Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 52–57.

Интеграл Лебега

Аладьина А. А.
1558975@bsu.edu.ru

Аннотация. Интеграл Лебега представляет собой важное обобщение интеграла Римана, разработанное для более широкого класса функций. В данной работе рассматриваются основные концепции интеграла Лебега, включая его определение, свойства и преимущества. Обсуждаются ключевые теоремы о сходимости, такие как теорема Лебега о монотонной сходимости и теорема о доминированной сходимости, так же решение задач на использование различных понятий.

Ключевые слова: интеграл Лебега, теорема Лебега, интеграл Римана, свойства интеграла, сходимость

Для цитирования: Аладьина А. А. 2024. Интеграл Лебега. *Студенческий математический журнал*, 2: 52–57.

---

1. Введение. Интеграл Лебега является одним из фундаментальных понятий в современном математическом анализе, предоставляющим мощный инструментарий для рассмотрения интегрирования функций, в том числе таких, которые не поддаются классическому интегралу Римана. Впервые введённый Анри Лебегом в начале XX века, этот интеграл стал основой для развития многих областей математики, включая функциональный анализ, теорию вероятностей, гармонический анализ и многое другое.

Интеграл Лебега широко применяется в математических исследованиях, связанных с анализом, и имеет важное значение в понимании поведения функций на различных классах множеств. Его особенность заключается в том, что он позволяет интегрировать функции, не ограниченные или даже неограниченные в конечном числе точек, что делает его более универсальным по сравнению с интегралом Римана.

В данной работе мы обратим внимание на основные определения и свойства интеграла Лебега, рассмотрим его отличия от интеграла Римана, а также изучим различные примеры применения этого интеграла в различных областях математики. В частности, мы рассмотрим монотонность, аддитивность, абсолютную непрерывность, а также другие ключевые свойства интеграла Лебега, которые играют важную роль в его применении и понимании.

2. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега — это важное обобщение традиционного интеграла Римана, которое позволяет интегрировать более широкий класс функций, особенно тех, которые могут иметь сложные разрывы. Он основывается на понятиях меры и измеримости, что делает его мощным инструментом в современном математическом анализе и теории вероятностей.

Основные идеи интеграла Лебега:

1. Измеримость: Для того чтобы функция была интегрируема по Лебегу, она должна быть измеримой. Это означает, что функция ведет себя достаточно "хорошо"относительно некоторой меры, что позволяет её интегрировать.

2. Обобщение простых функций: Интеграл Лебега начинается с простых функций, которые принимают конечное число значений. Такие функции можно легко интегрировать, суммируя значения функции, умноженные на меру множества, на котором эти значения принимаются.

3. Интеграл для более сложных функций: Для более сложных (неотрицательных) функций интеграл Лебега определяется как наибольшее значение интегралов всех простых функций, которые меньше или равны данной функции.

4. Произвольные измеримые функции: Для любых измеримых функций, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, интеграл Лебега определяется через разность интегралов их положительных и отрицательных частей. Преимущества интеграла Лебега:

5. Широкий класс интегрируемых функций: Интеграл Лебега позволяет интегрировать функции, которые могут иметь сложные множества разрывов или другие особенности, которые затрудняют использование интеграла Римана.

6. Теоретические преимущества: Интеграл Лебега тесно связан с теорией меры, что дает ему большую гибкость и мощность при работе с различными функциями и пространствами.

7. Теоремы сходимости: Существуют важные теоремы, такие как теорема о мажорированной сходимости и теорема о монотонной сходимости, которые упрощают работу с последовательностями функций и позволяют легко переходить к пределам.

Определение 2.1. [5] *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, где X — множество, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств X, и (μ) — мера на $\mathcal{A}$. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция.*

Применение: Интеграл Лебега широко используется в различных областях математики, включая анализ, теорию вероятностей и статистику. Он позволяет работать с функциями, которые имеют разрывы или другие особенности, которые делают их неудобными для интегрирования с помощью традиционного подхода Римана.

3. Простые функции. Согласно книге "Элементы теории функций и функционального анализа"[6] выпишем определение.

Определение 3.1. *Функция $f(x)$, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется простой, если она измерима и принимает не более, чем счетное число значений.*

Структура простых функций характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.1 [2]. *Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений*

$$y_1, y_2, ..., y_n, ...,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = x : f(x) = y_n$$

измеримы.

Доказательство. Необходимость условия ясна, так как каждое A_n есть прообраз одноточечного множества y_n, а всякое одноточечное множество является борелевским. Достаточность следует из того, что в условиях теоремы прообраз $f^{-1}(B)$ любого борелевского множества есть объединение $\bigcup\limits_{y_n \in B} A_n$ не более чем счетного числа измеримых множеств A_n, т. е. измерим.

Использование простых функций в построении интеграла Лебега будет основано на следующей теореме.

Теорема 3.2. [5, 7]. *Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций.*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим произвольную измеримую функцию $f(x)$ и положим $f_n(x) = m/n$, если $m/n \le f(x) < (m+10)n$ (здесь m - целые, а n — целые положительные). Ясно, что функции $f_n(x)$ простые; при $n \to \infty$ они равномерно сходятся к $f(x)$, так как $|f(x) - f_n(x)| \le 1/n$.

Интеграл Лебега для простых функций Введем понятие интеграла Лебега сначала для функций, названных выше простыми, т. е. для измеримых функций, принимающих конечное или счетное число значений.

Пусть f - некоторая простая функция, принимающая значения

$$y_1, y_2, ..., y_n, ...; y_i \ne y_j \quad \text{при} \quad i \ne j,$$

и пусть A - некоторое измеримое подмножество X.

Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \quad \text{где} \quad A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}, \tag{1}$$

если ряд справа сходится. Мы приходим к следующему определению (в котором по понятным причинам заранее постулируется абсолютная сходимость ряда).

Согласно книге [6] "Элементы теории функций и функционального анализа"выпишем определение.

Определение 3.2. *Простая функция f называется интегрируемой или суммируемой по мере μ на множестве A, если ряд (1) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1) называется интегралом от f по множеству В этом определении предполагается, что все y_n различны. Можно, однако, представить значение интеграла от простой функции в виде суммы произведений вида $c_k \mu(B_k)$ и не предполагая, что все c_k различны.* Это позволяет сделать следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $A = \bigcup\limits_k B_k, B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \ne j$ и пусть на каждом множестве B_k функция f принимает только одно значение c_k. Тогда*

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n y_k \mu(B_k), \tag{2}$$

причем функция f интегрируема на A в том и только том случае, когда ряд (2) абсолютно сходится.

4. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры.

Определение 4.1. [8].*Назовем функцию f интегрируемой (суммируемой) на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f. Предел*

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \tag{3}$$

обозначим

$$\int_A f(x)d\mu$$

и назовем интегралом функции f по множеству A. Это определение корректно, если выполнены следующие условия:

- *Предел (3) для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых на A функций существует.*
- *Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.*
- *Для простых функций определение интегрируемости и интеграла равносильно данному в п. 2. Все эти условия действительно выполнены.*

Основные свойства интеграла Лебега:

1. $\int 1 * d\mu = \mu(A)$.

2. Для любого постоянного k
$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu,$$
причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.
3. Аддитивность:
$$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu,$$
причем из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой.
4. Ограниченная на множестве A функция f интегрируема на A.
5. Монотонность: если $f(x) \geq 0$, то
$$\int_A f(x)d\mu \geq 0.$$
Из этого свойства сразу следует, что если $f(x) \geq g(x)$,
$$\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu,$$
а поэтому, если $m \geq f(x) \geq M$ для всех (или почти всех) $x \in A$, то
$$m\mu(A) \leq \int_A f(x)d\mu \leq M\mu(A).$$
6. Если $\mu(A) = 0$, то
$$\int_A g(x)d\mu = 0.$$
Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то
$$\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu.$$
причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.
7. Если функция ϕ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leq \phi(x)$, то f также интегрируема на A.
8. Интегралы
$$I_1 = \int_A f(x)d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|d\mu.$$
существуют или не существуют одновременно.

5. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. В предыдущем пункте были сформулированы свойства интеграла Лебега по фиксированному множеству. Можно установить некоторые свойства интеграла Лебега, рассматривая данное выражение
$$F(A) = \int_A f(x)d\mu$$
как функцию множества, определенную на совокупности измеримых множеств.

Теорема 5.1. [7]. *Если* $\bigcup\limits_n A_n;\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$, *то*
$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$
причем из существования интеграла в левой части вытекает су-ществование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

Теорема 5.2. [7]. *Если* $A = \bigcup\limits_n,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$ *и ряд*
$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu$$
сходится, то функция f *интегрируема на* A *и*
$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

6. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Выясним связь между интегралами Лебега и Римана. При этом ограничемся простейшим случаем линейной меры Лебега на прямой.

Теорема 6.1. [2] *Если существует интеграл Римана*
$$I = (R)\int_a^b f(x)dx,$$

то f интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу и

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Легко указать примеры ограниченных функций на некотором отрезке, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману. Неограниченные функции вообще не могут быть интегрируемы по Риману, но многие из них интегрируемы по Лебегу. В частности, любая функция $f(x) \geq 0$, для которой интеграл Римана

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

существует при каждом $\varepsilon > 0$ и имеет конечный предел I при $\varepsilon \to 0$, интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причем

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

в случае, когда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{b} |f(x)|dx = \infty,$$

не существует в лебеговом смысле, поскольку, согласно свойству 8, из суммируемости функции $f(x)$ следует, что и функция $|f(x)|$ тоже суммируема. Например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

существует как (условно сходящийся) несобственный интеграл Римана, но не сущесвует как интеграл Лебега. Если рассматривается функция на всей прямой (или полупрямой), то интеграл Римана для такой функции может существовать лишь в несобственном смысле. Опять-таки, если такой интеграл сходится абсолютно, то соответствующий лебегов интеграл существует и имеет то же самое значение. Если же этот ингеграл сходится лишь условно, то в лебеговом смысле функция не интегрируема. Например, функция $\frac{\sin x}{x}$ не интегрируема по Лебегу на всей прямой поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \infty.$$

Однако несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

как известно, существует, и равен π.

7. Решение задач.

Задача 1. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - функция интегрируема по Лебегу на $[a, b]$. Доказать, что если f ограничена, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$.

Решение: 1. Измеримость и ограниченность: так как f интегрируема по Лебегу, она измерима и, по условию задачи, ограничена, то есть существует константа M такая, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$.

2. Критерий интегрируемости по Риману: функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$, если она непрерывна почти всюду на этом интервале и ограничена.

3. Сведение интеграла Лебега к интегралу Римана: рассмотрим множественные определения интегралов Лебега и Римана и их свойства. Важным фактом является то, что если функция f измерима и интегрируема по Лебегу на конечном интервале $[a, b]$, и если f ограничена, то интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана, при условии что f непрерывна почти всюду.

4. Множество разрывов функции: пусть $D \subset [a, b]$ — множество точек разрыва функции f. Так как f интегрируема по Лебегу, множество D имеет меру нуль.

5. Свойство ограниченности: Из ограниченности f следует, что она остается интегрируемой по Риману, так как множества разрывов меры нуль не оказывают влияния на значение интеграла Римана.

Для доказательства рассмотрим разбиение $[a, b]$ на подынтервалы. Пусть $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$ с точками x_i. Рассмотрим верхние и нижние суммы Дарбу для функции f:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

где $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ и $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Так как f интегрируема по Лебегу и f ограничена, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое разбиение P, что разность $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Это вытекает из того, что f непрерывна почти всюду и множество разрывов имеет меру нуль.

Поскольку f ограничена и интегрируема по Лебегу, выполнены условия, при которых интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана на $[a, b]$. Следовательно, f интегрируема по Риману на $[a, b]$.

Таким образом, мы доказали, что если функция f интегрируема по Лебегу и ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема и по Риману на этом интервале.

Задача 2. Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Доказать, что она интегрируема по Лебегу на $[a, b]$.

Решение: 1. Измеримость: функция f, интегрируемая по Риману, является измеримой. Интегрируемость по Риману подразумевает измеримость, так как для интегрируемости по Риману функция должна быть определена и конечна на множестве с полной мерой.

2. Ограниченность: функция f, интегрируемая по Риману на $[a, b]$, ограничена почти всюду на $[a, b]$. Это следует из определения интеграла Римана, где разбиения подынтервалов стремятся к нулю, и значения функции остаются конечными.

3. Сходимость интеграла Римана: интеграл Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ существует и конечен. Это означает, что суммирование значений функции по подынтервалам сходится к определенному значению.

4. Соответствие интегралов: интеграл Лебега для функции f на $[a, b]$ равен интегралу Римана, если функция измерима и конечна почти всюду. Таким образом, если f интегрируема по Риману, то:

$$\int_a^b f(x)\,d\mu = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, функция f, интегрируемая по Риману на $[a, b]$, также интегрируема по Лебегу на $[a, b]$.

Задача 3. Доказать неравенство Чебышева:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_X |f(x)| d\mu$$

для интегрируемой по Лебегу функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ и числа $c > 0$.

Решение: $X_c := \{x \in X : |f(x)| \geq c\}$, $x \in X_c \Rightarrow |f(x)| \geq c$.
Теперь проинтегрируем это неравенство по множеству X_c, т.к это множество измеримое мы имеем право взять интеграл по нему от обеих частей неравенства.

$$\int_X |f(x)| d\mu \geq \int_{X_c} |f(x)| d\mu \geq \int_{X_c} c d\mu = c * \mu(X_c)$$

$$\mu(X_c) \leq \frac{1}{c}\int_X |f(x)| d\mu$$

Задача решена.

Задача 4. Пусть функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Верно ли что $f(x) = 0$ почти всюду на X, если:
а) $\int_X f(x) d\mu = 0$?
б) $\int_X f(x) d\mu = 0$ и f неотрицательна?
в) $\int_E f(x) d\mu = 0$ для любого измеримого множества $E \subset X$?

Решение: а)

$$f(x) = signX = \begin{cases} 1, x \in (0, 1] \\ 0, x = 0 \\ -1, x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$\int_{[-1,1]} f(x) d\mu = 0, \quad f(x) \neq 0\text{- почти всюду}$$

Таким образом, пункт а) - тривиален.

б) Рассмотрим множества: $\widetilde{X} := \{x \in X : f(x) > 0\}$
$X_0 := \{x \in X : f(x) = 0\}$, $X = X_0 \sqcup \widetilde{X}$, $\underset{k \in N}{X_k} := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{k}\}$
$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k = \widetilde{X}$
Оценим по неравенству Чебышева меру $\mu(X_k) \leq k * \int_X f(x) d\mu = 0 \Rightarrow \mu(X_k) = 0 \quad \forall k$ отсюда по свойству непрерывности меры, мы получаем $\mu(\widetilde{X}) = \lim\limits_{k=\infty} \mu(X_k) = 0$.
Множество тех точек, где $f \neq 0$ это в точности $\widetilde{X}$ и его мера равно 0. Это означает, что функция f равна 0 почти всюду на множестве X. Следовательно, в пункте б) ответ - Да.

в) $X_+ = \{x \in X : f(x) \geq 0\}, \quad X_- = \{x \in X : f(x) < 0\}$
$\int_{X_+} f(x) d\mu = 0$ но поскольку еа множестве X_+ функция неотрицательная, то по пункту б) отсюда следует, что $f(x)0$ почти всюду на множестве X_+
Аналогично запишем интеграл по множеству X_-.
$\int_{X_+} f(x) d\mu = -\int_{X_+} |f(x)| d\mu = 0$, следовательно по п.б) $f(x) = 0$ почти всюду на множестве X_-

Таким образом, из этих двух пунктов заключаем, что $f(x) = 0$ почти всюду на $X_+ \sqcup X_- = X$. Ответ - Да.

Задача 5. Пусть функция $f(x), g(x)$ интегрируемы по Лебегу на множестве X. Доказать, что функция $h(x) = max\{f(x), g(x)\}$ также интегрируема по Лебегу на множестве X.

Решение: $X = X_f \sqcup X_g$,

$$X_f = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$$

$$X_g = \{x \in X : g(x) > f(x)\}$$

f интегрируема на $X \Rightarrow f$ интегрируема на $X_f \Rightarrow h$ интегрируема на X_f. $h(x) = max\{f(x), g(x)\} = f(x), \quad x \in X_f$
g интегрируема на $X \Rightarrow g$ интегрируема на $X_g \Rightarrow h$ интегрируема на X_g. $h(x) = max\{f(x), g(x)\} = g(x), \quad x \in X_g$. h интегрируема на $X_f \sqcup X_g = X$.

Заключение. Таким образом, следует подчеркнуть значимость данного математического инструмента в современном анализе и его применение в различных областях науки и инженерии. Рассмотренные свойства интеграла Лебега, такие как абсолютная непрерывность, линейность, монотонность и сходимость по мере, играют ключевую роль в изучении функционального анализа, теории вероятностей, математической статистике и других областях.

Данная работа позволила глубже понять особенности интеграла Лебега и его отличия от классического интеграла Римана, а также проследить его применение в решении разнообразных математических задач. Особое внимание стоит уделить практическим примерам, иллюстрирующим преимущества использования интеграла Лебега в случаях, когда классический интеграл Римана оказывается неприменимым из-за особенностей интегрируемой функции.

Интеграл Лебега является более общим и мощным инструментом по сравнению с интегралом Римана, особенно в контексте работы с предельными переходами и интегрирования функций с разрывами или сложным поведением. Интеграл Римана, хотя и ограничен в применении, остается важным и интуитивно понятным методом для более простых задач анализа.

Благодарность. *Автор выражает глубокую благодарность моему научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за её неоценимую поддержку и руководство во время написания этой работы.*

Список литературы

1. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. 2010. Задачи и упражнения по функциональномуанализу. Учебное пособие. М., Либроком, 216.
2. Виленкин Н. Я. 1984. Функциональный анализ. М., Наука, 424.
3. Колмогоров А. Н. 2017. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит,217
4. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 449.
5. Фихтенгольц Г. М. 2006. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Физматлит, 810.

Поступила в редакцию 23.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Аладьина Алёна Алексеевна – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru