Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 24–29.

Применение элементов компьютерной математики при изучении дифференциальных уравнений

Третьяков Е. В.
1667745@bsu.edu.ru

Аннотация. Быстро растущая зависимость от численных методов в математическом моделировании обусловлена развитием мощных компьютеров, которые на данный момент доступны каждому. Возникает необходимость разработать единый подход к вычислительному математическому моделированию с использованием дифференциальных уравнений, основанный на принципе слияния математики и вычислений. На мой взгляд, сейчас необходимо давать студенту базовые теоретические и вычислительные знания, позволяющие эффективно использовать дифференциальные уравнения в математическом моделировании, в науке и технике. В этой статье мы постараемся выяснить какова роль в учебном процессе символической и конструктивно-числовой математики. Постараемся разобраться в сути компьютерного математического моделирования, проанализировав источники его ошибок и источники вычислительной погрешности. Рассмотрим адаптивные методы и оценки ошибок дискретизации Галёркина.

Ключевые слова: адаптивные методы, дискретизации Галёркина, конструктивно-числовая математика, математическое компьютерное моделирование, символическая математика

Для цитирования: Третьяков Е. В. 2024. Применение элементов компьютерной математики при изучении дифференциальных уравнений. *Студенческий математический журнал*, 2: 24–29.

Введение. Математическое моделирование с использованием дифференциальных и интегральных уравнений составляет основу науки и техники с момента создания исчисления Лейбницем и Ньютоном. Математическое моделирование имеет два основных двойственных аспекта: один символический и конструктивно-числовой, которые отражают дуализм между бесконечным и конечным, или континуальным и дискретным. Эти два аспекта были тесно переплетены на протяжении всего развития современной науки, начиная с развития исчисления в работах Эйлера, Лагранжа, Лапласа и Гаусса до работ фон Неймана в наше время. Например, монументальный труд Лапласа «*Mécanique Céeleste*» в пяти томах представляет собой символическое исчисление для математической модели гравитации, имеющей форму уравнения Лапласа. И к тому же он содердит с сложные численные вычисления, которые дают конкретную информацию о движения планет в нашей Солнечной системе. Однако, начиная с поиска строгости в основах исчисления в XIX веке, постепенно наметился раскол между символическим и конструктивным аспектами. Этот раскол ускорился с изобретением в 1940-х годах электронного компьютера, после чего конструктивные аспекты были продолжены в новых областях численного анализа и вычислительных наук, которые в основном развивались за пределами математических факультетов.

Как отмечает Р. М. Асланов в своей статье «системы компьютерной математики (Derive, Maple, Mathematica, MatLab, MathCAD, Maxima и др.) стали мощными средствами деятельности как профессиональных математиков, так и использующих математику для построения и исследования математических моделей в разных предметных отраслях для решения научных, инженерных, обучающих задач, наглядной визуализации данных и результатов вычислений» [2]. Отметим еще такое программное обеспечение как Femlab. Это программное обеспечение для решения дифференциальных уравнений с использованием адаптивного контроля ошибок, которое находится в свободном доступе в Интернете. Femlab реализует вычислительные алгоритмы и может служить в качестве лаборатории для экспериментов по математическому моделированию и численному решению дифференциальных уравнений. А также может служить моделью и инструментарием для разработки кодов адаптивных методов конечных элементов. Нельзя не согласиться с тем, что «современные информационные технологии раскрывают перед преподавателями новые возможности, позволяют рассматривать задачи новых типов, тем самым расширяя знания студентов в той или иной степени и делая их еще более прочными. Именно поэтому при изучении математических дисциплин студенты должны одновременно получать знания, связанные с самой дисциплиной, иметь возможность осваивать современные информационные технологии, позволяющие решать и анализировать изучаемые понятия и рассматривать разнообразные задачи из приложений. Почти все разделы математики так или иначе находят свое отражение в приложениях. Одним из таких разделов является курс дифференциальных уравнений». [3]

Согласно монографии Р. М. Асланова «курс дифференциальных уравнений объединяет в себе знания, умения, навыки, методы и процедуры, освоенные в дифференциальном и интегральном исчислении функций одной и нескольких переменных, сведения из линейной алгебры и теории многочленов, комплексного анализа и теории элементарных функций, геометрии кривых и теории рядов. Именно поэтому дифференциальные уравнения играют большую роль в фундаментальной подготовке, в плане формирования у студента научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, методической культуры, особенно по таким компонентам, как понимание сущности прикладной и практической направленности математики, овладение методами математического моделирования. Изучение курса дифференциальных уравнений и его методов дает еще один инструмент для познания мира, в котором мы живем, позволяет сформировать образное и научное представление о реальном физическом пространстве»[1].

Процитируем еще А. С. Безручко, который отмечает, что «довольно часто изучение курса дифференциальных уравнений сводится к усвоению определенных типов уравнений и методов их решения. В основном при решении задач используются аналитические методы решения. Задачи из приложений, описывающие процессы или явления, включаются, но не в большом объеме, так как их решения аналитическими методами требует большого количества математических действий и занимает много времени. Использование графических и численных методов без применения компьютерной техники для этих уравнений также затруднено из-за огромного объема вычислений. При таком подходе прикладная направленность данного курса неосуществима в полном объеме, межпредметные связи устанавливаются очень слабо, вследствие чего у студентов не возникает полного представления о важности данного раздела математики, понимания сущности данной теории. Применение компьютерной техники дает возможность значительно упростить процесс решения уравнений, используя при этом графические и численные методы. Таким образом, применение информационных технологий, в частности систем компьютерной математики, позволит значительно разнообразить типы решаемых задач и расширить знания студентов не только в области данного курса, но и в области применения информационных технологий» [8].

Анализируя последние исследования и публикации в данной области отметим работы отечественных авторов Р. М. Асланова, О. Г. Игнатовой [4]–[6] А. С. Безручко [9], Е. С. Полат [12], А. Г. Мордкович [10]. В этих исследованиях происходит фокусировка на различных аспектах использования ИТ: точность, скорость, масштабируем и способность применения к конкретным задачам.

«Одно из направлений исследований связано с использованием машинного обучения для решения дифференциальных уравнений. Машинное обучение дает возможность разработки алгоритмов, которые могут автоматически обучаться на основе данных, что делает их особенно эффективными для решения сложных задач. Некоторые исследования показывают, что применение машинного обучения позволяет существенно ускорить процесс решения уравнений и повысить точность результатов.

Другое направление исследований связано с использованием параллельных вычислений, таких как использование графических процессоров или распределенных вычислений. Эти технологии позволяют использовать несколько процессоров или графических процессоров одновременно, что существенно увеличивает скорость решения дифференциальных уравнений»[7].

Кроме того, изучая работы [14] и [15] можно заключить, что проводятся исследования, направленные на изучение применимости различных методов решения дифференциальных уравнений, таких как метод конечных элементов, метод граничных элементов и метод конечных разностей. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и их эффективность может изменяться в зависимости от конкретной задачи.

2. Символическая и конструктивно-числовая математика. По моим наблюдениям в вузе изучение информационных технологий происходит в отрыве от самой математики. Изучение курса математики, как правило, сводится лишь к усвоению конкретных понятий того или иного раздела. И получается, что символическая математика и конструктивно-числовая математика являются отдельными дисциплинами и редко преподаются вместе. Как правило, студенты сначала знакомятся с исчислением в его символической форме, а затем, гораздо позже, в другом контексте, сталкивается с вычислительной стороной. Такое положение дел не имеет обоснованной научной мотивации и вызывает серьезные трудности в курсах физики, механики и прикладных наук, построенных на математическом моделировании.

Эти трудности связаны со следующими двумя основными вопросами:

(i) Как включить прикладные методы в математическое образование?

(ii) Как использовать математику в приложениях?

Поскольку дифференциальные уравнения являются основополагающими в математическом моделировании, эти вопросы можно сформулировать следующим образом:

(i) Как мы можем преподавать дифференциальные уравнения в рамках математического образования?

(ii) Как мы можем использовать дифференциальные уравнения в приложениях?

Традиционно курс дифференциальных уравнений в базовом математическом образовании ограничивается изучением обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приходится избегать даже самых простых общих задач, поскольку аналитические методы решения для них достаточно сложны.

К сожалению, такой объем теоретических знаний недостаточен для приложений. В результате у студента должно создается впечатление, что математическое моделирование на основе символьной математики – сложно и лишь в редких случаях действительно полезно. Кроме того численное решение дифференциальных уравнений, к которому многие чистые математики относятся с пренебрежением или вообще избегают или оставляют этот материал на самостоятельное изучения или на конец семестра, где он часто преподается в стиле «поваренной книги», а не как неотъемлемая часть математического образования, направленного на углубление понимания. Конечным результатом является то, что в традиционном математическом образовании, по-видимому, нет хорошего ответа на первый вопрос.

Второй вопрос связан с принципом организации в университете с кафедрами, которые преподают дисциплины, имеющие связь с определенным дифференциальным уравнениям: механика и уравнения Лагранжа, физика и уравнения Шредингера, электромагнетизм и уравнения Шредера, электромагнетизм и уравнения Максвелла, динамик жидкости и газа и уравнений Навье – Стокса, механика твердого тела и уравнений упругости Навье, ядерная инженерия и уравнений переноса и т. д. Каждая смежная дисциплина в значительной степени разработала свой собственный набор аналитических и численных инструментов для независимого решения своего специального дифференциального уравнения, и этот набор составляет основное теоретическое ядро дисциплины и ее курсов. Принцип организации отражает как важность математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений, так и традиционную сложность получения решений.

Оба эти вопроса имели бы совершенно другие ответы, если бы можно было решать дифференциальные уравнений с помощью единой математической методологии, достаточно простой для введения в базовое математическое образование и достаточно мощной для применения в реальных приложениях. Тогда естественным образом математическое образование открылось бы для множества приложений, и прикладные науки могли бы начинаться с более практичного математического фундамента. Мне кажется, что оптимальный курс должен включать в себя постепенную интеграцию материала в традиционную программу обучения математике с самого начала. Речь не идет о замене изучением вычислительных алгоритмов изучение математики, линейной алгебры и т. д. Это должен быть сплав анализа и численных вычислений, который как показывает практика оказывается наиболее плодотворным.

На мой взгляд, материал, включенный в учебную программу по математике должен предлагать конкретную мотивацию для развития аналитических методов и математической абстракции. Вычисления не делают анализ устаревшим, но дают аналитическому уму возможность сосредоточиться. Кроме того, хотелось бы поменяется роль символических методов. Вместо того чтобы быть рабочей лошадкой аналитических вычислений, требующих высокой степени технической сложности, символический анализ может сосредоточиться на аналитических аспектах модельных проблем, чтобы углубить понимание и развить интуицию. В идеале работа студентов должна включать в себя сочетание математического анализа и вычислений в рамках проблемного и проектно-ориентированного подхода с тесной связью с приложениями. Обсуждаемые вопросы могут быть математического или вычислительного характера, могут касаться математического моделирования и непосредственно связаны с темами, изучаемыми в курсах механики, физики и прикладных наук. Поэтому в теоретических курсах неплохо бы приводить задачи такого рода.

В заключение этого пункта хочу отметить, что авторы книги "Computati-onal Differential Equations" постарались осуществить и протестировать такую реформу, основанную на интеграции математики и вычислений, учебной программы по математике. Эта новая программа следует естественной прогрессии от математического анализа для функции одной переменной и обыкновенных дифференциальных уравнений к математическому анализу для функции нескольких переменных и дифференциальным уравнениям с частными производными, развивая математические методы в естественном взаимодействии с приложениями. Как утверждают авторы, «в качестве учебного материала мы использовали эту книгу в сочетании с существующими учебниками по математическому анализу и линейной алгебре. Наш опыт был очень положительным и убедительно свидетельствует о том, что заявленные нами цели действительно могут быть достигнуты на практике. С помощью элементарного сопутствующего текста мы надеемся облегчить процесс усвоения нового и классического материала на начальном уровне и тем самым способствовать продвижению реформы в более широком контексте» [13].

3. Компьютерное математическое моделирование. В этом пункте рассмотрим основные вопросы компьютерного математического моделирования[5], основанного на дифференциальных уравнениях и вычислениях.

Пусть дана математическую модель общего вида $A(u) = f$, где A описывает математическую модель в виде дифференциального оператора с определенными коэффициентами и граничными условиями, f задано, а u – неизвестное решение. Т. е. имеется типичная прямая задача, в которой предполагается, что

[5] «Компьютерная математическая модель – это программа, реализующая расчеты состояния моделируемой системы по ее математической модели. Математическое моделирование – это связь между объектами в виде математических соотношений. При этом информационные объекты представляются в виде математических объектов»[11].

A и f заданы, а u – неизвестное решение. Ясно, что в обратной задаче попытаются найти A, например, коэффициенты дифференциального оператора, такого как теплопроводность или модуль упругости, или правую часть f, исходя из данных, соответствующих решениям u, которые получены, например, с помощью измерений.

3.1 Источники ошибок при математическом моделировании. Существует три основных источника, вносящих суммарную погрешность в компьютерное математическое моделирование физических явлений: моделирование (A), ошибки данных (f) и численные вычисления (u). Влияние этих источников на решение обычно называют ошибкой моделирования или ошибкой данных или вычислительной ошибкой. Ошибки моделирования возникают в результате приближений в математическом описании реальных явлений. Например, в коэффициентах дифференциального оператора A, связанного со свойствами материала, такими как теплоемкость. Ошибки данных возникают из-за того, что данные, связанные с начальными или граничными условиями или определяющими факторам, такими как f, часто не могут быть точно измерены или определены. И наконец, вычислительная ошибка возникает при численном расчете решения. Таким образом, в общую погрешность вклад вносят все эти три составляющие.

3.2 Источники вычислительной погрешности. В методе конечных элементов общая погрешность вычисления также имеет вклад из трех источников: дискретизация дифференциального уравнения методом Галёркина, ошибки квадратур, возникающие при построении дискретных уравнений, численное решение дискретных уравнений. Погрешность дискретизации Галёркина возникает при использовании метода Галёркина для вычисления аппроксимации истинного решения в конечномерном функциональном пространстве, при условии, что интегралы которые встречаются в формулировке Галёркина, вычисляются точно и полученные дискретные уравнения тоже решаются точно. Ошибка квадратуры возникает при вычислении интегралов, возникающих в формулировке Галёркина с использованием числовой квадратуры. Наконец, погрешность дискретного решения – ошибка, возникающая в результате решения дискретной системы уравнений только приблизительно. Важно различать три источника ошибок поскольку различные ошибки распространяются и накапливаются по-разному.

3.3 Цель компьютерного математического моделирования. Естественной целью является стремление свести общую погрешность в некоторой заданной норме к некоторому заданному допуску при минимальном объеме вычислительной работы. Можно сформулировать эту цель как комбинацию надёжности и эффективности.

Надежность означает, что общая погрешность контролируется в рамках заданной нормы на заданном уровне допуска с определенной степенью надежности. Например, гарантируется, что общая погрешность не превышает 1% в каждой точке пространства и времени с вероятностью 95%. Эффективность означает, что общая работа по устранению ошибок сводится к минимуму. Для реализации поставленной цели (надежный и эффективный контроль вычислительной ошибки) в общем случае требуются адаптивные вычислительные методы. Как правило, адаптивность связана с базовой сеткой в пространстве и времени.

3.4 Адаптивные методы. Адаптивный метод состоит из вычислительного метода и адаптивного алгоритма. Адаптивный алгоритм состоит из критерия остановки, гарантирующего контроль вычислительной ошибки на заданном уровне допуска и стратегии модификации в случае, если критерий остановки не выполняется.

Цель адаптивного алгоритма состоит в том, чтобы путем вычислений определить «правильную» сетку, удовлетворяющую критериям надежности и эффективности. На практике это обычно происходит в результате итерационного процесса, когда на каждом шаге вычисляется приближенное решение на заданной сетке. Если критерий остановки критерий остановки выполняется, то сетка и соответствующее приближенное решение принимается. Если критерий остановки не удовлетворен, то определяется новая сетка с помощью стратегии модификации и процесс продолжается. Для начала процедуры необходимо получить первую сетку. Центральное место в этом процессе занимает идея обратной связи в вычислительном процессе. Информация, касающаяся природы основной проблемы и точного решения, последовательно выявляется в процессе вычислений, и эта информация используется для определения правильной сетки. Адаптивные методы основаны на оценках ошибок. Далее рассмотрим оценки погрешностей, сосредоточив внимание на оценках вычислительной ошибки.

3.5 Оценки ошибок дискретизации Галёркина. Подведем небольшой итог: общая цель – контролировать общую погрешность, используя надежный и эффективный адаптивный метод. Сузим цель до адаптивного управления ошибкой дискретизации Галёркина и перейдем к оценке погрешности для этой ошибки. Основными понятиями, лежащими в основе оценок погрешностей, являются устойчивость и точность.

Точность относится к эффекту дискретизации в локализованных областях в пространства и времени. Устойчивость измеряет, как эти эффекты или возмущения распространяются и накапливаются, чтобы в итоге составить ошибку дискретизации Галёркина. Различные численные методы, как правило, обладают разной точностью и устойчивостью. «Хороший» численный метод для данного дифференциального уравнения – метод, сочетающий «хорошую» локальную точность с «хорошей» устойчивостью. А это означает, что свойства устойчивости дискретного уравнения адекватно отражают свойства дифференциального уравнения.

Оценки погрешности дискретизации Галёркина бывают двух видов:

- априорные оценки ошибок
- апостериорные оценки погрешности.

Априорная оценка погрешности измеряет погрешность дискретизации Галёркина в терминах погрешности прямой интерполяции точного решения и свойств устойчивости дискретизированного дифференциального уравнения или дискретного уравнения дискретного типа. Основной формой априорной оценки погрешности является ошибка ∞ коэффициента устойчивости дискретного уравнения $\times$ ошибка интерполяции. Коэффициент устойчивости дискретного уравнения, или дискретный коэффициент устойчивости, измеряет рост возмущений посредством оценки устойчивости для двойственного дискретного уравнения. Ошибка интерполяции включает в себя производные от точного решения и, таким образом, представляет собой величины, которые неизвестны. Если у нас есть некоторая информация об этих производных, то мы можем оценить ошибку интерполяции (априори) без решения дискретных уравнений. Чтобы придать априорной оценке погрешности количественный смысл, необходимо оценить коэффициент дискретной устойчивости. Иногда это можно сделать аналитически. Альтернативой является оценка этого коэффициента путем решения дискретной двойственной задачи. Апостериорная оценка ошибки измеряет ошибку дискретизации Галёркина в терминах остатка вычисленного приближенного решения и свойства устойчивости дифференциального уравнения. Основная форма апостериорной оценки погрешности является ошибка ∞ коэффициента устойчивости дифференциального уравнения $\times$ ошибка интерполяции. Остаточная погрешность может быть оценена (апостериорно) после того, как приближенное решение решение было вычислено. Коэффициент устойчивости дифференциального уравнения или коэффициент непрерывной устойчивости, измеряет рост возмущений с помощью оценки устойчивости двойственного дифференциального уравнения. Чтобы придать апостериорной оценке ошибки количественный смысл, необходимо оценить соответствующий коэффициент непрерывной устойчивости. В особых случаях это может быть сделано аналитически, а в общем случае – вычислительно, путем численного решения двойственной задачи. Надежность адаптивного метода напрямую связана с надежностью оценки коэффициента непрерывной устойчивости.

Критерий остановки адаптивного метода обычно основан непосредственно на апостериорной оценке ошибки. Критерий модификации может основываться как на априорных, так и на апостериорных оценках ошибок. Ошибка интерполяции в априорной оценке ошибки может быть оценена следующим образом: заменяя необходимые производные точного решения вычисленными аппроксимациями. Различные ошибки связаны с различными коэффициентами устойчивости, измеряющими накопление конкретной ошибки. Свойство ортогональности методов Галёркина естественным образом связывается с определенной концепцией устойчивости, измеряющей производные решений двойственных задач в терминах заданных данных. Это понятие называется сильной устойчивостью. Свойство ортогональности возмущений Галёркина иногда приводят к тому, что ошибка дискретизации Галёркина накапливается более благоприятно, чем, например, ошибки квадратур.

В целом, каждая конкретная ошибка естественным образом связана с конкретной концепцией устойчивости и коэффициентом устойчивости.

Если коэффициенты устойчивости велики, то возмущения значительно усиливаются, и для достижения определенного допуска по общей погрешности требуется больше вычислительной работы и большая точность моделирования данных. Система Лоренца[6] является примером задачи, в которой коэффициенты устойчивости быстро растут с течением времени, что отражает сильную чувствительность к начальным данным (эффект бабочки) и затрудняет прогнозирование на длительных временных интервалах.

Заключение. В процессе изучения различной литературы по теме исследования я пришел к выводу, что материал, в том числе и по дисциплине «Дифференциальные уравнения» следует выстраивать таким образом, чтобы теоретический материал был тесно связан с приложениями: это должен быть сплав анализа и численных вычислений, а работа учащихся (студентов) должна включать в себя сочетание математического анализа и вычислений в рамках проблемного и проектно-ориентированного подхода. При возможности, необходимо обсуждать с ними те вопросы, математического или вычислительного характера, которые, возможно, касаются математического моделирования или непосредственно связаны со смежными науками: механикой, физикой и иными прикладными науками.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

[6] «Система Лоренца представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, впервые изученную математиком и метеорологом Эдвардом Лоренцем. Она примечательна тем, что при определенных значениях параметров и начальных условиях имеет хаотические решения»[11].

Список литературы

1. Асланов Р. М. Гуманитарный потенциал профессионально ориентированного курса дифференциальных уравнений в педвузе: моногр. М.: Прометей, 1996. – 129 с.
2. Асланов Р. М. Роль систем компьютерной математики на практических занятиях по дифференциальным уравнениям [Электронный ресурс] / Р. М. Асланов, А. С. Безручко // Наука и школа. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/
3. Асланов Р. М. Компьютерная поддержка решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее использование в учебном процессе педвуза [Электронный ресурс] / Р. М. Асланов, А. С. Безручко, Матросов В. Л. // Наука и школа. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/
4. Асланов Р. М., Безручко А. С. Задачник по дифференциальным уравнениям с использованием программных средств // Материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Киров, 2014. – С.129–130.
5. Асланов Р. М., Игнатова О. Г. Межпредметные связи математики и физики в основной школе как средство развития функциональной грамотности с применением электронных таблиц // Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – М., 2020. – С.31–34.
6. Асланов Р. М., Игнатова О. Г. Основные компоненты системы обучения элементам математического анализа с применением ИКТ // Материалы XXXIV семинара преподавателей математики и информатики вузов. – Калуга, 2015. – С.198–202.
7. Баранова А. В. Анализ эффективности применения современных информационных технологий при решении дифференциальных уравнений[Электронный ресурс] / А. В. Баранова, Е. А. Окулова // Студенческий научный форум – 2024. – Режим доступа: https://scienceforum.ru/2024/article
8. Безручко А. С. Психолого-педагогические аспекты использования информационных технологий при организации практических занятий по дифференциальным уравнениям в педагогическом вузе // Наука и школа, 2011. – № 5. – С.6–9.
9. Безручко А. С. О роли компьютерной графики при изучении дифференциальных уравнений // Материалы XXXII семинара преподавателей математики вузов. — Екатеринбург, 2013. – С.116–117.
10. Мордкович А. Г. Инновационные технологии обучения математике в школе и вузе: материалы XXX Всерос. научного семинара преподавателей математики высших учебных заведений, 29—30 сентября 2011 г. / Филиал Казанского (Приволжского) федерального университета в г. Елабуга; [отв. ред. М. Ф. Гильмуллин]. – Елабуга, 2011. – 240 с.
11. Научно-образовательный портал «Большая российская энциклопедия». – Режим доступа: URL: https://bigenc.ru/
12. Полат Е. С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повышения квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат и др. — М.: Академия, 2000. – 270 с.
13. Eriksson K., Estep D., Hansbo P. and Johnson C. Computational Differential Equations – Режим доступа:https://www.csc.kth.se
14. Hairer E., Norsett S. P. & Wanner G. Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. Springer-Verlag, 1993. – 610 p.
15. Quarteroni A. & Saleri F. Scientific computing with MATLAB and Octave. Springer Science & Business Media, 2006. – 379 p.

Поступила в редакцию 11.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Третьяков Евгений Владимирович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsu.edu.ru