Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 19–23.

Диаграммы в теории дифференциальных уравнений (восемнадцатый – девятнадцатый века)

Черникова Д. В.
1667769@bsu.edu.ru

Аннотация. Диаграммы играли важную роль на протяжении всей истории дифференциальных уравнений. Геометрическая интуиция, визуальное мышление, эксперименты с диаграммами, концепции алгоритмов и инструментов для построения этих диаграмм, эвристические доказательства, основанные на диаграммах, способствовали развитию аналитических абстрактных теорий. В данной статье, постараемся проследить роль диаграмм в теории дифференциальных уравнений на протяжении двух веков, их функции и вид.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, диаграмма, интегральная кривая

Для цитирования: Черникова Д. В. 2024. Диаграммы в теории дифференциальных уравнений (восемнадцатый – девятнадцатый века). *Студенческий математический журнал*, 2: 19–23.

Введение. Большую часть информации человек получается через зрение. Желание, в том числе и математиков, объяснить сложные вещи простым языком вполне естественно. И поэтому в математике так велико значение образов. В своей книге [2] Д. Гильберт пишет: «математики стремятся к логически последовательной символической абстракции, пытаясь сохранить интуитивное понимание проблемы». Т. е. чтобы то или иное доказательство или объяснение какого-то факта было понятно большему количеству людей необходимо упрощение визуальной составляющей: графиков, диаграмм, образов и пр. Обратимся к теме исследования: «Диаграммы в теории дифференциальных уравнений (восемнадцатый – девятнадцатый века».

При упоминании слова «диаграмма», первое, что приходит на ум – диаграммы Эйлера – Венна, которые применяются при решении логических задач [17]. Не будем забывать, что Евклид в «Началах» использовал геометрические диаграммы[1]. На эту тему написано много статей (см., например, [12], [13], [15]), в которых имеются многочисленные ссылки на предыдущие важные работы. Имея по началу иллюстративную функцию, постепенно диаграммы приобретают и эвристическую функцию, далее даже становятся дополнением к дискуссии, а в некоторых ситуация, полностью заменяют текстовые рассуждения для обеспечения строгости рассуждений. Исследования, проводимые P. Mancosu [11] выявили два вида визуализации в математике: визуализация с помощью рисунков на бумаге и с помощью мысленных образов. Несмотря на интенсивное использование графиков и диаграмм в различных разделах математики, оказалось, что в некоторых ситуациях, например, при попытке изобразить непрерывную или дифференцируемую функции, очень трудно получить удовлетворительную иллюстрацию. Использование графиков и диаграмм становится проблематичным как только мы сталкиваемся с бесконечным процессом. С чем и связано уменьшение интереса к роли диаграмм с развитием математического анализа и теории функций.

Как отмечено в [4] «в Древней Индии для доказательства той или иной гипотезы, математику достаточно было построить фигуры, необходимые для доказательства. Предполагалось, что тот, кто хочет разобраться в этой проблеме сможет сделать это самостоятельно, изучив представленные изображения без каких-либо пояснений».

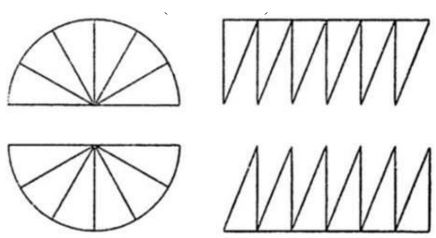

Рис. 1: равенство площадей

На рисунке 1 мы видим иллюстрацию доказательства равенства для площадей круга и прямоугольника, при условии, что одна из сторон его равна радиусу, а вторая длине полудуги [5]. Тем не менее, как отмечал M. Giaquinto в своей статье [8] «Даже когда визуальное мышление не способствует доказательству математической истины, оно может позволить человеку открыть истину, где открыть истину – значит прийти к вере в нее независимым, надежным и рациональным способом. Визуальное мышление также может играть большую роль в обнаружении центральной идеи доказательства или стратегии доказательства; и в обнаружении своего рода математической сущности или математического свойства».

[1]Согласно [11], «диаграмма (др.-греч. $\Delta\iota\acute{\alpha}\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ (diagramma) – изображение, рисунок, чертёж) – графическое представление данных линейными отрезками или геометрическими фигурами, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин».

Философы широко изучали простые диаграммы, близкие к основам математики. Тесно связанные с определениями и аксиомами, такие диаграммы затем могут использоваться для уточнения значения примитивных объектов и для заполнения некоторых логических пробелов теории. Так что они фактически играют важную роль в рассуждениях.

Случай с дифференциальными уравнениями выглядит несколько иначе, поскольку объекты этой теории, полученные в результате долгих и сложных теоретических построений, далеки от примитивных объектов математики. «Более того, дифференциальные уравнения в течение трех столетий находились в центре существенного противоречия между геометрией и анализом. Что такое решение дифференциального уравнения? Однозначного ответа на этот вопрос нет. Это одновременно кривая, движение, алгебраическое уравнение, бесконечный ряд, алгоритм аппроксимации и так далее» [18].

В связи с чем, возникла идея попытаться провести аналогичное исследование об использовании диаграмм при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений. Достаточно маленький набор источников по данной теме указывает на ее **актуальность** и в наше время. Похоже, что историки, не уделяли этому вопросу должного внимания. Так, например, в статье [14], где описано логическое, аналитическое и чисто лингвистическое развитие теории дифференциальных уравнений, диаграммы не играют никакой роли. Аналогичную ситуацию можно отметить, изучив источники [3] и [6].

Несмотря на большое желание исследовать эту тему достаточно полно, в этой статье ограничимся только работами, которые можно отнести к классической теории дифференциальных уравнений, некоторых математиков 18 и 19 веков.

В самом начале развития теории дифференциальных уравнений математики работали с неточными понятиями, в основном в геометрическом контексте. Поэтому можно предположить, что диаграммы играли важную роль. Развитие качественного исследования динамических систем и численного анализа дифференциальных уравнений, которое пришлось уже на 20 век снова способствовало становлению диаграмм на важное место. Опираясь на исследования, проведенные D. Tournés [18] зададимся целью изучить и проанализировать источники, которые относятся к периоду, начинающемуся со знаменитого трактата Габриэле Манфреди (1707 г.), который можно назвать первой монографией, посвященной дифференциальным уравнениям и заканчивается работой Эмиля Пикара «Traité d'analyse» (1893 –1896), в котором содержится широкий синтез всего того, что было сделано в области дифференциальных уравнений в конце XIX века. Трактат Пикара довольно точно отмечает момент, когда теория дифференциальных уравнений обретает зрелость: прочный фундамент, на котором она развивается одновременно с алгебраической, аналитической и качественной теорий [9].

Обзор использования диаграмм за 18-19 вв. Следуя за исследованиями [18] рассмотрим таблицу особенно значимых книг и мемуаров, хорошо освещающих период в два столетия. Это либо трактаты, оказавшие особое влияние на образование и научную среду, или работы, содержащие важные теоретические достижения. Во втором столбце для каждого из этих изданий указано количество диаграмм, которые иллюстрируют часть текста, посвященную дифференциальным уравнениям.

Книга или мемуары	Количество диаграмм
Габриэль Манфреди 1707 (Италия)	35
Мария Гаэтана Аньези 1748 (Италия)	8
Винче́нцо де Рикка́ти 1752 (Италия)	16
Луи Антуан, граф де Бугенвиль 1756 (Франция)	8
Леонард Эйлер 1768–1769 (Швеция, Россия, Пруссия)	0
Сильве́стр Франсуа́ де Лакруа́ 1798 (Франция)	11
Огюсте́н Луи́ Коши́ 1824 (Франция)	0
Франсуа́ Наполео́н Мари́ Муаньо́ 1844 (Франция)	0
Джордж Буль 1859 (Англия)	4
Ру́дольф О́тто Си́гизмунд Ли́пшиц 1880 (Германия)	0
Жюль Анри́ Пуанкаре́ 1881–1886 (Франция)	31
Шарль Эмиль Пикар 1893–1896 (Франция)	14

Анализируя таблицу можно обнаружить три основных, хорошо известных периода в теории дифференциальных уравнений. До 1750 года каркасом теории является геометрия. Целью является построение кривой, касательные к которой удовлетворяют заданному свойству. Фактически речь идет об обратной задаче о касательной.

Постепенно во многих приложениях появляются новые кривые, которые не попадают в класс алгебраических кривых[2], принятых в геометрии со времен Декарта и «появляется желание как-то узаконить

[2]Согласно источнику [11], алгебраическая кривая – кривая, задаваемая в декартовых координатах алгебраическим уравнением, в общем случае – алгебраическое многообразие размерности 1. Простейшими примерами алгебраической кривой являются аффинные и проективные прямые и кривые 2-го порядка.

их» [7, p. 24]. Поскольку основным объектом теории является кривая, которую нужно определить и нарисовать, естественно, что первые книги содержат множество диаграмм (см. таблицу). Такая ситуация сохраняется вплоть до 1756 г.

Чтобы построить эти кривые по точкам, сначала пытались найти уравнения в конечной форме, принимая в качестве законных операций алгебраические операции и квадратуры кривых: это называлось «интегрирование по квадратурам».

С этой картезианской[3] точки зрения алгебра – это прежде всего инструмент анализа, призванный служить геометрии. Такой образ мышления можно видеть, например, в мемуарах Винченцо Риккати 1752 года, когда после решения дифференциального уравнения с помощью квадратур, автор пишет: «Построение берет свое начало в этом анализе» [16]. Т. е. уравнение по-прежнему является лишь способом получения кривой, а не самоцелью само по себе.

Но постепенно, на протяжении первой половины 18 века, математики осознают, что уравнение можно рассматривать как **определение** кривой, что можно работать непосредственно с уравнением, не пытаясь описать кривую.

К 1750 году наступает время фундаментальных перемен в математике: древнее геометрическое мышление уступает место современному алгебраическому мышлению.

Ученые больше не пытаются строить кривые, а начинают изучают функции. Благодаря этому новому подходу дифференциальные уравнения не требуют немедленного геометрического представления. Математики начинают задумываться о классификации дифференциальных уравнений и методах их решения [10, p. 314]. Решения уравнений теперь представлены алгебраическими алгоритмами, конечными или бесконечными, такими как ряды или непрерывные дроби. Алгебраическое выражение приобретает легитимность само по себе. Нет необходимости возвращаться к геометрии, чтобы придать ему смысл. Математики в поисках алгебры бесконечного, освобожденного от геометрии и механики, радикально переходят к чисто аналитическим методам исследования.

Согласно [18] уже в книгах М. Г. Аньези (1748 г.) и де Бугенвиля (1756 г.) диаграммы встречаются реже и не играют такую важную роль как раньше. Алгебраизация достигает своего пика в работах Леонарда Эйлера (1768 – 1769 гг.), который пишет первый трактат по исчислению без каких-либо диаграмм. Это триумф алгебраического анализа. Стиль Эйлера характеризуется многочисленными виртуозными манипуляциями с рядами для получения представлений решений дифференциальных уравнений. Чуть позже возникнет проблема сходимости этих рядов, которая станет центральной темой работы Коши (1824) и приведет к знаменитой теореме существования и единственности решения[4]. На протяжении 19 века теорема будет иметь различные уточнения и демонстрации [9, pp. 446-447].

Следующий период 1768 – 1880 гг. (от Эйлера до Пуанкаре) обходится практически без диаграмм. Случай Лакруа, вопреки видимости, не противоречит этой схеме. Действительно, Лакруа (1798 г.) в целом принимает точку зрения Эйлера, но при этом стремится придать своим работам историческое ценность, приводя множество ссылок и излагая старые теории в противовес новейшим теориям. Более того, в отличие от других авторов, он довольно далеко заходит в применении дифференциальных уравнений в геометрии. Те 11 диаграмм, которые мы видим в таблице, связаны либо со старыми теориями, либо с его приложениями.

То же самое относится и к случаю Джорджа Буля (1859 г.), прекрасного представителя английской алгебраической школы: четыре диаграммы, упомянутые в таблице связаны с геометрическими приложениями, которые даются в качестве упражнений.

Таким образом, мы имеем чуть более века, в течение которого ни одна диаграмма не связана непосредственно с собственно теорией дифференциальных уравнений.

Разумеется, речь идет о научных работах достаточно высокого уровня. Так как в некоторых прикладных исследованиях или других педагогических работах использование «древней геометрии» для лучшего понимания материала по-прежнему сохраняются. В частности, в качестве практического инструмента для формулировки дифференциальных уравнений на языке дифференциалов Лейбница. Такие диаграммы можно найти в ранних работах Лапласа по небесной механике в 1773 – 1778 годах.

Новый период начинается с Пуанкаре (1881 – 1886 гг.), который снова обращает внимание на кривым, определяемыми дифференциальными уравнениями. Но уже с другой точки зрения – с точки зрения глобального качественного исследования интегральных кривых. Диаграммы вновь обретают популярность. Метод последовательных представлений достиг в некотором смысле своих пределов. Именно это удивительное возвращение к геометрии позволило добиться дальнейшего прогресса. Аналитическое

[3]Согласно источнику [11], картезианство совокупность взглядов Р. Декарта и его последователей. Это направление в философии и естествознании 17 – 18 веков, основанное на учении Р. Декарта. Основа картезианства – дуализм, разделение мира на две самостоятельные и независимые субстанции – протяженную и мыслящую. В теории познания основной принцип – самодостоверность сознания («мыслю, следовательно, существую») и теория врожденных идей.

[4]В иностранных источниках, после усовершенствований Липшицем, теорема стала носить название «теорема Коши – Липшица».

изучение дифференциальных уравнений, разумеется, продолжает развиваться, но теперь уже параллельно с вновь возникшей качественной теорией.

Заключение. Изучая книги, научные статьи и монографии по теме исследования я получила возможность рассмотреть диаграммы с различными функциями в рамках математической дискуссии: формулировка уравнения с использованием дифференциала Лейбница, решение уравнения как результат графического алгоритма построения или использования механического инструмента, обеспечивая геометрического понимания поведения решений, указание пути к теоретическим открытиям и т. д. Помимо этих функций, я познакомилась с двумя основных типами диаграмм: с одной стороны, количественными и физически точными, полученными с помощью сложных численных и графических методов; с другой стороны, качественными и топологическими, которые могут оставаться мысленными или могут быть грубо нарисованы от руки. Диаграммы первого типа чаще всего используются для геометрического изображения, насколько это возможно точного, аналитических или численных результатов. Т. е. чтобы лучше представить данную ситуацию, понять ее и обеспечить эвристический инструмент для дальнейших открытий. Диаграммы второго типа способствуют развитию геометрической интуиции, оказывают психологическую помощь в рассуждениях, используются для контроля аналитического исследования, а также стимулируют открытия, но уже другим способом. Более того, эти диаграммы оказывают неоценимую помощь при написании демонстраций, позволяя составлять короткие и понятные тексты. Конечно, в теории дифференциальных уравнений можно было бы приводить доказательства, полностью независимые от диаграмм, но эти доказательства были бы очень длинными и утомительными. Поэтому диаграммы вносят свой вклад, предоставляя когнитивные, а не логические основы теории, и лежат в основе концепции доказательств, которые не только убеждают, но и объясняют.

Трудно точно определить, какую роль диаграммы сыграли в открытии новых результатов. Потому как тексты, которые я анализировала являются пояснительными. И хорошо известно, что окончательная форма доказательств, представленных для широкой публики, не всегда точно отражает мысленные шаги, которые проделал исследователь в процессе открытия новых результатов. Например, в главе X третьего тома трактара "Traité d'analyse"(1896, стр. 228–252) Пикар по-своему использует первые шесть глав мемуаров Пуанкаре 1881–1882 годов о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Там, где Пуанкаре приводил 23 диаграммы, он сохранил только 2. Интересно отметить, что Пикар не исключает диаграммы полностью. Тем не менее, минимум геометрического представления остается необходимым для глобального восприятие изучаемой сложной ситуации. Этот экстремальный случай, по-видимому, подтверждает важную и неустранимую роль визуального мышления в области дифференциальных уравнений. В этом разделе математики уверенность в аналитических доказательствах во многом обусловлена фактом согласования с тем, что мы видим на диаграммах. Знание здесь строится на тонкой игре между интуицией, экспериментами и абстрактной аналитической теорией, где визуальное и дискурсивное мышление постоянно взаимодействуют.

В процессе своего исследования мне стало понятно, что несмотря на то, что некоторые математики (Эйлер, Коши, Липшиц и др.) решали проблему интегрирования дифференциальных уравнений чисто аналитическим путем, отрицая всякую связь с геометрией и воздерживаясь от рисования диаграмм. А другие (Риккати, Пуанкаре, Массау и др.) развивали геометрическое видение и подпитывали свою интуицию многочисленными диаграммами, физическими или мысленными. Тот факт, что математики последнего направления достигли результатов, которых не достигли математики первого, и доказывает, что использование диаграмм играло ключевую роль, которую нельзя свести просто к вопросу представления или стиля изложения математических исследований.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Ольге Викторовне Черновой за консультацию на всех этапах написания работы и ценные советы.*

Список литературы

1. Галкин Е. В. Краткая история математики. Учебное пособие. Челябинск. 2003г. 229 с.
2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия / Перевод с немецкого С. А. Каменецкого / М.-Л., ОНТИ, 1936 — 304 с.
3. Математика XIX века / под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича, М.: Наука, 1987. – 320 с.
4. Научно-образовательный портал «Большая российская энциклопедия» URL: https://bigenc.ru/
5. Юшкевич А. П. История математики в средние века. - М.: ГИФМЛ, 1961. - 448 с
6. Archibald, T. (2003). Differential equations: A historical overview to circa 1900. In H. N. Jahnke (Ed.), A history of analysis (pp. 325–353). Providence (Rhode Island): American Mathematical Society.

7. Bos H. J. M. Tractional motion and the legitimation of transcendental curves. Centaurus. – 1988. – 31. – pp. 9–62.

8. Giaquinto M. Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. The British Journal for the Philosophy of Science. – 1994. – 45. P. 789–813.

9. Gilain C. Ordinary differential equations. In I. Grattan-Guinness (Ed.), Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences. (Vol. 1, pp. 440–451). London, New York: Routledge. 1994. p. 450.

10. Guicciardini N. Three traditions in the calculus: Newton, Leibniz and Lagrange. In I. Grattan-Guinness (Ed.), Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences (Vol. 1, pp. 308–317). London, New York: Routledge. 1994.

11. Mancosu P. Visualization in logic and mathematics. In P. Mancosu, K. F. Jorgensen, & S. A. Pedersen (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics (pp. 13–30). Dordrecht: Springer. (2005).

12. Manders K. The Euclidean diagram (1995). In P. Mancosu (Ed.), The philosophy of mathematical practice (pp. 80–133). Oxford: Oxford University Press. (2008).

13. Mumma J. Ensuring generality in Euclid’s diagrammatic arguments. In G. Stapleton, J. Howse, J. Lee (Eds.), Diagrammatic representation and inference, 5th international conference, diagrams 2008, Herrsching, Germany, September 19–21, 2008. Dordrecht: Springer. Mumma, J. (2009). Proofs, pictures, and Euclid. Synthese. doi:10.1007/s11229-009-9509-9 (2008).

14. Painlevé, P. & Vessiot É. Équations différentielles ordinaires. In J. Molk (Ed.) *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.* Tome II (Vol. 3, fasc. 1). Paris: Gauthier-Villars. (1910).

15. Panza M. The twofold role of diagrams in Euclid’s plane geometry. Hyper Articles en Ligne. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00192165/fr/. 2007.

16. Riccati V. Du usu motus tractorii in constructione æquationum différentialium. Bononiæ: Ex Typographia Lælii a Vulpe.

17. Shin S.-J. The logical status of diagrams. Cambridge: Cambridge University Press. 1994.

18. Tournés D. Diagrams in the theory of differential equations (eighteenth to nineteenth centuries). Synthese, 2012, 186 (1), pp. 257–288. ff10.1007/s11229-012-0069-zff. ffhal-01186149

Поступила в редакцию 06.06.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Черникова Дарина Вячеславовна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsu.edu.ru