Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 58–66.

Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений

Большанин В. В.
1667707@bsu.edu.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию теоретического материала по теме краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. В статье рассматривается уравнение Лапласа, качественные свойства краевой задачи, такие как принцип максимума, теорема единственности. Вводится понятие логарифмического потенциала, а также потенциала двойного слоя. В заключении статьи приводятся подробное решение первой и второй краевых задач для уравнения Лапласа, основанное на изученном теоретическом материале.

Ключевые слова: краевая задача, принцип максимума, логарифмический потенциал

Для цитирования: Большанин В. В. 2024. Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. *Студенческий математический журнал*, 2: 58–66.

---

1. Введение. Тема краевых эллиптических задач, решаемых с помощью потенциала, представляет собой одну из ключевых областей математической науки. Эта тема имеет большое практическое значение, поскольку множество физических явлений может быть описано с использованием эллиптических уравнений. Примерами таких явлений могут служить задачи теплопроводности, течения жидкости, электростатики и другие [1]–[9]. Решение краевых задач с помощью потенциала является мощным инструментом для анализа и понимания сложных физических процессов, позволяя определить поведение системы внутри заданной геометрии с заданными краевыми условиями.

Таким образом, изучение и решение краевых эллиптических задач с применением потенциала имеет огромное значение как для теоретической математики, так и для прикладных наук. На сегодняшний день актуальность данной темы заключается в необходимости разработки новых методов анализа и численного решения сложных задач, а также в поиске новых приложений и интерпретаций результатов, что делает ее интересной и перспективной для дальнейших исследований.

2. Дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$. Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\Delta u = 0 \tag{A}$$

где Δu является самосопряженным дифференциальным оператором

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2}.$$

Приведем следующую теорему

Теорема 2.1.«*Если $L(u)$ представляет собой самосопряженное дифференциальное выражение*

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}) + Fu,$$

а p, q выражаются в виде

$$\begin{cases} p = u(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}) \\ q = u(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}) \end{cases}$$

то формула

$$\int\int_J [A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - Fu]dxdy =$$
$$= \int_C (pdy - qdx) - \int\int_J uL(v)dxdy$$

верна.» [5]–[10].

Теперь положим $A = 1$, коэффициенты $B = 0$, $C = 1$, $F = 0$, тогда получим следующую формулу

$$\int\int_J (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy =$$

$$\int_C u(\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx) - \int\int_J u\Delta v dxdy,$$

где функции u и v принадлежат классу непрерывных функций, производная которых также непрерывна до второго порядка в области J, ограниченной кривой C.

Выберем нормаль n к кривой C, которая будет направлена внутрь рассматриваемой области J. Выберем направление обхода кривой C таким образом, чтобы элемент дуги ds при положительном повороте на угол 90 градусов переходил в направление нормали n. Пусть α угол между элементом дуги и осью X-ов, то

$$dy = ds\sin\alpha, \quad dx = ds\cos\alpha.$$

В этом случае угол внутренней нормали n с осями Y-ов, X-ов равняется

$$(n, y) = \alpha, \quad (n, x) = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, $dy = -ds\cos(n, x), \quad dx = ds\cos(n, y)$.
Следовательно, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx = -[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, y)]ds.$$

Рассмотрим точку (x, y) принадлежащую кривой C. Заметим, что если эта точка начнет смещаться по нормали на очень малое расстояние dn, то функция v получит приращение, которое запишется в виде

$$dv = [\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, y)]dn.$$

Последнее выражение называется производной от v по нормали к кривой C, направленной внутрь области J.
Отсюда имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx = -\frac{\partial v}{\partial n}ds.$$

Справедлива следующая формула:

$$\int\int_G(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy = -\int_C u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \int\int_J u\Delta v dxdy. \tag{1}$$

Поменяем местами функции u и v, получим

$$\int\int_G(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y})dxdy = -\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int\int_J v\Delta u dxdy. \tag{2}$$

Так как левые части равенств (3) и (4) равны, то и правые равны, отсюда получаем:

$$\int_C(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds + \int\int_J(u\Delta v - v\Delta u)dxdy = 0. \tag{3}$$

Формула (5) представляет собой формулу Грина. Эта формула справедлива даже когда граница области J состоит из нескольких частей, здесь важно чтобы производные по нормали были направлены внутрь области.

Отметим, что если функции u и v непрерывны вместе со своими производными в рассматриваемой области до второго порядка включительно и удовлетворяют уравнениям $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, то:

$$\int_C(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds = 0. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2.2 *«Всякая функция u, непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков в области, ограниченной кривой C, и удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\Delta u = 0$, удовлетворяет уравнению*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds = 0. \tag{5}$$

ибо, если в (6) положить $v = 1$, то получится (7).» [5].
Теперь предположим в формуле (3) равенство двух функций $u = v$, получим

$$-\int\int_J u\Delta u dxdy = \int\int_J[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2]dxdy + \int_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{6}$$

Последняя формула нам понадобится в дальнейшем.

3. Теорема единственности. Пусть функция u будет непрерывна в области J до второй производной включительно и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, тогда, согласно формуле (8) имеем

$$\int\int_J[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2]dxdy = -\int_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{7}$$

Предположим, что $u = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ вдоль кривой C, то

$$\int\int_J[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2]dxdy = 0$$

Последнее равенство справедливо только когда в области

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Значит, функция u должна быть константой во всей области, в частности $u = 0$ во всей области J, если вдоль граничной кривой $u = 0$.

Теорема 3.1. *«Решение и дифференциального уравнения $\Delta u = 0$, непрерывное в области J вместе со своими первой и второй частными производными, обращается в нуль в области J, если оно обращается в нуль вдоль граничной кривой C. Это решение сохраняет постоянное значение в области J, если вдоль кривой C его производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ по внутренней нормали равна нулю.»* [3]-[6].

Следствие 3.1. *« Дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ имеет не более одного решения, которое было бы непрерывно в области J со своими частными производными первого и второго порядков и принимало бы на граничной кривой заданные значения.»* [3]-[6].

Теорема 3.2. *«Самое общее решение и дифференциального уравнения $\Delta u = 0$, которое непрерывно в области J вместе со своими частными производными первого и второго порядков, и нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ которого принимает вдоль кривой C заданные значения, отличается только на аддитивную константу.»* [3]-[6].

4. Принцип максимума. Предположим, что функция u является непрерывной, ее частные производные первого и второго порядков также непрерывны в рассматриваемой области J, лежащей вне кривой C и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$.

Возьмем окружность K достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, которая будет содержать кривую C. Обозначим A' область, которая находится между кривой C и окружностью K.

Рассмотрим формулу (9) применительно к области A', получим

$$\int\int_{A'}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2]dxdy = -\int_C u\frac{\partial u}{\partial n'}ds - \int_K u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

здесь нормаль к кривой C направленная внутрь области A' обозначена как n', а нормаль n означает нормаль к окружности K, направленную внутрь области A'.

Введем обозначение на окружности K:

$$ds = Rd\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial R},$$

В этом случае получим:

$$\int\int_{A'}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2]dxdy = -\int_C u\frac{\partial u}{\partial n'}ds + \int_K Ru\frac{\partial u}{\partial R}d\theta.$$

Отсюда,

$$\int\int_{A'}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2]dxdy = -\int_C u\frac{\partial u}{\partial n'}ds \tag{8}$$

при предположении, что

$$\lim_{R\to\infty} Ru\frac{\partial u}{\partial R} = 0 \tag{9}$$

Таким образом, если () выполняется и при этом либо сама функция u либо ее производная $\frac{\partial u}{\partial n'}$ обращаются в ноль на кривой C, то интеграл в правой части равенства (10) равен 0. Из этого следует, что функция u вне кривой C является постоянной.

Рассмотрим функцию

$$v = \ln\frac{1}{r}$$

в которой

$$r = +\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

означает расстояние от фиксированной точки (ξ, η) до точки (x, y). Заметим, что выражение для r представляет собой частный интеграл дифференциального уравнения $\Delta v = 0$.

Рассмотрим два случая, первый - когда точка (ξ, η) находится внутри области J, ограниченной кривой C, а второй когда точка (ξ, η) является центом окружности радиуса R.

Первый случай.

Опишем вокруг точки (ξ, η) окружность Γ достаточно малого радиуса ρ, согласно формуле (5) для области J', ограниченной Γ и C, имеем равенство.

$$\int_C(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds + \int_\Gamma(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds = 0,$$

здесь в первом интеграле производные по нормали n, направленной внутрь рассматриваемой области к кривой C, а во втором интеграле n означает нормаль к окружности, направленную внутрь области J'.

В том случае, если во втором интеграле взять производные по нормали, направленной внутрь, то получим

$$\int_C(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial n})ds = \int_\Gamma(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial n})$$

Рассмотрим интеграл в правой части равенства.

Очевидно, что выражение, учитывая (7)

$$\int_\Gamma \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \ln\frac{1}{\rho}\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0.$$

На окружности Γ при $(r = \rho)$ справедливо равенство

$$-\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r},$$

в котором учитывается, что направление внутренней нормали к окружности Γ противоположно направлению возрастания r.

Верно следующее равенство

$$-\int_\Gamma u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} ds = -\frac{1}{\rho} \int_\Gamma u ds.$$

При очень малом значении ρ справедливо:

$$-\frac{1}{\rho} u(\xi, \eta) 2\pi\rho = -2\pi u(\xi, \eta).$$

В силу того, что интеграл не зависит от ρ, получает равенство

$$-\int_\Gamma u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} ds = -2\pi u(\xi, \eta)$$

Из всего этого можно получить очень важную формулу

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} ds \tag{10}$$

Согласно этой формуле, можно сказать, что если взять любую точку (ξ, η) области, ограниченной кривой C, то функция u будет там определена, если начальные данные содержат значения самой функции u или ее производной по нормали $\frac{\partial u}{\partial n}$ на кривой C.

Теперь рассмотрим случай, когда кривая C – окружность радиуса R с центром в точке (ξ, η), тогда на C справедливо следующее равенство.

$$\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{d \ln \frac{1}{r}}{dr} = \frac{1}{r}.$$

В этом случае формула (9) переходит в

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi R} \int_C u ds.$$

Или, учитывая формулу (7)

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi R} \int_C u ds.$$

Теорема 4.1. *«Решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения с частными производными $\Delta u = 0$ не может иметь ни максимума, ни минимума в точке (ξ, η), в окрестности которой оно непрерывно вместе со своими частными производными первого и второго порядков.»* [5]

5. Логарифмический потенциал простого и двойного слоя. В этом пункте мы введем понятие потенциала.

Для этого в формуле (9) поменяем местами следующие точки (ξ, η) и (x, y) так, чтобы точка (ξ, η) принадлежала границе C области J.

В этом случае, любое решение дифференциального уравнения $\Delta u = 0$ $u(x, y)$ непрерывное в области J, а также у которого непрерывны частные производные до второго порядка включительно может быть представлено в виде

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \ln 1r \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{\partial \ln 1r}{\partial n} ds,$$

здесь символ r означает расстояние от точки (x, y) до (ξ, η).

Тогда решение $u(x, y)$ уравнения $\Delta u = 0$ представимо в виде двух интегралов, которые вычисляются по кривой C:

$$v = \int_C \chi \ln 1r ds \tag{11}$$

$$w = \int_C \mu \frac{\partial \ln 1r}{\partial n} ds,$$

где μ и χ -заданные на границе C функции.

Определение 5.1. *«Интеграл v называется логарифмическим потенциалом простого слоя кривой C с плотностью χ, а интеграл w- логарифмическим потенциалом двойного слоя кривой C с моментом μ.»* [3]-[6].

Как показано в пункте 3, имеет место равенство $\Delta \ln 1r = 0$. Таким образом для потенциала v простого слоя справедливо равенство

$$\Delta v = 0.$$

Так как n – внутренняя нормаль кривой C, то для точки (ξ, η) справедливы следующие равенства

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = \cos(n, x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = \cos(n, y).$$

Далее,

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{\partial r}{\partial x} = -\cos(r, x)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{\partial r}{\partial y} = -\cos(r, y).$$

Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n} =$$

$$-[\cos(r, x)\cos(n, x) + \cos(r, y)\cos(n, y)] = -\cos(r, n),$$

где (r, n) является углом между внутренней нормалью к кривой C в точке (ξ, η) и прямой, соединяющей точку (ξ, η) и (x, y).

Следовательно,

$$\frac{\partial \ln 1r}{\partial n} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r}.$$

Из последнего равенства можем заключить, что потенциал двойного слоя может быть представлен в виде

$$w = \int_C \mu \frac{\cos(r, n)}{r} ds. \tag{12}$$

Из формулы

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = 0$$

получаем

$$\Delta \frac{\partial \ln 1r}{\partial n} = 0.$$

Следовательно, для потенциала двойного слоя также имеет место равенство

$$\Delta w = 0.$$

6. Потенциал двойного слоя. В этом параграфе мы приведем теорему и формулы, используемые при решении задач. Согласно теореме

Теорема 6.1. *«Потенциал двойного слоя кривой C с непрерывно изменяющимся моментом μ при переходе через кривую C в точке s испытывает разрыв, представляемый равенствами*

$$\frac{1}{2}(w_i - w_a) = \pi \mu_s \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_a) = \int_C \mu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt.$$

при этом w_i и w_a означают соответствующие пределы, к которым стремится w при приближении к точке s изнутри или извне кривой C. Далее, dt означает дуговой элемент кривой C в любой точке t с внутренней нормалью n_t, а r −расстояние между точками s и t.» [5]

Если мы прибавим первое равенство ко второму, то получим следующую формулу

$$w_i = \pi \mu_s + \int_C \mu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt. \tag{14}$$

В тоже время, если вычесть из первого уравнения второе, то получим

$$w_a = -\pi \mu_s + \int_C \mu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt. \tag{15}$$

Последние формулы имеют практическое применение в дальнейшем.

7. Решение первой краевой задачи. Рассмотрим решение первой краевой задачи которое описано в работах Фредгольма. Сформулируем задачу:

«Пусть вдоль кривой C дана непрерывная функция $f(s)$. Требуется найти функцию w от x, y, непрерывную вместе со своими частными производными первого и второго порядков внутри области J, удовлетворяющую дифференциальному уравнению с частными производными $\Delta w = 0$ и принимающую на граничной кривой C заданные значения $f(s)$.» [5]

Согласно пункту 2, рассматриваемая задача имеет одно решение или не имеет вообще решения. Тогда рассмотрим интеграл (14) на кривой C, введя функцию $\mu = \mu_s$

$$w = \int_C \mu \frac{\cos(r, n)}{r} ds.$$

Согласно пункту 1.4 последний интеграл является решением уравнения

$$\Delta w = 0,$$

и удовлетворяет краевому условию

$$w_i = f(s) \tag{16}$$

Вспоминая формулу (20) имеем

$$w_i = \pi\mu_s + \int_C \mu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt.$$

Введем обозначение

$$\pi K(s,t) \frac{\cos(r, n_t)}{r} = \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n_t} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n_t}. \tag{17}$$

В этом случае, краевое значение перепишется в виде уравнения с интегралами

$$\mu_s + \int_C K(s,t)\mu_t dt = \frac{f(s)}{\pi}. \tag{18}$$

Метод Фредгольма будем применять к уравнению, предварительно введя параметр λ:

$$\mu_s - \lambda \int_C K(s,t)\mu_t dt = \frac{f(s)}{\pi}. \tag{19}$$

Угод который образован осью X и прямой, которая соединяет точки $x(s), y(s)$ и точки $x(t), y(t)$, принадлежащие граничной кривой C, обозначим θ, тогда

$$\theta = \arctan \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)},$$

отсюда получаем

$$d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \arctan \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} dt.$$

Заметим, если смотреть из точки $x(s), y(s)$, то именно под этим углом $d\theta$ виден элемент dt.

С другой стороны, справедливо следующее равенство:

$$d\theta = \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt,$$

отсюда

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \arctan \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}. \tag{20}$$

Пусть точка q является точкой пересечения перпендикуляра, исходящего из точки хорды st и пересекающего нормаль n_t, тогда

$$\cos(r, n_t) = \frac{r}{2\bar{qt}},$$

следовательно

$$K(s,t) = \frac{1}{2\pi\bar{qt}}.$$

Очевидно, что при приближении точки s к точке t рассматриваемый отрезок $\bar{qt}$ представляет собой радиус кривизны ρ_t, тогда имеем

$$K(t,t) = \frac{1}{\pi\rho_t}. \tag{21}$$

Резольвента ядра, учитывая, что определитель $D(\lambda)$ не равен нулю, выглядит следующим образом

$$K(\lambda, s, t) = \frac{D(\lambda, s, t)}{D(\lambda)}. \tag{22}$$

Справедлива следующая формула

$$\pi\mu_s = f(s) + \lambda \int_C K(\lambda, s, t) f(t) dt. \tag{23}$$

Таким образом, мы получили решение первоначальной задачи, которое представлено формулами (14) и (23), при условии, что $\lambda = -1$. Покажем, что определитель в этой точке $D(-1) \neq 0$.

Предположим противное. Пусть $\lambda = -1$ корень уравнения $D(\lambda) = 0$, но в этом случае существовала бы непрерывная функция μ_s, которая не обращается в нуль вдоль кривой C и удовлетворяющая следующему интегральному уравнению при $\lambda = -1$

$$\mu_s - \lambda \int_C K(s,t)\mu_t dt = 0. \tag{24}$$

Полученный с помощью использования данной функции интеграл

$$w = \int_C \mu \frac{\cos(r, n)}{r} ds$$

учитывая формулу (20) удовлетворяет следующему условию

$$\frac{w_i}{\pi} = \mu_s + \int_C K(s,t)\mu_t dt = 0.$$

Заметим, что функция w везде внутри области J равна нулю, что следует из того, что w_iравна нулю вдоль кривой C. Следовательно, ее производная от w по нормали также равна нулю вдоль кривой C.

Согласно следующей теореме [10]

Теорема 7.1 *«Если потенциал двойного слоя имеет в какой-нибудь точке кривой C с одной стороны нормальную производную, то существует также нормальная производная и с другой стороны, и обе эти производные равны между собой.»*

имеем, что производная функции w по внешней нормали тоже равна нулю. Следовательно, сама функция w равна нулю всюду вне кривой C.

Отсюда следует, что если рассмотреть предел w_a, к которому стремится функция w, то получим, что он равен нулю.

Из формулы ()

$$\frac{1}{2}(w_i - w_a) = \pi\mu_s$$

и учитывая

$$w_i = 0, \qquad w_a = 0$$

получаем

$$\mu_s = 0.$$

Значит, при $\lambda = -1$ не существует отличного от нуля решения μ_s уравнения (24). Таким образом, пришли к противоречию, $\lambda = -1$ не нулевая точка детерминанта $D(\lambda)$.

Покажем, что μ_s равна константе и есть общее решение интегрального уравнения (24) при $\lambda = 1$.

Предположим, что $\mu = \mu_s$ решение рассматриваемого уравнения (24) при $\lambda = 1$. Тогда выпишем интеграл

$$w = \int_C \mu \frac{\cos(r, n)}{r} dt.$$

Согласно (21) этот интеграл удовлетворяет условию

$$\frac{w_a}{\pi} = \mu_s + \int_C K(s,t)\mu_t dt = 0.$$

Вспомним, что вдоль кривой C функция $w_a = 0$, следовательно по теореме выше, функция w равна нулю всюду вне кривой C. Следовательно, производная функции w по внешней нормали к кривой C обращается в нуль. Отсюда, согласно той же теореме равна нулю и производная функции w по внутренней нормали. это означает, что сама функция равна константе c на кривой C, следовательно, $w_i = c$.

Из формулы ()

$$\frac{1}{2}(w_i - w_a) = \pi\mu_s$$

и учитывая

$$w_i = , \qquad w_a = 0$$

получаем

$$\mu_s = \frac{c}{2\pi} = const.$$

8. Решение второй краевой задачи. Сформулируем задачу:

«Пусть вдоль кривой C задана непрерывная функция $f(s)$. Требуется найти функцию v от x и y, непрерывную вместе со своими частными производными первого и второго порядков внутри области J и удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\Delta v = 0$, между тем как взятая по внутренней нормали производная $\frac{\partial v}{\partial n}$ принимает вдоль граничной кривой заданные значения.» [5]

Согласно теореме 4 пункта 2, общее решение можно получить из частного путем добавления аддитивной константы.

Определим функцию $\chi = \chi_s$ вдоль кривой C так, чтобы интеграл (11)

$$v = \int_C \chi \ln\frac{1}{r} ds,$$

который в свою очередь является решением уравнения $\Delta v = 0$, удовлетворял также граничному условию

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = f(s). \tag{25}$$

Вспомним теорему из [5].

Теорема.*«Потенциал простого слоя кривой C остается непрерывным при переходе через кривую C. Взятая по внутренней нормали n производная $\frac{\partial v}{\partial n}$ при переходе через точку s кривой C испытывает разрыв, представляемый равенствами*

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial v_a}{\partial n} - \frac{\partial v_i}{\partial n}) = \pi \chi_s. \tag{26}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial v_a}{\partial n} + \frac{\partial v_i}{\partial n}) = \int_C \chi_t \frac{\cos(r, n_s)}{r} dt. \tag{27}$$

при этом $\frac{\partial v_i}{\partial n}$ и $\frac{\partial v_a}{\partial n}$ означают соответственно предельные значения, к которым стремится $\frac{\partial v}{\partial n}$ при приближении к точке s изнутри или извне кривой C; dt есть элемент дуги кривой C в произвольной точке t, а r - расстояние между точками s и t.»

Из () вычтем () получим формулу

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = -\pi \chi_s + \int_C \chi_t \frac{\cos(r, n_s)}{r} dt. \tag{28}$$

Согласно формуле (4) имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = -\pi \chi_s + \int_C \chi_t \frac{\cos(r, n)}{r} dt.$$

Положим

$$\frac{\cos(r, n_t)}{r} = \pi K(s, t).$$

Тогда

$$\frac{\cos(r, n_s)}{r} = \pi K(t, s).$$

Следовательно

$$\int_C \chi_t \frac{\cos(r, n_s)}{r} dt = \pi \int_C \chi_t K(t, s) dt.$$

Тогда граничное условие (25) принимает следующий вид

$$\chi_s - \int_C \chi_t K(t, s) dt = -\frac{f(s)}{\pi}.$$

Выпишем сначала уравнение с параметром λ, а затем положим его равным 1.

$$\chi_s - \lambda \int_C \chi_t K(t, s) dt = -\frac{f(s)}{\pi}. \tag{29}$$

Заметим, что детерминант $D(\lambda)$ для ядра $K(t, s)$ и для $K(s, t)$ одинаковый.

А также заметим, что уравнения (24)

$$\mu_s - \lambda \int_C K(s, t) \mu_t dt = 0$$

и уравнение

$$\chi_s - \lambda \int_C \chi_t K(t, s) dt = 0 \tag{30}$$

одновременно разрешимы при одинаковых значениях параметра λ, а, следовательно, имеют одинаковое количество линейно независимых решений.

Согласно предыдущему пункту, уравнение (24) имеет единственное решение $\mu_s = const$ при $\lambda = 1$. Следовательно, уравнение (30) имеет также единственное решение χ_s при $\lambda = 1$.

Неоднородное уравнение (29) будет разрешимо при $\lambda = 1$ только при выполнении следующего условия

$$\int_C f(s) ds = 0.$$

Заметим, что последнее есть уравнение (7):

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0.$$

Решение интегрального уравнения (29) при $\lambda = 1$ имеет вид

$$-\pi \chi_s = f(s) + \int_C \Gamma(t, s) f(t) dt, \tag{31}$$

где

$$\Gamma(t,s) = \frac{D(1;t,t';s,s')}{D(1,t',s')},$$

а постоянные s', t' выбираются так, чтобы $D(1,t',s')$ не равнялся нулю.

В итоге, получаем:

Согласно представлению функции χ_s в виде (31), учитывая, что заданные граничные условия $f(s)$ удовлетворяют условию $\int_C f(s)ds = 0$, решение второй краевой задачи имеет вид

$$v = \int_C \chi_s \ln\frac{1}{r} ds + const.$$

Заключение. Моя работа посвящена исследованию решения первой и второй краевых задач для уравнения Лапласа с помощью потенциала первого и второго слоя. В ходе исследования мною был изучен различный материал (статьи, журналы, книги), которые находятся в разделе список использованных источников.

В работе представлены основные определения и теоремы. Важные теоремы приводятся с доказательством. Основной акцент в работе делается изучение понятия потенциала применении его для решения краевых задачи. Приводится подробное решение поставленных задач.

Данная тематика широко используется для решения различных задач физики, колебание струн, мембран и т.д., поэтому изучение данного направления математики весьма актуально.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. 1977. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие для вузов. М., Наука, 224.
2. Бойков, В. А., Жибер А. В. 2012. Уравнения математической физики. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 254.
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Физматлит, 400. ISBN 5-9221-0310-5.
4. Годунов, С.К. 1971. Уравнения математической физики. М., Наука, 416.
5. Горн И. 1938. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными / Пер. с нем. М. С. Горнштейна. М., 272.
6. Грищенко, А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. 1986. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. К., Вища шк. Головное издательство,336.
7. Курант, Р. 1964. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т. Д. Вентцель; под редакцией О. А. Олейник. М., Мир, 832.
8. Ладыженская, О. А.1973. Краевые задачи математической физики: учебное пособие для вузов. Москва, Наука, 408.
9. Михлин, С. Г. 1947. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Ленинград; Москва, ОГИЗ, 304.
10. Михлин С. Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных: учебное пособие для вузов. - Москва, Высшая школа, 431.

Поступила в редакцию 23.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Большанин Василий Викторович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru