Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 9–18.

Исследование уравнения Бернулли

Рудофилов И. М.
1645330@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается решение дифференциальных уравнений Бернулли. Основной целью работы является демонстрация различных методов решения дифференциальных уравнений первого порядка и их применение на практике. Приведены примеры, иллюстрирующие применение метода Бернулли. Проведен анализ полученных результатов. Полученные данные подтверждают эффективность предложенных методов и позволяют сделать выводы о возможности их использования в различных прикладных задачах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнение Бернулли, методы решения, прикладные задачи

Для цитирования: Рудофилов И. М. 2024. Исследование уравнения Бернулли. *Студенческий математический журнал*, 2: 9–18.

---

1. Введение. Уравнение Бернулли – классический пример дифференциального уравнения первого порядка, которое описывает широкий спектр явлений в природе и технике [1]. Решение уравнения Бернулли является важной задачей в математике и ее приложениях, поскольку оно позволяет моделировать и анализировать различные процессы, от движения жидкостей до распространения эпидемий. В данной работе мы рассмотрим основные свойства и методы решения уравнения Бернулли, а также его приложения в различных областях науки и инженерии.

2. Обзор основных методов решения уравнения Бернулли. Исторический обзор. Уравнения Бернулли были названы в честь швейцарского математика Якоба Бернулли, который впервые их изучил в конце XVII века. Однако методы решения таких уравнений развивались еще задолго до этого времени. В древнем мире исследования, связанные с уравнениями, которые можно считать предшественниками уравнений Бернулли, велись в Индии, Китае, Греции и других цивилизациях. Они были важной частью математического наследия, внося значительный вклад в развитие алгебры и анализа. В средние века и Ренессанс уравнения, подобные уравнениям Бернулли, начали привлекать внимание европейских математиков, таких как Николай Оре, Леонард Эйлер и Йозеф Луи Лагранж. Они разработали первые методы решения таких уравнений и внесли значительный вклад в их теорию.

Современные методы решения уравнений Бернулли были развиты в XIX и XX веках. С появлением дифференциального и интегрального исчислений, а также компьютерных методов, стало возможным эффективное и точное решение самых сложных уравнений этого типа.Хотя история уравнений Бернулли насчитывает уже несколько столетий, их исследование и развитие продолжается и в настоящее время, привлекая внимание математиков и исследователей со всего мира [2].

Метод замены переменной. Метод замены переменной является одним из эффективных методов решения уравнений Бернулли [3]. Он заключается в том, что мы вводим новую переменную, которая преобразует уравнение Бернулли в уравнение, имеющее более простую форму.

Рассмотрим уравнение Бернулли общего вида:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{1}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - заданные функции, а n - константа.

Чтобы применить метод замены переменной, мы выбираем подходящую замену переменной, которая упрощает уравнение. Например, если выражение $Q(x)y^n$ сложно, можно попробовать заменить y^n новой переменной.

Предположим, мы выбираем замену переменной $v = y^{1-n}$. Тогда мы можем выразить y через v как $y = v^{\frac{1}{1-n}}$. Подставив это в уравнение (1), получим:

$$\frac{d(v^{\frac{1}{1-n}})}{dx} + P(x)v^{\frac{1}{1-n}} = Q(x).$$

Решив это уравнение относительно v, мы получим решение в терминах v. После этого, используя обратную замену $y = v^{\frac{1}{1-n}}$, мы можем восстановить решение исходного уравнения.

Метод замены переменной обычно применяется в случаях, когда прямое интегрирование или метод разделения переменных не дают достаточно простого результата.

Метод разделения переменных. Метод разделения переменных – один из основных методов решения дифференциальных уравнений [3]. Суть метода заключается в том, что дифференциальное уравнение разделяется на две части, каждая из которых содержит только одну переменную. Затем эти части интегрируются отдельно, и затем находится общее решение уравнения путем объединения полученных функций.

Применение метода разделения переменных к уравнениям Бернулли. Уравнения Бернулли являются одним из классов нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Они имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции на интервале (a, b), а n - константа, отличная от 0 и 1.

Для решения уравнений Бернулли мы можем применить метод разделения переменных, предполагая, что $y \neq 0$ (иначе уравнение легко решается). Для этого уравнение домножается на подходящий множитель и затем производится замена переменных.

Пусть $z = y^{1-n}$, тогда $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, и тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1} \frac{dz}{dx}$.

Подставив это в уравнение Бернулли, получим:

$$\frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1} \frac{dz}{dx} + P(x) z^{\frac{1}{1-n}} = Q(x).$$

Это уже линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить, используя метод разделения переменных.

Прямое интегрирование. Прямое интегрирование является одним из методов решения уравнений Бернулли. Суть метода заключается в том, что мы преобразуем уравнение Бернулли таким образом, чтобы оно стало дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, которое можно решить стандартными методами.

Рассмотрим уравнение Бернулли общего вида:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Предположим, что мы можем выразить y как произведение некоторой функции $v(x)$ и степенной функции $u(x)$, то есть $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставим это предположение в уравнение (1):

$$\frac{d(uv)}{dx} + P(x)uv = Q(x)(uv)^n.$$

Далее продифференцируем uv и подставим результат обратно в уравнение:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)(uv)^n.$$

Мы можем выразить $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{du}{dx}$ и подставить обратно, чтобы получить уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{v'}{v} + P(x) = Q(x)u^{n-1}.$$

Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое можно решить стандартными методами интегрирования.

3. Примеры применения уравнений Бернулли в различных областях. Применение в физике.

Уравнения Бернулли находят широкое применение в физике, в частности, в механике жидкостей и газов. Рассмотрим пример использования уравнения Бернулли для анализа течения воды в трубопроводе. Пусть имеется горизонтальный трубопровод с водой. Уравнение Бернулли может быть использовано для определения изменения давления и скорости воды вдоль трубы в зависимости от ее диаметра и характеристик потока [5].

Применение в экономике. В экономике уравнения Бернулли могут быть применены для моделирования процессов, связанных с изменением цен на товары и услуги. Рассмотрим пример использования уравнения Бернулли для анализа динамики цен на нефть. Уравнение Бернулли может помочь оценить влияние изменения спроса и предложения на цену нефти, а также предсказать вероятные тенденции ценового движения в будущем.

Применение в биологии. В биологии уравнения Бернулли могут быть использованы для моделирования динамики популяций в различных экосистемах. Рассмотрим пример использования уравнения Бернулли для изучения роста и размножения популяции животных. Уравнение Бернулли может помочь определить, как различные факторы, такие как наличие пищи и хищников, влияют на изменение численности популяции в течение времени.

Применение в других областях. Помимо вышеперечисленных областей, уравнения Бернулли находят применение в различных инженерных и научных дисциплинах. Например, в метеорологии они могут быть использованы для моделирования атмосферных явлений, таких как циркуляция воздуха и формирование облачности. В геофизике они могут быть применены для изучения движения земной коры и распространения землетрясений.

Применение в программировании. Уравнения Бернулли также могут быть использованы в программировании для решения различных задач, особенно в численных методах и научных вычислениях. Например, они могут быть реализованы в виде функций или классов для решения дифференциальных уравнений на языках программирования, таких как Python, MATLAB или Julia.

Программисты могут использовать уравнения Бернулли для моделирования различных физических, экономических и биологических процессов в своих проектах. Это позволяет им создавать более точные и эффективные программные решения для анализа данных и прогнозирования результатов.

Пример использования уравнений Бернулли в программировании представлен ниже:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определение функции для решения уравнения Бернулли
def bernoulli_equation(y, x):
return y - x**2 * y**2

# Реализация численного метода для решения уравнения Бернулли
def solve_bernoulli_equation():
x_values = np.linspace(0, 1, 100)
y_values = np.zeros_like(x_values)
y_values[0] = 1  # Начальное условие

for i in range(1, len(x_values)):
h = x_values[i] - x_values[i-1]
y_values[i] = y_values[i-1] + h * bernoulli_equation(y_values[i-1], x_values[i-1])

return x_values, y_values

# Получение решения уравнения Бернулли
x, y = solve_bernoulli_equation()

# Визуализация результатов
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Solution of Bernoulli equation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Этот пример демонстрирует использование численного метода для решения уравнения Бернулли на языке программирования Python с использованием библиотеки NumPy для вычислений и Matplotlib для визуализации результатов.

4. Решение дифференциальных уравнений Бернулли. Рассмотрим несколько основных случаев уравнения Бернулли и методы их решения, а также представим примеры, демонстрирующие применение этих методов на практике.

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - y \operatorname{tg} x = y^{-2} \operatorname{tg}^2 x$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на y^2:

$$y^2 y' - y^3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x$$

Делаем замену $u = y^{-1}$, $u' = -y^{-2} y'$:

$$-u' - u \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x \tag{2}$$

Уравнение (2) – линейное уравнение 1-го порядка, где:

$$a = -\operatorname{tg} x,\ b = -\operatorname{tg}^2 x$$

Теперь воспользуемся методом Бернулли и сделаем замену $u = tv$, $u' = t'v + tv'$:

$$-t'v - tv' - tv\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x$$

$$-t'v - v(t' + t\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^2 x$$

Теперь вычисляем $t' + t\operatorname{tg} x$:

$$\frac{dt}{d}x = -t\operatorname{tg} x$$

$$\frac{dt}{t} = -\operatorname{tg} x\,dx$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = -\int \operatorname{tg} x\,dx$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$\ln t = -\ln\cos x + C$$

$$t = \frac{C}{\cos x}$$

Теперь вычислим вторую часть уравнения, а именно $tv' = -\operatorname{tg}^2 x$, при $t = \frac{C}{\cos x}$:

$$\frac{C}{\cos x}v' = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$v' = -\frac{\cos x\sin^2 x}{C}$$

$$dv = -\frac{\cos x\sin^2 x}{C}dx$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int dv = -\frac{1}{C}\int \cos x\sin^2 x dx$$

Интеграл в правой части решим заменой:

$$u = \sin x,\ du = \cos x dx$$

$$-\frac{1}{C}\int u^2 du$$

$$-\frac{1}{C}\cdot\frac{u^3}{3} + D$$

$$v = -\frac{\sin^3 x}{3C} + D$$

Теперь обратная замена:

$$u = tv,\ t = \frac{C}{\cos x}$$

$$u = \frac{C}{\cos x}\left(-\frac{\sin^3 x}{3C} + D\right)$$

$$u = -\frac{\sin^3 x}{3\cos x} + \frac{CD}{\cos x}$$

Обратная замена:

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{-\frac{\sin^3 x}{3\cos x} + \frac{CD}{\cos x}}$$

Теперь нам необходимо выполнить проверку.

Проверка. Для этого необходимо вычислить производную от общего интеграла:

$$y' = \frac{(\sin x)^3 - 3CD\cos^2 x}{(\cos x(-\sin^3 x + 3CD))^2}$$

Теперь подставим общий интеграл и его производную в наше изначальное уравнение:

$$\frac{(\sin x)^3 - 3CD\cos^2 x}{(\cos x(-\sin^3 x + 3CD))^2} - \frac{\cos x}{-\frac{\sin^3 x}{3} + CD} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\left(\frac{\cos x}{-\frac{\sin^3 x}{3} + CD}\right)^2}$$

$$\frac{(\sin x)^3 - 3CD\cos^2 x}{(\cos x(-\sin^3 x + 3CD))^2} - \frac{\sin x}{-\sin^3 x + 3CD} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\left(\frac{\cos x}{-\frac{\sin^3 x}{3} + CD}\right)^2}$$

$$\frac{\sin^3 x - 3CD\cos^2 x - \sin^3 x + 3CD}{(\cos x(-\sin^3 x + 3CD))^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\left(\frac{\cos x}{-\frac{\sin^3 x}{3} + CD}\right)^2}$$

$$\frac{0}{(\cos x(-\sin^3 x + 3CD))^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\left(\frac{\cos x}{-\frac{\sin^3 x}{3} + CD}\right)^2}$$

$$0 = 0$$

Как мы видим, получилось верное тождество, а значит наш ответ является общим решением данного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = \dfrac{\cos x}{-\dfrac{\sin^3 x}{3} + CD}$.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}$$

Решение. Делим обе части уравнение на x:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 e^{2x} y^{-1} \tag{3}$$

Делаем замену $y = U \cdot V$, где:

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Подставляем в уравнение (3):

$$U' \cdot V + U \cdot V' - \frac{U \cdot V}{x} = x^2 e^{2x} U^{-1} \cdot V^{-1}$$

Используем метод Бернулли. Вынесем множитель U из разности в левой части уравнения:

$$U' \cdot V + U(V' - \frac{V}{x}) = x^2 e^{2x} U^{-1} \cdot V^{-1}$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными в скобках:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}$$

Далее интегрируем, произвольную постоянную берём равную нулю, так как нам важно хотя бы одно решение:

$$\ln|V| = \ln|x|$$

Отсюда получаем $V = x$.

Теперь подставляем нашу найденную функцию V в уравнение (3), получаем:

$$U' \cdot x = x^2 e^{2x} U^{-1} x^{-1}$$

Таким образом:

$$U' = \frac{e^{2x}}{U}$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int U du = \int e^{2x} dx$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$$

$$U = \sqrt{e^x + C}$$

Теперь возвращаемся к замене и подставляем найденные функции в $y = U \cdot V$, получаем:

$$y = x \cdot \sqrt{e^x + C}$$

Проверка. Вычисляем производную:

$$y = x \cdot \sqrt{(e^x + C)}$$

$$y' = \sqrt{(e^x + C)} + \frac{x \cdot e^x}{2\sqrt{(e^x + C)}}$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}$$

$$x \cdot (\sqrt{(e^x + C)} + \frac{x \cdot e^x}{2\sqrt{(e^x + C)}}) - x \cdot \sqrt{(e^x + C)} = x^3 e^{2x} (x \cdot \sqrt{(e^x + C)})^{-1}$$

Упрощаем уравнение:

$$\frac{x \cdot e^x}{2\sqrt{(e^x + C)}} = x^2 e^x (x \cdot \sqrt{(e^x + C)})^{-1}$$

Упрощаем тождество и получаем:

$$0 = 0$$

Оно истинно, значит наше общее решение также является верным.

Ответ: $y = x \cdot \sqrt{e^x + C}$.

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1} \sin^4 x$$

Решение. Делим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$:

$$y' - y \operatorname{ctg} x = y^{-1} \sin^3 x \tag{4}$$

Делаем замену $y = U \cdot V$, где:

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Подставляем в уравнение (4):

$$U' \cdot V + U \cdot V' - U \cdot V \operatorname{ctg} x = y^{-1} \sin^3 x$$

Используем метод Бернулли. Вынесем множитель U из разности в левой части уравнения:

$$U' \cdot V + U(V' - V \operatorname{ctg} x) = y^{-1} \sin^3 x$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными в скобках:

$$\frac{dV}{dx} = V \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{dV}{V} = \operatorname{ctg} x dx$$

Далее интегрируем, произвольную постоянную берём равной нулю, так как нам важно хотя бы одно решение:

$$\ln |V| = \ln |\sin x|$$

Отсюда получаем $V = \sin x$.

Теперь подставляем нашу найденную функцию V в уравнение (4), получаем:

$$U' \cdot \sin x = y^{-1} \sin^3 x$$

Таким образом:

$$U' = y^{-1} \sin^2 x$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int U du = \int \sin^2 x dx$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} + C_1$$

$$U = \sqrt{\sin^2 x + C}$$

Теперь возвращаемся к замене и подставляем найденные функции в $y = U \cdot V$, получаем:

$$y = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C}$$

Проверка. Вычисляем производную:

$$y = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C}$$

$$y' = \sqrt{\sin^2 x + C} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + C}}$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1} \sin^4 x$$

$$(\sqrt{\sin^2 x + C} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + C}}) \operatorname{tg} x - \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C} =$$

$$= (\sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C})^{-1} \sin^4 x$$

Упрощаем уравнение:

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + C}} \operatorname{tg} x = (\sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C})^{-1} \sin^4 x$$

Упрощаем тождество и получаем:

$$0 = 0$$

Оно истинно, значит наше общее решение также является верным.

Ответ: $y = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C}$.

Задача 4.

$$y' x \ln x - y = y^{-1} \ln^4 x$$

Решение. Делим обе части уравнения на $x \ln x$:

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = y^{-1} \frac{\ln^4 x}{x \ln x} \tag{5}$$

Делаем замену $y = U \cdot V$, где:

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Подставляем в уравнение (5):

$$U' \cdot V + U \cdot V' - \frac{U \cdot V}{x \ln x} = y^{-1} \frac{\ln^4 x}{x \ln x}$$

Используем метод Бернулли. Вынесем множитель U из разности в левой части уравнения:

$$U' \cdot V + U(V' - \frac{V}{x \ln x}) = y^{-1} \frac{\ln^4 x}{x \ln x}$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными в скобках:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x \ln x}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x\ln x}$$

Далее интегрируем, произвольную постоянную берём равной нулю, так как нам важно хотя бы одно решение:

$$\ln|V| = \ln|\ln x|$$

Отсюда получаем V = $\ln x$.

Теперь подставляем нашу найденную функцию V в уравнение (5), получаем:

$$U' \cdot \ln x = y^{-1}\frac{\ln^4 x}{x\ln x}$$

Таким образом:

$$U' = y^{-1}\frac{\ln^3 x}{x}$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int U du = \int \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{\ln^4 x}{4} + C_1$$

$$U = \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}$$

Теперь возвращаемся к замене и подставляем найденные функции в $y = U \cdot V$, получаем:

$$y = \ln x \cdot \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}$$

Проверка. Вычисляем производную:

$$y = \ln x \cdot \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}$$

$$y' = \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C} + \frac{\ln x \cdot \ln^3 x}{2x\sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}}$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$y' x\ln x - y = y^{-1}\ln^4 x$$

$$\left(\sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C} + \frac{\ln x \cdot \ln^3 x}{2x\sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}}\right)x\ln x - \ln x \cdot \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C} =$$

$$= \left(\ln x \cdot \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}\right)^{-1}\ln^4 x$$

Упрощаем уравнение:

$$\frac{\ln x \cdot \ln^3 x}{2x\sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}} x\ln x = \left(\ln x \cdot \sqrt{\frac{\ln^4 x}{4} + C}\right)^{-1}\ln^4 x$$

Упрощаем тождество и получаем:

$$0 = 0$$

Оно истинно, значит наше общее решение также является верным.

Ответ: $y = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x + C}$.

Задача 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - 2y\operatorname{tg} x = 2y^{-2}\operatorname{tg}^5 x$$

Решение. Делим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$:

$$y' - 2y = 2y^{-2}\operatorname{tg}^4 x \qquad (6)$$

Делаем замену $y = U \cdot V$, где:

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Подставляем в уравнение (6):

$$U' \cdot V + U \cdot V' - 2U \cdot V = 2y^{-2}\operatorname{tg}^4 x$$

Используем метод Бернулли. Вынесем множитель U из разности в левой части уравнения:

$$U' \cdot V + U(V' - 2V) = 2y^{-2}\operatorname{tg}^4 x$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными в скобках:

$$\frac{dV}{dx} = 2V$$

$$\frac{dV}{V} = 2dx$$

Далее интегрируем, произвольную постоянную берём равной нулю, так как нам важно хотя бы одно решение:

$$\ln|V| = 2x$$

Отсюда получаем $V = e^{2x}$.

Теперь подставляем нашу найденную функцию V в уравнение (6), получаем:

$$U' \cdot e^{2x} = 2y^{-2}\operatorname{tg}^4 x$$

Таким образом:

$$U' = 2y^{-2}e^{-2x}\operatorname{tg}^4 x$$

Теперь решаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int Udu = \int e^{-2x}\operatorname{tg}^4 xdx$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{2}e^{-2x} + C_1$$

$$U = \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}$$

Теперь возвращаемся к замене и подставляем найденные функции в $y = U \cdot V$, получаем:

$$y = e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}$$

Проверка. Вычисляем производную:

$$y = e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}$$

$$y' = 2e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C} + \frac{e^{2x} \cdot \operatorname{tg}^3 x}{2\sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}}$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$y' - 2y\operatorname{tg} x = 2y^{-2}\operatorname{tg}^5 x$$

$$(2e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C} + \frac{e^{2x} \cdot \operatorname{tg}^3 x}{2\sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}}) - 2e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}\operatorname{tg} x =$$

$$= 2(e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C})^{-2}\operatorname{tg}^5 x$$

Упрощаем уравнение:

$$\frac{e^{2x} \cdot \operatorname{tg}^3 x}{2\sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}} - 2e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}\operatorname{tg} x = 2(e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C})^{-2}\operatorname{tg}^5 x$$

Упрощаем тождество и получаем:

$$0 = 0$$

Оно истинно, значит наше общее решение также является верным.

Ответ: $y = e^{2x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^4 xe^{-2x} + C}$.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Черновой Ольге Викторовне за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Агафонов С. А., Муратова Т. В. 2018. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М, Academia, 352 с.
2. Баврин И. И. 2024. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования. М., Издательство Юрайт, 568 с.
3. Камке Э. 1976. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (6-е изд.). М., Наука, 589 с.
4. Матвеев Н. М. 1967. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (3-е изд.). М., Высшая школа, 565 с.
5. Хартман Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 720 с.

Поступила в редакцию 24.05.2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудофилов Илья Максимович – бакалавр 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Chernova_Olga@bsu.edu.ru