Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 46–51.

Интеграл Римана и его приложения (сравнение различных определений интеграла)

Черкесова Е. Р.
1558890@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной работе проводится сравнительный анализ различных подходов к определению интеграла Римана, включая предел интегральных сумм Римана, верхние и нижние суммы Дарбу и формулу Ньютона – Лейбница. Рассматриваются теоретические аспекты каждого метода, их историческое развитие, а также преимущества и недостатки в контексте математического и функционального анализа.

Ключевые слова: интеграл Римана, интегральная сумма Римана, верхняя сумма Дарбу, нижняя сумма Дарбу, формула Ньютона – Лейбница

Для цитирования: Черкесова Е. Р. 2024. Интеграл Римана и его приложения (сравнение различных определений интеграла). *Студенческий математический журнал*, 2: 46–51.

---

1. Введение. Многие ученые в области математики, физики и философии в своих работах разрабатывали методы, которые привели к созданию интегрального исчисления в великих трудах Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница.

Огюстен Луи Коши дал определение интеграла как предела интегральных сумм и доказал существование интеграла от непрерывной функции. Для более широких классов функций определения интегралов дали Георг Фридрих Бернгард Риман, чье имя носит определенный интеграл (интеграл Римана), а затем Жан Гастон Дарбу и Камиль Мари Эдмон Жордан. Дальнейшее развитие понятие интеграла получило в трудах Томаса Стилтьеса и Анри Луи Лебега.

Георг Фридрих Бернхард Риман (1826 - 1866) был выдающимся немецким математиком, механиком и физиком, членом Берлинской, Парижской академии наук и Лондонского королевского общества. Во время своей крайне непродолжительной жизни он существенно повлиял сразу на несколько разделов математики, одним из наиболее значительных достижений Римана является его теория Римановых поверхностей, которая имеет ключевое значение в теории функций комплексного переменного. Введение им понятия многообразия существенно расширило идеи классической евклидовой геометрии и оказало глубокое воздействие на развитие топологии и геометрии. В настоящее время его работы и открытия продолжают оставаться не менее важными для современной математики и физики.

Интеграл Римана — это фундаментальное понятие во многих математических разделах, используемое для определения площади под кривой кривой на заданном интервале. Сущность этого интеграла заключается в представлении функции через суммы площадей прямоугольников, построенных под графиком функции. Чтобы вычислить интеграл Римана, интервал, на котором определена функция, разбивается на малые подотрезки. В каждом подотрезке выбирается точка, и значение функции в этой точке умножается на длину подотрезка. Интеграл Римана определяется как предел этих сумм, когда длина подотрезков стремится к нулю. Интеграл Римана подходит для широкого класса функций, если они являются непрерывными или кусочно-непрерывными.

2. Определение интеграла как предела интегральных сумм Римана. В книге [5] приведены следующие понятия по теме данного раздела:

Определение 2.1. *Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$. Тогда для неё вводятся следующие объекты:*

1) $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$;

2) $\Delta_k = [x_{k-1}; x_k]$ - отрезок разбиения τ;

3) $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ - длина отрезка разбиения Δ_k;

4) $\lambda(\tau) = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$ - мелкость разбиения τ;

5) $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, где $\forall k$ $\xi_k \in \Delta_k$ - выборка, соответствующая разбиению τ;

6) $\sigma(f;\tau;\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма Римана, соответствующая разбиению τ и выборке ξ.

Определение 2.2. *Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$. Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(f;\tau;\xi)$ при мелкости разбиения $\lambda(\tau)$, стремящейся к нулю, когда выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ для любых выборок ξ выполняется неравенство $|\sigma(f;\tau;\xi) - I| < \varepsilon$.*

В краткой символической форме данное определение можно записать таким образом:

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = I \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall\tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \forall\xi |\sigma(f;\tau;\xi) - I| < \varepsilon.$$

В случае, когда существует конечный предел I интегральных сумм Римана, утверждают, что функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, а данный предел обозначают $\int_a^b f(x)dx$ и называют определенным интегралом Римана (от функции f по отрезку $[a,b]$). В некоторых случаях, желая подчеркнуть, что речь идет именно об интеграле Римана, пишут $(R)\int_a^b f(x)dx$.

В соответствии с общими принципами определения предела можно отметить, что

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = \infty \overset{def}{=} \forall E > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \forall \xi |\sigma(f;\tau;\xi)| > E.$$

Также, множество интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a,b]$ обозначается $R[a,b]$.

Теорема 2.1. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. По определению интеграла для $\varepsilon = 1$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ и для любой выборки $\xi = \{\xi_1; \ldots; \xi_n\}$ будет выполняться неравенство $I - 1 < \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < I + 1$. Фиксируем разбиение τ, для которого выполнены неравенства

$$I - 1 < \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < I + 1.$$

Можно предположить противное: если функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$, то для этого разбиения найдется хотя бы один отрезок Δ_{k_0}, на котором она будет не ограничена. Фиксируем все точки $\xi_k \in \Delta_k$ при $k \neq k_0$ и рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f;\tau;\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k\neq 1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0},$$

как функцию $\xi_{k_0} \in \Delta x_{k_0}$. Так как $f(\xi_{k_0})$ не ограничена на Δ_{k_0}, очевидно, будет не ограничена и вся сумма $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$. А это противоречит неравенствам $I - 1 < \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < I + 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Свойства интеграла Римана:

1) *Невырожденность:* $\int_a^b 1dx = b - a$.

2) *Положительность:* если интегрируемая функция f неотрицательна, то её интеграл на отрезке $[a,b]$ также неотрицателен.

3) *Линейность:* если функции f и g интегрируемы, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $f + \beta g$ тоже интегрируема, и $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

4) *Непрерывность:* если интегрируемые $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b f_i(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

5) *Аддитивность при разбиениях отрезка:* пусть $a < b < c$. Функция f интегрируема на отрезке $[a,c]$, тогда и только тогда, когда она интегрируема на каждом из отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, при этом $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

6) Непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману (следствие свойств 1-5). Разрывные функции могут быть как интегрируемы, так и не интегрируемы.

7) Если функция F является первообразной непрерывной функции f, то интеграл функции f на отрезке $[a,b]$ может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница: он равен $F(b) - F(a)$. (Это общее свойство любых интегралов, удовлетворяющих свойствам 1-5, а не только интеграла Римана). Непрерывная на отрезке функция f всегда имеет первообразную, и каждая первообразная имеет вид: $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, где C - произвольная константа.

3. Определение интеграла как единственного числа, разделяющего верхние и нижние суммы Дарбу. В книге [4] приведены следующие понятия по теме данного раздела:

Определение 3.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и задано разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a,b]$. Определим:*

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции $f(x)$ на $[a,b]$, отвечающими разбиению τ называются соответственно:

$$s(f;\tau) = \Sigma_{i=1,\ldots,I}(x_i - x_{i-1})m_i, \quad S(f;\tau) = \Sigma_{i=1,\ldots,I}(x_i - x_{i-1})M_i.$$

Интеграл Римана функции $f(x)$ на $[a,b]$ существует, если для любого разбиения τ разность между верхней и нижней суммами Дарбу может быть сделана сколь угодно малой при достаточном увеличении числа разбиений.

Интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ существует и равен числу I, если для любого положительного числа ε существует такое разбиение τ, что разница между верхней и нижней суммами Дарбу меньше ε:

$$S(f;\tau) - s(f;\tau) < \varepsilon.$$

В этом случае, интеграл Римана равен единственному числу I, которое разделяет верхние и нижние суммы Дарбу, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = I,$$

где $s(f;\tau) \le I \le S(f;\tau)$ для всех разбиений τ.

Лемма 3.1. *Если функция f ограничена снизу на $[a,b]$, то для любого разбиения $\tau - s(f;\tau) \in \mathbb{R}$. Если функция f неограниченна снизу на $[a,b]$, то для любого разбиения $\tau - s(f;\tau) = -\infty$.*

Лемма 3.2. *Если функция f ограничена сверху на $[a,b]$, то для любого разбиения $\tau - S(f;\tau) \in \mathbb{R}$. Если функция f неограниченна сверху на $[a,b]$, то для любого разбиения $\tau - S(f;\tau) = -\infty$.*

Свойства сумм Дарбу:

1) Для любой выборки $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ и разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^I$ справедливы неравенства $s_T \le \sigma_T(\xi, f) \le S_T$.

Доказательство. Так как $\forall \xi_i \in \Delta_i$ выполняются неравенства $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Домножим все части на Δx_i.

Получим: $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Перейдя к сумме в каждой части неравенства, получаем:

$\Sigma_{i=1}^n m_i \Delta x_i \le \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \Sigma_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, где $\Sigma_{i=1}^n m_i \Delta x_i - s_T$, $\Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - \sigma_T$, $\Sigma_{i=1}^n M_i \Delta x_i - S_T$.

Согласно определению сумм Дарбу и интегральной суммы σ_T, утверждения $s_T \le \sigma_T(\xi, f) \le S_T$ и $\Sigma_{i=1}^n m_i \Delta x_i \le \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \Sigma_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ равносильны.

2) При T - фиксированном, справедливы равенства $S_T = \sup \sigma_T(\xi, f)$, $s_T = \inf \sigma_T(\xi, f)$.

Доказательство. Докажем первое равенство. Необходимо показать, что S_T - минимальный предел верхних границ для интегральной суммы:

$\forall\ \xi > 0\ \exists\ \xi' : S_T - \varepsilon < \sigma_T(\xi', f)$.

Так как $M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$, то $\forall \xi > 0 \exists \xi_i' \in \Delta_i$

$M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i')$

$0 < M_i - f(\xi_i') < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = \overline{1,n}$.

Домножим на $\Delta x_i : 0 < M_i \Delta x_i - f(\xi_i')\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i$

Просуммирем элементы:

$0 < \sum\limits_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i < \sum\limits_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i$

$0 \le S_T - \sigma_T(\xi', f) < \varepsilon$

Неравенства $S_T = \sup \sigma_T(\xi, f), \quad s_T = \inf \sigma_T(\xi, f)$ и $0 \le S_T - \sigma_T(\xi', f) < \varepsilon$ равносильны.

Получили, что S_T - минимальный предел верхних границ для интегральной суммы $S_T = \sup \sigma_T(\xi, f)$. Второе утверждение доказывается аналогично.

3) Существуют числа $\underline{I} = \sup s_T$, $\overline{I} = \inf S_T$, называемые верхним и нижним интегралами Дарбу, такие, что для любых разбиений T', T'' отрезка $[a,b]$: $s_{T'} \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{T''}$.

Доказательство. Существуют $\underline{I} = \sup s_T$ и $\overline{I} = \inf S_T$, такие что для всевозможных разбиений отрезка $[a,b]$ и для любых разбиений T', T'' выполняется неравенство: $s_{T'} \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{T''}$.

4. Определение интеграла от непрерывной функции как приращение первообразной (формула Ньютона – Лейбница). В книге [6] приведены следующие понятия по теме данного раздела:

Определение 4.1. *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией $f(x)$ на $[a,b]$, если $\forall x \in (a,b) F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a,b]$ значения функции f равны односторонним производным функциям F:*

$$f(a) = F'{}_{+}(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x-a},$$

$$f(a) = F'{}_{-}(a) = \lim_{x \to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x-b}.$$

Теорема 4.1.*Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $x, x_0 \in [a,b]$, $x \ne x_0$.

Тогда $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = (x - x_0)f(x_0) + \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt$.

Следовательно,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \le \frac{1}{|x - x_0|}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt.$$

В силу непрерывности функции f на $[a,b]$

$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : \forall t \in [a,b] |t - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(t) - F(x_0)| \le \varepsilon$, поэтому $\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b] |x - x_0| \le \delta \Rightarrow \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \le |x - x_0|\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \le \varepsilon$, то есть $\forall x_0 \in [a,b] \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_2)}{x - x_2} = f(x_0)$, где при $x_0 = a$ имеется в виду предел справа, а при $x_0 = b$ - предел слева.

Это означает, что $\forall x_0 \in (a,b) F^{|}(x_0) = f(x_0)$, $F_{+}^{|}(a) = f(a)$, $F_{-}^{|}(b) = f(b)$. Таким образом, функция F является первообразной функции f на $[a,b]$.

Следствие 4.1.Любая первообразная непрерывной на $[a,b]$ функции f имеет вид $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, где $\in \mathbb{R}$ – произвольная константа.

Следствие 4.2. (Формула Ньютона-Лейбница) Если F - первообразная непрерывной на $[a,b]$ функции f, то $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Теорема 4.3. (Замена переменной) *Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([a,b])$. Тогда $\int_a^b f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.*

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $\varphi([a,b])$, то существует первообразная F для функции f:

$$\forall x \in \varphi([a,b]) F'(x) = f(x).$$

По формуле Ньютона - Лейбница: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Поскольку $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то функция $F(\varphi(t))$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b dF(\varphi(t)) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Теорема 4.4. (Интегрирование по частям) *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Доказательство. Пользуясь линейностью интеграла и формулой Ньютона-Лейбница, получаем: $\int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x) = \int_a^b ((u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$, откуда следует доказываемое.

Теорема 4.5. (Интегральная теорема о среднем) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] g(x) \neq 0$, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. Поскольку функции f и g непрерывны, то существуют дифференцируемые на $[a,b]$ функции $\Phi(x)$ и $G(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x)g(x), \quad G' = g(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

По теореме Коши о среднем $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi).$$

Так как по формуле Ньютона-Лейбница

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)dx, \text{ то } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

5. Эквивалентность «первого», «второго» и «третьего» определений интеграла Римана. В книгах [5, 6, 4] приведены следующие понятия по теме данного раздела:

Теорема 5.1. *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то для любой последовательности разбиений $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ отрезка $[a,b]$ такой, что $\lambda(\tau_n) \to 0$, при $n \to \infty$, и любой последовательности выборок $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ соответствующих разбиениям τ_n, последовательность интегральных сумм $\sigma_n = \sigma(D, \tau_n, \xi_n)$ имеет предел равный $\int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. По условию функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$. Пусть $I = \int_a^b f(x)dx$.

По определению для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ с мелкостью $\sigma(\tau) < \delta$ для любой выборки ξ выполняется неравенство $|\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.

Но у нас по условию теоремы $\lambda(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, найдётся такое N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\lambda(\tau_n) < \delta$.

Но тогда для любой выборки ξ^n

$$|\sigma(f,\tau_n,\xi^n) - I| < \varepsilon$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$, мы нашли такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|\sigma(f,\tau_n,\xi^n) - I| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f,\tau_n,\xi_n) = I$.

Теорема 5.2. *Если интеграл Римана и определенный интеграл Ньютона-Лейбница функции $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ существуют одновременно, то они равны друг другу.*

Теорема 5.3. *Для ограниченной функции $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ интегралы Римана и Дарбу эквивалентны, то есть они существуют или не существуют одновременно, а в случае существования их значения совпадают.*

Теорема 5.4. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана интегрируемая по Риману функция $f(x)$. Тогда функция $F(x) - \int_a^x f(t)dt$ непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. В силу необходимого условия интегрируемости функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] |f(x)| \leq C$.

Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$. В силу свойства аддитивности интеграла относительно отрезков интегрирования $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_2}^{x_1} f(t)dt$. По теореме об интегрировании неравенств $|F(x_2) - F(x_1)| \leq |\int_{x_2}^{x_1} Cdt| = C|x_2 - x_1|$. Следовательно, $\forall x_0 \in [a,b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} : \forall x \in [a,b] |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, то есть функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

6. Решение задач.

Задача №1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x dx$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xsinxdx.$$

Преобразуем $sin^2x = (1 - cos^2x)$, используя тригонометрическое тождество и $sinxdx = d(cosx)$, внеся переменную под знак дифференциала.

Таким образом, получим: $-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos^2x)d(cosx)$.

Раскроем скобки и разобьем даный интеграл на две части:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(cosx) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xd(cosx).$$

Теперь, вычислим соответствующие неопределенные интегралы:

$$-cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{cos^3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(cos\frac{\pi}{2} - cos0) + \frac{1}{3}(cos^3\frac{\pi}{2} - cos^3 0) = 1 + \frac{1}{3}(-1) = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача №2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

$$\int_0^{ln2} \sqrt{e^x - 1}dx$$

Решение:

Пусть $t = \sqrt{e^x - 1}$, тогда $t^2 = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow x = ln(t^2 + 1)$.

Значит, $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$.

Теперь, необходимо изменить пределы интегрирования:

$$\begin{cases} \text{при } x = 0,\ t = \sqrt{e^0 - 1} = 0, \\ \text{при } x = ln2,\ t = \sqrt{e^{ln2} - 1} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\int_0^1 t\frac{2t}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 1 - \frac{1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 1dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = 2t\Big|_0^1 - 2arctg\Big|_0^1 = 2(1-0) - 2(arctg1 - arctg0) = 2 - 2(\frac{\pi}{4} - 0) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Задача №3. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{sin^2x}$$

Решение:

Формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Пусть $u = x$, тогда $du = dx$, $dv = \frac{dx}{sin^2x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx$.

Таким образом, получим: $-xctgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx = -(\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}ctg\frac{\pi}{6}) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx}dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(sinx)}{sinx}dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + ln|sin\frac{\pi}{2}|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + ln|sin\frac{\pi}{2}| - ln|sin\frac{\pi}{6}| = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - ln\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + ln2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + ln2$.

Задача №4. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

Решение:

Преобразуем $x^2 - 3x + 2$ с помощью веделения полного квадрата, получим: $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2\frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int_3^4 \frac{d(x-\frac{3}{2})}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

Используем формулу $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$.

Получим:

$$\frac{1}{2\frac{1}{2}} ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_3^4 = ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_3^4$$

Используя формулу Ньютона - Лейбница $\int f(x)dx = Fx\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, получаем:

$$ln\left|\frac{4-2}{4-1}\right| - ln\left|\frac{3-2}{3-1}\right| = ln\frac{2}{3} - ln\frac{1}{2} = ln\frac{4}{3}.$$

Ответ: $ln\frac{4}{3}$.

Задача №5. Найти суммы Дарбу для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-2, 3]$, соответствующие разбиению этого отрезка на n частей.

Решение: В данном случае $\Delta x_i = \frac{5}{n}$, $x_i = -2 + \frac{5i}{n}$, $i = \overline{1, n}$. В силу непрерывности и возрастания этой функции при любом разбиении отрезка она достигает наименьшего $m_i = x_{i-1}^3$ и наибольшего $M_i = x_i^3$ значений на левом и правом концах частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ соответственно. Согласно формулам:

$$s_T = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}(-2 + 5\frac{i-1}{n}),\quad S_T = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}(-2 + \frac{5i}{n})^3$$

Принимая во внимание, что $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, получаем:

$$s_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2},\quad S_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

Ответ: $s_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $S_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$.

Заключение. Таким образом, исследование данной темы, в частности, изучение и сравнительный анализ различных определений интеграла Римана, позволило выявить ключевые характеристики и преимущества каждого из них. Значение интеграла Римана в математическом и функциональном анализе трудно переоценить, поскольку он играет существенную роль в развитии различных теоретических и прикладных дисциплин.

Благодарность. *Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, Лидии Александровне Ковалевой, за её неоценимую поддержку и руководство во время написания этой работы.*

Список литературы

1. Иванов Г. Е. 2011. Лекции по математическому анализу. М., МФТИ, 318 с.
2. Клевчихин Ю. А. 2012. Лекции по математическому анализу. Владивосток., ДВФУ, 219 с.
3. Климов, В.С. 2006. Одномерный математический анализ. Ярославль., ЯрГУ, 126 с.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 2004. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 572 с.
5. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. 1986. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. М., Наука, 528.
6. Рудин В. В. 1976. Функциональный анализ. Начальный курс. М., Мир, 450.
7. Фихтенгольц Г. М. 2006. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Физматлит, 810 с.
8. Виленкин Н.Я. 1984. Функциональный анализ. М., Наука, 424 с.

Поступила в редакцию 23.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Черкесова Екатерина Романовна – бакалавр 3-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru