Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 37–41.

Краевая задача Гильберта для многосвязной области

Ильминский К. В.
k.ilminskij@mail.ru

Аннотация. Цель данной работы направлена на ознакомление с краевой задачей Гильберта для многосвязной области, а также с её построением и методами решения. Также в данной работе приведены такие определения, как аналитическая функция, кусочно– гладкая кривая, многосвязная область и её свойства; рассмотрен оператор Шварца и регуляризующий множитель; приведена классификация краевых задач для аналитических функций, а также рассмотрены методы для решения таких задач.

Ключевые слова: аналитическая функция, краевая задача Гильберта, многосвязная область, оператор Шварца, регуляризующий множитель

Для цитирования: Ильминский К. В. 2024. Краевая задача Гильберта для многосвязной области. *Студенческий математический журнал*, 2: 37–41.

Введение. В современной математике краевые задачи занимают особое место, так как они тесно связаны с многими областями науки и техники, включая физику, инженерию и информационные технологии. Среди многообразия краевых задач особый интерес представляет краевая задача Гильберта для многосвязных областей. Эта задача является важным инструментом в теории функций комплексного переменного и находит применение в различных областях математической физики.

Развитие теории краевых задач начинается с работ Давида Гильберта, который в начале XX века заложил основы теории интегральных уравнений, в том числе и краевых задач для аналитических функций. После работ Гильберта многие математики продолжили изучение краевых задач, расширяя и углубляя теоретические основы. Среди них были такие выдающиеся ученые, как Рольф Неванлинна и Ларс Альфорс, которые внесли значительный вклад в теорию функций комплексного переменного и теорию конформных отображений.

Развитие методов решения краевых задач Гильберта для многосвязных областей тесно связано с работами многих выдающихся математиков XX века. Особый вклад в развитие данной области внесли такие ученые, как Риман, Нейман и Пуанкаре, которые разработали основы теории потенциала и конформных отображений. Эти теоретические подходы легли в основу современных методов решения краевых задач в многосвязных областях.

1. Необходимые сведения.

Определение 2.1 *Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного. Функция $f(z)$ называется аналитической, если она дифференцируема в каждой точке своей области определения*[2].

Определение 2.2 Γ *является кусочно-гладкой кривой, если* $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k$, *где* Γ_k *– гладкие кривые и конец предыдущей совпадает с началом следующей, кроме того число* Γ_k *– конечно.*

Определение 2.3 *Область определяется как открытое связное множество. Такая область может обладать как связной, так и несвязной границей. В случае наличия связной границы, граничные точки образуют связное множество, поскольку любые две из них могут быть соединены непрерывной кривой* [2].

Область с связной границей называется односвязной. Если же граница несвязна, область называется многосвязной. Число компонент границы данной области — порядок связности этой области.

2. Классификация краевых задач для аналитических функций. Краевые задачи для аналитических функций могут быть классифицированы по различным критериям, в зависимости от характера дифференциального уравнения и природы краевых условий. Выделяется следующая классификация.

1. По типу краевых условий.
   1) Задача Дирихле: требуется найти функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению внутри области и принимающую заданные значения на границе области.
   2) Задача Неймана: требуется найти функцию, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению в области и имеет заданные нормальные производные на границе области.
   3) Смешанные задачи: комбинируют условия Дирихле и Неймана на разных частях границы области.
2. По типу дифференциального уравнения.
   1) Линейные и нелинейные задачи: в зависимости от того, является ли дифференциальное уравнение линейным или нелинейным.
   2) Эллиптические, параболические и гиперболические задачи: классификация зависит от типа дифференциального уравнения в частных производных, лежащего в основе задачи.

3. По характеру области.
   1) Задачи в ограниченных областях: когда область, в которой решается задача, ограничена.
   2) Задачи в неограниченных областях: когда область решения задачи не ограничена.

3. Краевая задача Гильберта для односвязной области. Краевая задача Гильберта — это класс задач, в которых требуется найти функцию, аналитическую в некоторой области и удовлетворяющую определенным условиям на границе этой области.

Пусть L – простой гладкий замкнутый контур, а действительные функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ дуги $s \in L$ удовлетворяют условию Гёльдера. Сформулируем краевую задачу Гильберта.
Определение 4.1 «*Требуется найти аналитическую в области D^+ и непрерывную на контуре функцию*

$$f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y), \tag{1}$$

предельные значения которой удовлетворяют на контуре следующему соотношению:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s). \tag{2}$$

При $c(s) = 0$ имеем однородную задачу, при $c(s) \neq 0$ — неоднородную» .

Существует несколько методов для решения таких задач.
1. Метод интегральных уравнений. Один из классических подходов к решению краевых задач Гильберта заключается в сведении задачи к интегральному уравнению, чаще всего уравнению Фредгольма второго рода. Решение интегрального уравнения, в свою очередь, может быть найдено численно или аналитически в некоторых случаях.
2. Метод Римана - Гильберта. Этот метод основан на теореме Римана о краевой задаче и позволяет свести решение краевой задачи к задаче нахождения функции, аналитической в данной области, и удовлетворяющей определённым граничным условиям. Метод включает построение специальной аналитической функции, удовлетворяющей заданным условиям на границе.
3. Метод конформных отображений. Поскольку краевые задачи Гильберта рассматриваются в односвязных областях, можно использовать теорему Римана о конформных отображениях для преобразования исходной области в более простую, например, в единичный круг. В новой области задача может быть решена более просто, а затем решение может быть обратно трансформировано в исходную область.
Теорема. *Пусть D — односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не совпадающая со всей плоскостью $\mathbb{C}$. Тогда существует конформное отображение f области D на единичный круг* $|z| < 1$.
Здесь под конформным отображением понимается голоморфное (аналитическое) и инъективное (однозначное и взаимно однозначное на своем образе) отображение, сохраняющее углы между кривыми.
4. Методы комплексного потенциала. В некоторых случаях краевые задачи Гильберта могут быть решены с использованием теории комплексного потенциала, особенно в приложениях к теории упругости и гидродинамике.
5. Численные методы. Для решения краевых задач Гильберта также могут быть применены различные численные методы, включая методы конечных элементов, методы конечных разностей и метод граничных элементов. Эти методы особенно полезны, когда точное аналитическое решение найти сложно или невозможно.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и области применения в зависимости от конкретной формы краевой задачи, её условий и специфики рассматриваемой области.

4. Формулировка краевой задачи Гильберта для многосвязной области. Пусть D — многосвязная область на комплексной плоскости, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Задача Гильберта заключается в нахождении функции $u(x,y)+iv(x,y)$, голоморфной в D и непрерывной в $D \cup \partial D$, удовлетворяющей на каждом куске границы L_j линейному граничному условию:

$$a_j(s)u(x,y) + b_j(s)v(x,y) = c_j(s),$$

где s обозначает длину дуги вдоль кривой L_j, а $a_j(s)$, $b_j(s)$, и $c_j(s)$ — заданные действительные функции, определённые на соответствующих участках границы, причём для всех s и j

$$a_j^2(s) + b_j^2(s) > 0.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ представляют собой действительную и мнимую части искомой комплексной функции. Задача требует найти такую функцию, которая в каждой точке границы удовлетворяет заданному линейному соотношению между её действительной и мнимой частями [1].

5. Оператор Шварца и регуляризующий множитель. Оператор Шварца определяется формулой

$$Su \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_L T(z,\tau)u(\sigma)d\sigma.$$

Аналитическая функция $F(z)$, определяемая оператором Шварца

$$F(z) = Su + iv_0,$$

имеет следующий характер:

$$F(z) = F_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{v_j}{2\pi} \ln\left(z - z_j\right), \tag{3}$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\partial M_0(z,\tau)}{\partial v} + \frac{1}{\tau - z} \frac{\partial \tau}{\partial v} \right] u(\sigma) d\sigma$$

является однозначной аналитической функцией, при этом:

$$v_j = \int_L u(\sigma)\alpha_j(\tau) d\sigma \ \text{— определённые постоянные.}$$

Из формулы () легко увидеть, что постоянные v_j равны приращению мнимой части функции $F(z)$ при обходе контуров L_j.

Для того чтобы оператор Шварца определял однозначную функцию, очевидно, нужно потребовать, чтобы все v_j обращались в нуль.

Теорема. *Для того чтобы произвольная функция $u(s)$, заданная на контуре, могла быть действительной частью аналитической и однозначной в области функции, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношениям:*

$$\int_L u(s)\alpha_j(t) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

В случае бесконечной области D^+, когда контур L_0 отсутствует, все выписанные формулы останутся справедливыми, только условие ограниченности на бесконечности даёт для β_j и α_j условия:

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(\zeta) = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\zeta) = 0.$$

Для кругового кольца комплексная функция Грина может быть выражена через известную в теории эллиптических функций функцию ϑ_1, а ядро Шварца через ζ-функцию Вейерштрасса.

Введем понятие регуляризующего множителя. Пусть $a(s)+ib(s)$ – заданная на контуре L комплексная функция, не обращающаяся в нуль. Рассмотрим частный случай, когда изменение аргумента $a(s)+ib(s)$ при обходе любого нз внутренних контуров равно нулю, так как к нему будут сводиться интересующие нас в дальнейшем задачи. Пусть

$$\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = \frac{1}{2\pi}\{\arg(a + ib)\}_L = \\ = \frac{1}{2\pi}\{\arg(a + ib)\}_{L_0} = æ,$$

где æ - некоторое целое число. Будем, как всегда, считать начало координат принадлежащим области D^+.

Определение. *«Регуляризующим множителем комплексной функции $a(s) + ib(s)$ будем называть такую действительную положительную функцию $p(s)$, вообще говоря, многозначную, что произведение $p(s)[a(s) + ib(s)]$ будет краевым значением функции, аналитической вообще говоря, многозначной и имеющей нулевой порядок всюду в области D^+, за исключением начала координат, где порядок её равен индексу æ».*

По определению, будем иметь:

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^{æ} e^{i\gamma(t)}, \tag{4}$$

где $\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y)$ — аналитическая в D^+ функция.

Приравнивая модули и аргументы, получим:

$$p(s)\sqrt{a^2(s) + b^2(s)} = |t|^{æ} e^{-\omega_1(s)}, \ \arg\left[\frac{a(s) + ib(s)}{t^{æ}}\right] = \omega(s).$$

На основании последнего равенства

$$\gamma(z) = S \arg\left[\frac{a + ib}{t^{æ}}\right],$$

причём для определенности на функцию $\gamma(z)$ наложено дополнительное условие

$$\operatorname{Im}\gamma\left(z_0\right)=0,$$

где z_0 – фиксированная точка, принадлежащая области D^+.

На основании формулы () функция $\gamma(z)$ может быть представлена в виде

$$\gamma(z)=\gamma_0(z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{v_j}{2\pi}\ln\left(z-z_j\right), \tag{5}$$

где $\gamma_0(z)$ — однозначная аналитическая функция, а v_j– постоянные, определяемые равенствами

$$v_j=\int\limits_L \boldsymbol{\alpha}_j(s)\omega(s)ds.$$

Определение. *Регуляризующий множитель $p(s)$ задается формулой*

$$p(s)=\frac{|t|^{\text{æ}}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}e^{-\operatorname{Im}\gamma_0(t)}e^{-\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{v_j}{2\pi}\arg(t-z_j)}.$$

В силу множителей $e^{-\frac{v_j}{2\pi}\arg(t-z_j)}$, регуляризующий множитель $p(s)$ является многозначной функцией. При обходе внутренних контуров L_j в положительном направлении (по часовой стрелке) он приобретает множители e^{v_j}; при обходе внешнего контура L_0 приобретается множитель $e^{-\sum\limits_{j=1}^{m}v_j}$. Множитель $p(s)$ будет однозначной функцией тогда и только тогда, когда

$$v_j=\int\limits_L \omega(s)\alpha_j(t)ds=0\ (j=1,2,\ldots,m), \tag{6}$$

где $\alpha_j(t)$ определены формулой (10).

На основании (12) равенство (11) запишется в виде

$$p(s)[a(s)+ib(s)]=t^{\text{æ}}e^{i\gamma(z)}\prod_{j=1}^{m}\left(t-z_j\right)^{\frac{iv_j}{2\pi}}$$

Условия (13) будут вместе с тем и условиями однозначности последней функции.

6. Разрешимость и пример решения краевой задачи Гильберта для конкретной многосвязной области. Рассмотрим однородную краевую задачу Гильберта. Пусть краевое условие задачи имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{a(s)+ib(s)}\right]=0. \tag{7}$$

Обозначим $\frac{1}{2\pi}\{\arg(a+ib)\}_{L_j}=\text{æ}_j$, причём все контуры обходятся в положительном направлении относительно области D^+ (внутренние контуры по часовой стрелке, наружный - против). Умножив знаменатель равенства (14) на его регуляризующий множитель, приведём краевое условие к виду

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\text{æ}}e^{i\gamma(t)}}\right]=0. \tag{8}$$

Рассмотрим случаи.

1°.æ $\geqslant 0$. Равенство (15) представляет собою задачу A_0. Поэтому

$$F(z)=z^{\text{æ}}e^{i\gamma(z)}Q(z). \tag{9}$$

2°.æ <0. Решение задачи в классе аналитических функций невозможно, так как функция, удовлетворяющая краевому условию, будет иметь в начале координат полюс порядка не ниже $-$æ.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *«Если æ $=\operatorname{Ind}(a+ib)\geqslant 0$, то однородная задача Гильберта для многосвязной области в классе* *аналитических неоднозначных функций имеет* $2æ+1$ *линейно независимых решений, задаваемых формулой* (), *в которой* $\gamma(z)$ *определяется формулой* (12), *а* $Q(z)$ *формулой:*

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \{C_k[\omega(z)]^k - \overline{C}_k[\omega(z)]^{-k}\},$$

где n — порядок полюса» .

Следствие. *Однородная задача Гильберта с отрицательным индексом в классе однозначных аналитических функций неразрешима.*

Определение 5.1 *Числом полных оборотов касательной к контуру при обходе контура в положительном направлении называется угловой порядок области и обозначается* $\operatorname{Ind} t'$.

Теорема. *Если индекс задачи Гильберта отрицательный, то однородная задача неразрешима, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда выполнены* $-2æ+m-1$ *условий разрешимости* (*ортогональность свободного члена ко всем решениям союзного интегрального уравнения*).

Заключение. Таким образом, в данной работе была рассмотрена краевая задача Гильберта для многосвязной области, а также её построение и методы решения. Также были приведены такие определения, как аналитическая функция, кусочно– гладкая кривая, многосвязная область и её свойства; рассмотрен оператор Шварца и регуляризующий множитель; приведена классификация краевых задач для аналитических функций, а также рассмотрены методы для решения таких задач.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. 1963. Краевые задачи. М.: Наука, 640.
2. Евграфов, М. А. 1991. Аналитические функции. М.: Наука, 448.
3. Кудрявцев Л. Д. 2012. Курс математического анализа. М.: Издательство Юрайт, 703.
4. Михлин С. Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 431.
5. Привалов И. И. 1984. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 432.

Поступила в редакцию 21.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ильминский Константин Викторович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsu.edu.ru