Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 42–45.

Краевые задачи для систем уравнений эллиптического типа

Сопова Т. В.
sopova_t@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье показано, что представляют собой краевые задачи эллиптического типа, а также краевая задача Римана и краевая задача Гильберта. Также какие существуют формы записи системы и что представляют собой функции класса $C_{\overline{z}}$.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, краевая задача Римана, функции класса $C_{\overline{z}}$, эллиптическая система уравнений

Для цитирования: Сопова Т. В. 2024. Краевые задачи для систем уравнений эллиптического типа. *Студенческий математический журнал*, 2: 42–45.

---

1. Введение. История краевых задач началась в XIX веке, когда математики и физики столкнулись с необходимостью решать задачи, связанные с распространением тепла, звука и электромагнитных волн. Один из самых известных примеров краевой задачи – это уравнение Лапласа, которое описывает распределение потенциала в пространстве.

С течением времени краевые задачи нашли применение в различных областях науки и техники, таких как аэродинамика, гидродинамика, механика твердого тела и другие. Современные методы решения краевых задач, такие как метод конечных элементов, метод разностных аппроксимаций и др., позволяют эффективно и точно находить решения сложных задач.

2. Основные понятия и определения.
Определение 1. *Система уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}u_x + a_{12}v_y = F_1(x, y; u, v), \\ a_{21}u_y + a_{22}v_x = F_2(x, y; u, v) \end{cases}$$

называется эллиптической, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

есть знакоопределенная функция [4].

Определение 2. *Эллиптической системой дифференциальных уравнений первого порядка называется система вида [6].*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = a(x, y)u + b(x, y)v + f(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = c(x, y)u + d(x, y)v + g(x, y). \end{cases}$$

Определение 3. *Функции, для которых предел в правой стороне равенства [4]*

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \lim_{L_1 \to z} \frac{1}{2i|D_1|} \int\limits_{L_1} U(\tau) d\tau,$$

где L_1 – граница области D, а $|D_1|$ – площадь, заключенная внутри контура L_1 существует и непрерывен, назовем функциями класса $C_{\overline{z}}$.

Определение 4. *Краевая задача Римана – это задача, которая сводится к отысканию двух функций: $\Phi^+(z)$ – аналитической в области D^+ и $\Phi^-(z)$ – аналитической в области D^-, включая $z = \infty$, удовлетворяющих на контуре L линейному соотношению* [6]

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{или} \quad \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

3. Краевые задачи. Для функций класса $C_{\overline{z}}$, можно ставить те же краевые задачи, что и для аналитических функций комплексного переменного z. Рассмотрим краевую задачу типа задачи Гильберта.

Задача. Определить регулярное в области D, непрерывное в $D + L$ $(L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m)$ решение $U = u + iv$ уравнения [7]

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} = A\overline{U}, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\mathrm{Re}[(\alpha - i\beta)U] \equiv \alpha u + \beta v = \gamma, \tag{2}$$

где α, β, γ – заданные на L, функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. И L_j – кривые.
Решение. Для решения этой задачи понадобятся формула $U(z) = \varphi(z)e^{\omega(z)}$, а также формула

$$U(z) = \Phi(z) + \iint\limits_D \Gamma_1(z,\zeta)\Phi(\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_D \Gamma_2(z,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}d\xi d\eta.$$

Необходимо свести задачу к краевым задачам аналитических функций.

Для начала с помощью формулы

$$U(z) = \Phi(z) + \iint\limits_D \Gamma_1(z,\zeta)\Phi(\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_D \Gamma_2(z,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}d\xi d\eta$$

приведем представленную краевую задачу к краевой задаче для аналитической функции $\Phi(z)$:

$$\mathrm{Re}\left\{(\alpha - i\beta)\left[\Phi(t) + \iint\limits_D \Gamma_1(t,\zeta)\Phi(\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_D \Gamma_2(t,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}d\xi d\eta\right]\right\} = \gamma,$$

С помощью одного из интегральных представлений для аналитических функций можно свести эту краевую задачу к интегральному уравнению. Также можно воспользоваться работой [2] И. Н. Векуа, в которой он сводит задачу к следующему интегральному уравнению

$$\mathrm{Re}\left\{(\alpha - i\beta)\left[\mu(s) + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}d\tau\right]\right\} + \int\limits_L K(s,\sigma)\mu(\sigma)d\sigma = \gamma_1,$$

где $K(s,\sigma)$ – какое-то вполне определенное фредгольмово ядро. Это происходит благодаря интегральному представлению:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}d\tau + iC,$$

где функция $\Phi(z)$ аналитична и однозначна в конечной многосвязной области D^+, а C – произвольная действительная постоянная. Весьма интересным является факт, что характеристическая часть данного уравнения такая же как и у уравнения для решения обычной задачи Гильберта для многосвязной области.

Для сведения задачи к интегральному уравнению Фредгольма можно использовать интегральное представление Д. И. Шермана [6], которое имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\tau) - ib(\sigma)}\frac{d\tau}{\tau - z} + P(z).$$

Далее проведем исследование разрешимости обыкновенной задачи Гильберта. Для этого выражение U из $U(z) = \varphi(z)e^{\omega(z)}$ подставим в краевое условие (2) и благодаря этому получим: $\mathrm{Re}\,[e^{\omega}(\alpha - i\beta)\varphi(t)] = \gamma$. В последнем выражении заменим $e^{\omega}(\alpha - i\beta)$ на $h(t)$ тем самым придем к краевой задачи Гильберта.

$$\mathrm{Re}\,[e^{\omega}h(t)\varphi(t)] = \gamma \tag{3}$$

для функции $\varphi(z)$, которая является аналитической.

Полученная краевая задача служит только для качественного исследования исходной задачи. Это происходит исходя из того, что от U зависит

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D A\frac{\overline{U}}{U}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}.$$

Индекс функции $h(t)$ может быть вычислен, но сама функция неизвестна. Он будет иметь следующий вид $\mathrm{Ind}\; h(t) = \mathrm{Ind}\;(\alpha - i\beta) + \mathrm{Ind}\; e^{\omega} = \mathrm{Ind}\;(\alpha - i\beta)$. Отсюда делаем вывод, что индекс задачи Гильберта (3) равен индексу исходной задачи (2).

В своей работе [3] И. Н. Векуа получает некоторые выводы, которые получаются из знания индекса и непосредственного исследования интегрального уравнения.

4. Постановка краевой задачи Римана. Рассмотрим однородное уравнение (1), в котором $A(z)$ непрерывна во всей плоскости, кроме контура L. При переходе через него возможны разрывы 1-го рода. Также $|A(z)| < \dfrac{M}{|z|^{\alpha}}, \alpha > 1$.

Задача Римана. Найти пару решений уравнения (1) $U^{+}(z), U^{-}(z)$, регулярных в областях D^{+}, D^{-} соответственно, непрерывных вплоть до контура L, краевые значения которых на L удовлетворяют линейному соотношению

$$U^{+}(t) = G(t)U^{-}(t) + g(t),$$

где $G(t), g(t)$ – заданные функции точек контура, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(t) \neq 0$ [5].

Определение 5. *Функции $G(t)$ и $g(t)$ называются кусочно регулярным решением [1].*

Теорема. *Решение уравнения (1), непрерывное во всей плоскости и имеющее заданный конечный порядок на бесконечности, тождественно равно $U_P(z)$[2].*

Сформулированная теорема является аналогом обобщенной теоремы Лиувилля.

Далее перейдем к непосредственному решению поставленной выше задачи Римана. Для этого рассмотрим дополнительную задачу.

Задача. Определить кусочно регулярное решение уравнения (1), имеющее на бесконечности заданный порядок и удовлетворяющее на контуре L краевому условию

$$U^{+}(t) - U^{-}(t) = g(t), \tag{4}$$

где $g(t)$ заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера[5]. Ее решение представимо в виде

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \Omega_1(z,\tau)g(\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \Omega_2(z,\tau)\overline{g(\tau)}d\overline{\tau} + U_P(z). \tag{5}$$

5. Однородная задача. Данная задача представима в виде

$$U^{+}(t) = G(t)U^{-}(t). \tag{6}$$

С учетом того, что

$$U^{+}(t) = \varphi^{+}(t)e^{\omega(t)}, \quad U^{-}(t) = \varphi^{-}(t)e^{\omega(t)},$$

где $\omega(z)$ непрерывна во всей плоскости, подставляя эти выражения в краевое условие получим краевую задачу Римана для кусочно аналитической функции $\varphi(z)$, которая имеет вид

$$\varphi^{+}(t) = G(t)\varphi^{-}(t). \tag{7}$$

Благодаря взаимно-однозначному соответствию представленная краевая задача (6) имеет столько же решений, сколько их имеет обыкновенная краевая задача Римана (7).

Пусть $X(z)$ – каноническая функция краевой задачи (7).

Определение 6. *Индекс коэффициента $G(t)\,\chi$ будем называть индексом предложенной задачи (6), а $X(z)$ ее канонической функцией [4].*

Подставим в введенную ранее формулу

$$U(z) = \varphi(z)\left[1 + \iint\limits_{D} \Gamma_1^{\varphi}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_{D} \Gamma_2^{\varphi}(z,\zeta)d\xi d\eta\right]$$

вместо аналитической функции $\varphi(z)$ линейно независимые решения $z^k X(z), iz^k X(z) (k = 0,1,\ldots,\chi)$ задачи (7). В результате этого получим $2\chi + 2$ линейно независимых решений задачи (6), которые имеют вид

$$\begin{cases} U_{2k}(z) = z^k X(z)\left[1 + \iint\limits_{E} \Gamma_{1,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_{E} \Gamma_{2,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta\right], \\ U_{2k+1}(z) = iz^k X(z)\left[1 + \iint\limits_{E} \Gamma^{i}_{1,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_{E} \Gamma^{i}_{2,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta\right], \end{cases}$$

где $\Gamma_{1,k,X}, \Gamma_{2,k,X}$ – резольвенты уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} = A(z)\frac{\overline{z^k X(z)}}{z^k X(z)}\overline{U},$$

а резольвентами уравнения
$$\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} = -A(z)\frac{\overline{z^k X(z)}}{z^k X(z)}\overline{U},$$
являются $\Gamma^i_{1,k,X}, \Gamma^i_{2,k,X}$.

6. Неоднородная задача. Данная задача представима в виде
$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t). \tag{8}$$
Перепишем краевое условие следующим образом $\frac{U^+(t)}{X^+(t)} - \frac{U^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}$. Для решения последней задачи необходимо в формуле (5) заменить g на $\frac{g}{X^+}$ и U на $\frac{U}{X}$, при этом $V(z) = \frac{U(z)}{X(z)}$ является решением дифференциального уравнения $\frac{\partial V}{\partial \overline{z}} = A(z)\frac{\overline{X(z)}}{X(z)}\overline{V}$.

Отсюда получаем, что решение краевой задачи (8) можно представить в виде
$$U(z) = X(z)[W(z) + V_P(z), \tag{9}$$
$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega_1(z,\tau)\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega_2(z,\tau)\frac{\overline{g(\tau)}}{X^+(\tau)}d\overline{\tau},$$
а также
$$V_P(z) = \sum_{k=0}^{2\chi+1} A_k V_k(z), \tag{10}$$
$$\begin{cases} V_{2k}(z) = z^k\left[1 + \iint\limits_E \Gamma_{1,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_E \Gamma_{2,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta\right], \\ V_{2k+1}(z) = iz^k\left[1 + \iint\limits_E \Gamma^i_{1,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint\limits_E \Gamma^i_{2,k,X}(z,\zeta)d\xi d\eta\right]. \end{cases}$$
Здесь ω_1, ω_2 – определенные функции, а Γ_1, Γ_2 – резольвенты уравнений $\frac{\partial V}{\partial z} = \pm A(z)\frac{\overline{z^k X(z)}}{z^k X(z)}\overline{V}$.

7. Заключение. В данной статье выяснено, что представляют собой краевые задачи эллиптического типа, а также краевая задача Римана и краевая задача Гильберта. Также какие существуют формы записи системы и что представляют собой функции класса $C_{\overline{z}}$.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Векуа И. Н. 1988. Обобщенные аналитические функции. М: Наука, 512 с.
2. Векуа И. Н. 1954. О некоторых свойствах решений систем уравнений эллиптического типа. ДАН СССР. – том 98, №2, 181-184 с.
3. Векуа И. Н. 1952. Системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Матем. сб. – том 73, №2, 218-314 с.
4. Гахов Ф. Д. 1958. Краевые задачи. Москва, 544 с.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. 1968. Интегральные уравнения. М.: Наука, 448 с.
6. Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 408 с.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. 1965. Элементы функционального анализа. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 520 с.

Поступила в редакцию 21.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Сопова Татьяна Владимировна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsu.edu.ru