\partial x}K(\lambda,x,\xi)dr=p(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}.\tag{20}$$

Дифференцируя (20) по x, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}]=\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial K(\lambda,x,\xi)}{\partial x}]+\lambda K(\lambda,x,\xi)-\\ -\lambda\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial G(x,r)}{\partial x}]K(\lambda,x,\xi)dr.\end{gathered}\tag{21}$$

Сложим равенство (19), предварительно умноженное на $g(x)$ с (21), получим

$$L(G(x,\xi))=\Lambda(K(\lambda,x,\xi))-\lambda\int_a^b L(G(x,r))K(\lambda,x,\xi)dr.$$

Так как $L(G(x,\xi))=0,\quad L(G(x,r))=0$, то получается

$$\Lambda(K(\lambda,x,\xi))=0.$$

Согласно формулам (19), (20), (21) можно утверждать, что функция $K(\lambda,x,\xi)$ обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$ и что она непрерывна вместе со своими производными по x при $x\in[a,b]$ (за исключением $x=\xi$). Согласно формуле (20) имеем

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[\frac{\partial K(\lambda,x,\xi)}{\partial x}]_{x=\xi+\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[\frac{\partial K(\lambda,x,\xi)}{\partial x}]_{x=\xi-\varepsilon}=-\frac{1}{p(x)}.$$

Резольвента $K(\lambda,x,\xi)$ очевидно, обладает всеми свойствами присущими функции Грина $\Gamma(x,\xi)$ для уравнения $\Lambda(u)$.

6. Задачи.

Задача 6.1 Найти решения дифференциального уравнения:

$$\frac{du^2}{dx^2}+\lambda u=0,\tag{22}$$

которые обращаются в нуль на концах отрезка $[0,1]$ и которые непрерывны вместе со своими производными первого и второго порядков в интервале $0\le x\le 1$.

Решение. Рассмотрим общее решение

$$u=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Оно будет удовлетворять краевым условиям, если $c_1=0$ и $\sqrt{\lambda}=n\pi$. Дифференциальное уравнение (22) имеет собственные значения $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2$ с соответствующими им собственными функциями

$$\varphi_n = \sin n\pi x.$$

Для того, чтобы воспользоваться теоретическим материалом, изложенным выше, нам необходимо положить

$$L(u) = \frac{du^2}{dx^2},$$

а так же

$$\Lambda(u) = \frac{du^2}{dx^2} + \lambda u.$$

Уравнение $L(u) = 0$ имеет решения $u_1 = 1$ и $u_2 = x$, из них получается функция Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(1-\xi))\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})} & \text{при} x \le \xi, \\ \\ \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(1-x))\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})} & \text{при} x \ge \xi. \end{cases}$$

Далее, выберем u_1 и u_2 так, чтобы выполнялось следующие условия

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(1) = 0, \quad u_2 u_1 - u_1 u_2 = 1.$$

Таким образом функция Грина для выражения $L(u)$ мы получим из

$$u_1 = x, \quad u_2 = 1 - x.$$

Функцию Грина для выражения $\Lambda(u)$ мы получим из условий

$$u_1 = \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

$$u_2 = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(1-x))}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})}.$$

Ядро $K(x,\xi) = G(x,\xi)$ имеет резольвенту

$$K(\lambda, x, \xi) = \Gamma(x,\xi) = \frac{D(\lambda, x, \xi)}{D(\lambda)}.$$

Вычислим определитель $D(\lambda)$ из уравнения

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\int_0^1 D(\lambda, x, \xi)dx = -D(\lambda)\int_0^1 \Gamma(x,x)dx$$

при условии $D(0) = 1$. Он равен $D(\lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$ с нулевыми точками, которые являются собственными значениями

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2 (n = 1, 2, 3...).$$

Выражение

$$D(\lambda_n; x; \xi) = [D(\lambda)K(\lambda, x, \xi)]_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi\xi * \sin n\pi x}{n^2\pi^2},$$

или, что сводится к тому же, выражение

$$\varphi_n = \sin n\pi x$$

есть собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_n = n^2\pi^2$.

Тогда согласно теореме из теории интегральных функций [], имеем

Всякая функция $f(x)$, непрерывная вместе со своими производными в интервале $0 \le x \le 1$, обращающаяся в нуль при $x = 0$ и при $x = 1$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \frac{\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx}{\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$$

Задача 6.2. Требуется определить интегралы дифференциального уравнения

$$\frac{du^2}{dx^2} + \lambda u = 0,$$

которые непрерывны вместе со своими производными в интервале $0 \le x \le 1$ и удовлетворяют краевым условиям

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

и

$$\frac{du}{dx} = Hu \text{ при } \quad x = 1 \tag{23}$$

Обращающийся в нуль при $x = 0$ интеграл $u = \sin\sqrt{\lambda}x$ будет удовлетворять тому краевому условию, которое предписано при $x = 1$, если

$$\cos\sqrt{\lambda} - H\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0 \tag{24}$$

Имеем

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \Lambda(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u.$$

Функция Грина дифференциального выражения $L(u)$, удовлетворяющая краевым условиям (23) при $H \neq 1$, имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x + \frac{H\xi x}{1-H} & \text{при} x \le \xi, \\ \\ \xi + \frac{H\xi x}{1-H} & \text{при} x \ge \xi. \end{cases}$$

Существует бесконечно много собственных значений λ_n, удовлетворяющих уравнению (24) или уравнению

$$H \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda},$$

и все они действительны и положительны.

Им соответствует собственные функции

$$\varphi_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

Функция $f(x)$ допускает разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\sqrt{\lambda_n}x \frac{\int_0^1 f(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x dx}{\int_0^1 \sin^2\sqrt{\lambda_n}x dx} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{2\sqrt{\lambda_n} - \sin(2\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 f(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx.$$

Дифференциальное уравнение $L(u) = 0$ обладает решением $u = \psi_0(x)$, непрерывным вместе со своими производными первого и второго порядков на интервале (a, b) и равным нулю при $x = a$ и $x = b$. Иначе, уравнение (A) имеет собственное значение $\lambda = 0$, которому соответствует собственная функция $\psi_0(x)$. Предположим, что для этой функции выполнено условие

$$\int_a [\psi_0(x)]^2 dx = 1.$$

В силу этого, в качестве обобщенной функции Грина возьмем интеграл $G(x, \xi)$ дифференциального уравнения

$$L(u) = \psi_0(x)\psi_0(\xi),$$

для которой справедливы следующие условия:

1. $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$.
2. Функция $G(x, \xi)$ непрерывна относительно x в интервале (a, b).
3. Производная $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ за исключением точки $x = \xi$, в которой для нее выполняется равенство
$$p(\xi)[\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\frac{\partial G}{\partial x})_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\frac{\partial G}{\partial x})_{x=\xi-\varepsilon}] = -1$$
4. $$\int_a^b G(x,\xi)\psi_0(x)dx = 0.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Единственное решение дифференциального уравнения (9) дает выражение (11)

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $a \le x \le b$, и которое удовлетворяет краевым условиям $u(a) = 0$ и $u(b) = 0$, а так же условию

$$\int_a^b u(x)\psi_0(x)dx = 0.$$

Теперь теорема 3 может быть сформулирована следующим образом:

Всякая функция $f(x)$, непрерывная в интервале $a \le x \le b$ вместе со своими первой и второй производными, которые равны нулю при $x = a$ и $x = b$ и удовлетворяющая условию

$$\int_a^b f(x)\psi_0(x)dx = 0,$$

представляет собой абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx$$

Если функция $f(x)$ - непрерывная в интервале $a \leq x \leq b$ вместе со своими первой и второй производными, которые равны нулю при $x = a$ и $x = b$, то только что описанную теорему можно применить к функции

$$f(x) - \psi_0 \int_a^b f(x)\psi_0(x)dx.$$

Мы получаем, для функции $f(x)$ следующее разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx$$

таким, образом предыдущая теорема остается верной и в том случае, если в число собственных значений и собственных функций мы включим собственное значение $\lambda = 0$ и соответствующую этому собственному значению собственную функцию $\psi_0(x)$.

Заключение. Моя работа посвящена решению краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. В ходе исследования мною был изучен различный материал (статьи, журналы, книги), которые находятся в разделе список использованных источников.

В работе представлены основные определения, утверждения и теоремы. Важные теоремы приводятся с доказательством.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Калиниченко Д.Ф.1977. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие для вузов. М., Наука, 224.
2. Бойков, В.А., Жибер А.В. 2012. Уравнения математической физики. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 254.
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Физматлит, 400. ISBN 5-9221-0310-5.
4. Годунов, С.К. 1971. Уравнения математической физики. М., Наука, 416.
5. Горн И. 1938. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными / Пер. с нем. М. С. Горнштейна. М., 272.
6. Грищенко, А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. 1986. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. К., Вища шк. Головное издательство,336.
7. Курант, Р. 1964. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т. Д. Вентцель; под редакцией О. А. Олейник. М., Мир, 832.
8. Ладыженская, О. А.1973. Краевые задачи математической физики: учебное пособие для вузов. Москва, Наука, 408.
9. Михлин, С. Г. 1947. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Ленинград; Москва, ОГИЗ, 304.
10. Михлин С. Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных: учебное пособие для вузов. - Москва, Высшая школа, 431.

Поступила в редакцию 23.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Вереитинова Галина Александровна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru