Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 30–36.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Гулая Ю. С.
1316728@bsu.edu.ru

Аннотация. Цель данной работы направлена на ознакомлением с методом разделения переменных при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа для различных областей, в частности, для круга и прямоугольника. Так же в данной работе определены следующие понятия: уравнения Лапласа, гармоническая функция, метод Фурье; приведена формулировка задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В связи с выбранной тематикой, решены задачи.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, гармоническая функция, краевая задача, граничное условие, метод разделения переменных, задача Дирихле

Для цитирования: Гулая Ю. С. 2024. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. *Студенческий математический журнал*, 2: 30–36.

---

1. Введение. Задача Дирихле для уравнения Лапласа является одной из фундаментальных задач математической физики и имеет множество приложений в различных областях науки и техники, таких как теплопроводность, электростатика, гидродинамика и другие. Так же, уравнение Лапласа является простейшим и в то же время важнейшим представителем уравнений эллиптического типа. Данное уравнение появляется при моделировании разнообразных стационарных процессов в математической физике.

2. Необходимые сведения.

Определение 2.1. Уравнение Лапласа в случае n независимых переменных имеет вид:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

В данной работе будет использовано уравнение Лапласа в случае двух независимых переменных. Оно имеет вид:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Функции, являющиеся решениями уравнения Лапласа, называются гармоническими.

Определение 2.2. Функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *гармонической* в области D пространства n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если в этой области она непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными и удовлетворяет уравнению Лапласа [2].

Первая краевая задача, или задача Дирихле. Требуется найти функцию u, гармоническую в области D, а так же, которая внутри области D удовлетворяет уравнению Лапласа, непрерывна в замкнутой области, включая границу S, и принимает на границе заданные значения $u\ |_S = \varphi$. **Определение 2.3.** *Метод Фурье* – это метод разделения переменных для решения различных задач. Суть данного метода состоит в поиске решения функции, например, $u(x, y)$– в прямоугольнике, в виде произведения двух функций

$$X(x) \cdot Y(y) \neq 0,$$

затем разделить переменные и получить два различных уравнения на x и y с краевыми условиями, например, $x(a) = x(b) = 0$ [1].

3. Метод разделения переменных для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Рассмотрим круг с центром в начале координат радиуса R. Необходимо найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (1) внутри круга и граничному условию

$$u|_{r=R} = f(\varphi)$$

на границе круга, где $f(\varphi)$ – заданная функция, а φ – полярный угол.

Введем полярную систему координат [2, 4]

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

тогда уравнение Лапласа примет вид

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{2}$$

Будем искать решение задачи с помощью метода разделения переменных, полагая

$$u(r, \varphi) = \Phi(\varphi) \cdot R(r) \neq 0.$$

Подставим эту функцию в уравнение (2) и получим

$$\frac{r^2 \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const.$$

Тогда из последнего равенства можем получить следующие два уравнения

$$r^2 \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) = \lambda R(r) \quad \text{и} \quad \Phi''(\varphi) = -\lambda \Phi(\varphi),$$

где параметр λ может принимать различные значения.

Решая их, получим, что их общие решение будут иметь вид:

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k} \quad \text{и} \quad \Phi(\varphi) = A\cos(k\varphi) + B\sin(k\varphi)$$

соответственно. Значит решение исходной краевой задачи будет иметь вид:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \cdot r^n, \tag{3}$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются следующими формулами:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \tag{4}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

Итак, можем сделать вывод, что полученный ряд (3) будет решением поставленной задачи. Его коэффициенты определяются по формулам (4).

4. Метод разделения переменных для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Рассмотрим уравнение (1) и краевые условия [5]:

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{x=a} = f_2(y),$$

$$u|_{y=0} = f_3(x), \quad u|_{y=b} = f_4(x).$$

Сразу применить метод Фурье мы не можем, поэтому представим функцию $u(x, y)$ в виде суммы двух других функций:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где $u_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям:

$$u_1|_{x=0} = u_1|_{x=a} = 0,$$

$$u_1|_{y=0} = f_3(x), \quad u_1|_{y=b} = f_4(x),$$

а функция $u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям:

$$u_2|_{y=0} = u_2|_{y=b} = 0,$$

$$u_2|_{x=0} = f_1(y), \quad u_2|_{x=a} = f_2(y).$$

Для начала рассмотрим функцию $u_1(x, y)$. Необходимо найти решения уравнения Лапласа, представленные в виде

$$u_1|_{x=0} = u_1|_{x=a} = 0$$

и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Подставим $u(x, y)$ в уравнение (1) и получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Тогда из последнего равенства можем получить следующие два уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{и} \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Решая их, получим, что их общие решение будут иметь вид:

$$X(x) = X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x, \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \ n = 1, 2, \ldots$$

и

$$Y(y) = C_1 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y + C_2 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b - y)$$

соответственно.

Итак, построены следующие системы частных решений уравнения Лапласа:

$$u_n(x, y) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y,$$

$$u_n(x, y) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(b - y).$$

Следовательно, решение стандартной задачи для функции $u_1(x, y)$ представляется рядом

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}b} + B_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(b - y)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}b}\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \tag{5}$$

где

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_4(x)\sin\frac{\pi n}{a}xdx, \quad B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_3(x)\sin\frac{\pi n}{a}xdx.$$

Аналогичным образом представляется решение стандартной задачи для функции $u_2(x, y)$. Решение ее имеет вид

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}x}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}a} + D_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(a - x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}a}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}y, \tag{6}$$

где:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2,$$

а коэффициенты находятся по формулам

$$C_n = \frac{2}{b}\int_0^b f_2(x)\sin\sqrt{\lambda_n}ydy, \quad D_n = \frac{2}{b}\int_0^b f_1(x)\sin\sqrt{\lambda_n}ydy.$$

Таким образом, решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике с заданными краевыми условиями представимо, как

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где заданные функции можно найти по формулам (5) и (6).

5. Решение задач.

Задача 5.1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа (1) в круге $0 \le r \le 2$, которые на границе круга принимают следующие значения

$$u|_{r=2} = 2\varphi + 1.$$

Решение. Решение задачи будем искать по формуле (3). Для начала найдем коэффициенты ряда

$$\frac{1}{2}\cdot A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)\right]\cdot r^n.$$

A_0 будем искать по формуле:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)d\varphi.$$

Для начала вычислим данный определенный интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)d\varphi.$$

Чтобы его вычислить, вначале найдем неопределенный интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int(2\varphi+1)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int(2\varphi+1)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\int 2\varphi\ d\varphi+\int 1\ d\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int 2\ \varphi d\varphi+\int 1\ d\varphi\right)=\frac{1}{\pi}(\varphi^2+\varphi).$$

Подставим в полученное выражение значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и получим:

$$\frac{1}{\pi}(\varphi^2+\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\pi-((-\pi)^2+(-\pi))\right)=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\pi-((-\pi)^2+(-\pi))\right)=\frac{1}{\pi}2\pi=2.$$

Таким образом, мы нашли коэффициент A_0 :

$$A_0=2.$$

Теперь найдем коэффициент A_n. Его будем искать по следующей формуле:

$$A_n=\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\cos(n\varphi)\ d\varphi.$$

Для начала вычислим данный определенный интеграл

$$\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi{+}1)\cos(n\varphi)\ d\varphi=\begin{bmatrix} u=2\varphi+1,\Rightarrow & du=2d\varphi. \\ dv=\cos(n\varphi)\ d\varphi,\Rightarrow & v=\dfrac{1}{n}\sin(n\varphi).\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\ d\varphi\right].$$

Для начала вычислим внутренний интеграл

$$\int 2\frac{1}{n}\sin(n\varphi)d\varphi=\frac{2}{n}\int\sin(n\varphi)d\varphi=\begin{bmatrix} t=n\varphi,\Rightarrow & \varphi=\frac{t}{n} \\ d\varphi=\frac{1}{n}dt & \end{bmatrix}=\frac{2}{n}\int\frac{\sin t}{n}dt=\frac{2}{n^2}\int\sin t dt$$

используя, что $\int\sin t dt=-\cos t+C$, получим следующее:

$$\frac{2}{n^2}\int\sin t dt=\frac{2}{n^2}(-\cos t)+C.$$

Используем обратную замену $t=n\varphi$, выполним некоторые преобразования и получим следующее:

$$\int 2\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\ d\varphi=\frac{-2\cos(n\varphi)}{n^2}+C.$$

Теперь вернемся к вычислению изначального интеграла. Подставим вычисленный внутренний интеграл и получим следующее:

$$\frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{1}{n}\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\left(\frac{-2\cos(n\varphi)}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=\ldots=\frac{1}{\pi 2^n}\left[\left(\frac{2\varphi\sin(n\varphi)}{n}+\frac{\sin(n\varphi)}{n}+\frac{2\cos(n\varphi)}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right].$$

Подставляем значения верхнего и нижнего пределов, проводим необходимые вычисления и получаем следующее:

$$\frac{1}{\pi 2^n}\left(\frac{2(-1)^n}{n^2}-\frac{2(-1)^n}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi 2^n}\cdot 0=0.$$

Таким образом, мы нашли коэффициент A_n и он равен 0. Теперь найдем коэффициент B_n. Его будем искать по следующей формуле:

$$B_n = \frac{1}{\pi 2^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\sin(n\varphi)d\varphi.$$

Для начала вычислим данный определенный интеграл

$$\frac{1}{\pi 2^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\sin(n\varphi)d\varphi = \begin{bmatrix} u = 2\varphi+1, \Rightarrow & du = 2d\varphi. \\ dv = \sin(n\varphi)d\varphi, \Rightarrow & v = -\frac{1}{n}\cos(n\varphi). \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{-1}{n}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\cos(n\varphi)d\varphi\right].$$

Для начала вычислим внутренний интеграл

$$\int\frac{1}{n}\cos(n\varphi)d\varphi = \frac{2}{n}\int\cos(n\varphi)d\varphi = \begin{bmatrix} t = n\varphi, \Rightarrow & \varphi = \frac{t}{n}. \\ d\varphi = \frac{1}{n}dt. & \end{bmatrix} = \frac{2}{n}\int\frac{\cos t}{n}dt = \frac{2}{n^2}\int\cos t dt$$

используя, что $\int\cos t\ dt = \sin t + C$, получим следующее:

$$\frac{2}{n^2}\int\cos t\ dt = \frac{2}{n^2}\sin t + C.$$

Используем обратную замену $t = n\varphi$, выполним некоторые преобразования и получим следующее:

$$\int 2\frac{1}{n}\cos(n\varphi)\ d\varphi = \frac{2\sin(n\varphi)}{n^2} + C.$$

Теперь вернемся к вычислению изначального интеграла. Подставим вычисленный внутренний интеграл и получим следующее:

$$\frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{-1}{n}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2\sin(n\varphi)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \ldots = \frac{1}{\pi 2^n}\left[\left(-\frac{2\varphi\cos(n\varphi)}{n} + \frac{\cos(n\varphi)}{n} + \frac{2\sin(n\varphi)}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right].$$

Подставляем значения верхнего и нижнего пределов, проводим необходимые вычисления и получаем, что

$$\frac{1}{\pi 2^n}\left[-\frac{(-1)^n}{n} - \frac{2(-1)^n\pi}{n} - \left(\frac{2(-1)^n\pi}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)\right] = \ldots = \frac{1}{\pi 2^n}\cdot\left(-\frac{4(-1)^n\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}.$$

Таким образом, мы нашли коэффициент B_n :

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}.$$

Теперь подставим найденные коэффициенты в формулу (3):

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(n\varphi) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}\sin(n\varphi)\right)\cdot r^n$$

и получим, что:

$$u(r,\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}\sin(n\varphi)\right)\cdot r^n.$$

Задача 5.2. Найти решение уравнения Лапласа (1) в прямоугольнике с граничными условиями

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0$$

$$u|_{y=2} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad u|_{x=2} = 0.$$

Решение. Будем искать решение в виде

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y).$$

Опираясь на предыдущие рассуждения и принимая во внимание условия данной задачи, будем иметь следующее:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right),\ \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{2}\right)^2.$$

В свою очередь,

$$Y_k(y) = a_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k y}{2}\right) + b_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k y}{2}\right).$$

Тогда, мы можем записать общее решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным граничным условиями задачи в следующем виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k y}{2}\right) + b_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k y}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right).$$

Принимая во внимание граничные условия задачи, мы можем найти коэффициенты a_k и b_k. Откуда получим, что

$$a_k = 0,\quad b_k = \frac{1}{\operatorname{sh}\pi}.$$

Таким образом, мы нашли решение уравнения Лапласа в прямоугольнике с заданными граничными условиями. Оно имеет следующий вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{\operatorname{sh}\pi}\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Задача 5.3. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1) в круге $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, где искомая функция $u(r,\varphi)$ на границе имеет следующие значения:

$$u(1,\varphi) = \cos 5\varphi.$$

Решение. Данную задачу будем решать с помощью метода Фурье. Тогда решение примет вид:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right]\cdot r^n,$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются граничными условиями.
Пусть

$$g(\varphi) = u(1,\varphi),$$

и при $r = 1$ будет верно

$$u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right] = g(\varphi).$$

Можем видеть, что разложение функции $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье отлично от разложения функции

$$g(\varphi) = u(1,\varphi)$$

множителями r^n. Следовательно, допишем множители r^n при соответствующих членах разложения функции $g(\varphi) = u(1,\varphi)$, чтобы получить решение искомой задачи.

Из задачи видно, что граничное условие имеет вид

$$u(1,\varphi) = \cos 5\varphi,$$

поэтому решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1) в круге $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, где искомая функция $u(r,\varphi)$ на границе имеет заданные значения будет иметь вид:

$$u(r,\varphi) = r^5\cos 5\varphi.$$

6. Заключение. Таким образом, в данной работе были рассмотрены определения уравнения Лапласа, гармонической функции, метода Фурье; приведена формулировка задачи Дирихле для уравнения Лапласа; был рассмотрен метод разделения переменных при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа для круга и прямоугольника; так же были решены задачи, связанные с тематикой работы.

Благодарность. *Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Лидии Александровне Ковалевой за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др. 1964. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 368.
2. Пискунов Н. С. 1985. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 560.
3. Попов А. И., Попов И. Ю. 2020. Основные уравнения математической физики. СПБ.: Университет ИТМО, 200.
4. Самарский А. А., Тихонов А. Н. 2004. Уравнения математической физики. М.: Наука, 798.
5. Холодова С. Е., Перегудин С. И. 2020. Дополнительные разделы высшей математики. СПБ.: Университет ИТМО, 89.

Поступила в редакцию 21.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гулая Юлия Сергеевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru